Додаткові розділи функціонального аналізу

Лекція 7

Володимир Кадець

ХНУ ім. В.Н.Каразіна

Харків, 2020

Зміст лекції

Принцип Шаудера. (J. Schauder) Кожний опуклий компакт в нормованому просторі має властивість нерухомої точки.

Подамо ще одне зручне в застосуваннях переформулювання принципу Шаудера.

Наслідок 1. Нехай V – опукла замкнена, обмежена підмножина банахового простору, $F\colon V \to V$ – неперервне відображення і $F(V)$ – передкомпакт. Тоді у відображення F є нерухома точка.

Доведення. Позначимо через K замикання опуклої оболонки множини $F(V)$. За умовою, K – опуклий компакт, $F(K) \subset F(V) \subset K$, тобто F можна розглядати як відображення компакта K в себе. Залишається застосувати принцип Шаудера. $\square$

Нагадаємо, що задачею Коші диференціального рівняння

$$y' = f(t, y)$$

називається задача пошуку неперервно диференційовної функції $y(t)$, визначеної в околі точки t_0, яка задовольняє як саме рівняння, так і задану початкову умову $y(t_0) = y_0$.

У випадку неперервної функції $f(t, y)$ задача Коші еквівалентна такому інтегральному рівнянню:

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds. \tag{1}$$

Теорема Пікара. Нехай функція $f\colon [t_0, T] \times [y_0 - \theta, y_0 + \theta] \to [-M, M]$ вимірна і задовольняє умову Ліпшиця за другою змінною зі сталою $\gamma > 0$, не залежною від першої змінної. Тоді існує таке $\tau > 0$, що на відрізку $t \in [t_0, t_0 + \tau]$ рівняння (1) має розв'язок і цей розв'язок єдиний. За τ можна взяти будь-яке число, строго менше за $\tau_0 = \min\left\{\frac{\theta}{M}, \frac{1}{\gamma}, T - t_0\right\}$.

Доведення. У банаховому просторі $C[t_0, t_0 + \tau]$ розглянемо підмножину U всіх функцій $y(t)$, які задовольняють на $[t_0, t_0 + \tau]$ умову $|y(t) - y_0| \leqslant \theta$. Задамо таке відображення $F\colon U \to C[t_0, t_0 + \tau]$:

$$(F(y))(t) = y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds.$$

Розв'язок рівняння (1) – це нерухомі точки відображення F.

Перевіримо, що F здійснює відображення стиску множини U в себе. По-перше, для будь-якого $y \in U$ маємо

$$|(F(y))(t) - y_0| = \left| \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds \right| \leqslant M\tau \leqslant \theta,$$

тобто $F(y) \in U$. Отже, $F(U) \subset U$. Далі, для будь-яких $y_1, y_2 \in U$

$$\|F(y_1) - F(y_2)\| = \max_{t \in [t_0, t_0+\tau]} \left| \int_{t_0}^{t} f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))ds \right|$$

$$\leqslant \gamma\tau \|y_1 - y_2\|,$$

а за побудовою $\gamma\tau < 1$. Тобто F – стискальне відображення.

Нарешті, множина U замкнена в $C[t_0, t_0 + \tau]$, відповідно, U – повний метричний простір у рівномірній метриці, яку ми розглядаємо. Отже, можна застосувати теорему Банаха про відображення стиску, яка дає нам існування і єдиність нерухомої точки. $\square$

Теорема Пеано. Нехай функція $f\colon [t_0, T] \times [y_0 - \theta, y_0 + \theta] \to [-M, M]$ вимірна і рівномірно відносно першої змінної неперервна за другою змінною. Іншими словами, для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що для будь-якого $t \in [t_0, T]$ і будь-яких $y_1, y_2 \in [y_0 - \theta, y_0 + \theta]$, якщо $|y_1 - y_2| \leqslant \delta$, то $|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leqslant \varepsilon$.
Тоді в рівняння (1) існує розв'язок на відрізку $t \in [t_0, t_0 + \tau]$, де за τ можна взяти $\min\left\{\frac{\theta}{M}, T - t_0\right\}$.

Доведення. Розглянемо таку саму множину U і таке саме відображення F, як і в попередньому доведенні. Тільки на відміну від теореми Пікара існування нерухомої точки буде випливати не з теореми про відображення стиску, а з принципу Шаудера у формулюванні з наслідку 1 на початку нашої лекції. Зокрема, тому в теоремі стверджується існування, але не стверджується єдиність розв'язку.

Перевіримо виконання умов наслідку 1 у нашому випадку. Множина U – це замкнена куля простору $C[t_0, t_0 + \tau]$ радіуса θ з центром у функції, що тотожно дорівнює y_0. Тому U – опукла замкнена, обмежена підмножина простору $C[t_0, t_0 + \tau]$. Доведення включення $F(U) \subset U$ з теореми Пікара зберігає свою силу.

Перевіримо неперервність відображення F. Для будь-якого $\varepsilon > 0$ візьмемо $\delta(\varepsilon)$ з умови рівномірної неперервності за y функції $f(t, y)$. Тоді для будь-яких функцій $y_1, y_2 \in U$ з $\|y_1 - y_2\| < \delta(\varepsilon/\tau)$ маємо $|f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))| \leqslant \varepsilon/\tau$ і, отже,

$$\|F(y_1) - F(y_2)\| = \max_{t \in [t_0, t_0+\tau]} \left| \int_{t_0}^{t} f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s)) ds \right| \leqslant \varepsilon.$$

Нарешті, перевіримо, що $F(U)$ – це передкомпакт. Оскільки $F(U) \subset U$, а U – це куля, $F(U)$ – обмежена множина. Згідно з теоремою Арцела, нам треба довести одностайну неперервність сім'ї функцій $F(U)$.

Для будь-якої функції $g \in F(U)$ існує функція $y \in U$ з $F(y) = g$. Відповідно, для будь-яких $t_1, t_2 \in [t_0, t_0 + \tau]$ маємо:

$$|g(t_1) - g(t_2)| = |(F(y))(t_1) - (F(y))(t_2)|$$

$$= \left| \int_{t_1}^{t_2} f(s, y(s)) ds \right| \leqslant M \left| t_1 - t_2 \right| .$$

Тобто сім'я $F(U)$ не просто одностайно неперервна, а задовольняє умову Ліпшиця із загальною сталою M.
Отже, всі умови наслідку 1 перевірено, чим доведено існування шуканої нерухомої точки.

□