Додаткові розділи функціонального аналізу

Лекція 5

Володимир Кадець

ХНУ ім. В.Н.Каразіна

Харків, 2020

Зміст лекції

На попередній лекції ми довели дві леми: лему Шпернера та лему про розфарбування симплекса (формулювання на дошці).

На цій лекції ми доведемо обіцяну раніше теорему Брауера:

Теорема. Кожний опуклий компакт у скінченновимірному нормованому просторі має властивість нерухомої точки.

Доведення. Ми вже пояснювали, що теорему достатньо доводити для симплексів. (доведення на дошці)

Нехай K – непорожня підмножина метричного простору X, U_j, $j = 1, 2, ..., n$ – відкриті множини, і $\bigcup_{j=1}^{n} U_j \supset K$. Набір неперервних функцій $\varphi_j \colon K \to \mathbb{R}$, $j = 1, 2, ..., n$ називається розбиттям одиниці на K, що підпорядковане покриттю $\{ U_j \}_1^n$, якщо $\sum_{j=1}^{n} \varphi_j \equiv 1$, $\varphi_j \geqslant 0$ і $\operatorname{supp} \varphi_j \subset U_j$ при всіх j.

Теорема 1. В описаних вище умовах існує розбиття одиниці на K, що підпорядковане покриттю $\{ U_j \}_1^n$.

Доведення. Множини $U_j^c = X \setminus U_j$ замкнені. Якщо хоча б одна з U_j^c порожня, то $U_j = X \supset K$ і задача розв'язується тривіальним способом: для цього індексу j візьмемо $\varphi_j \equiv 1$, а для $k \neq j$ покладемо $\varphi_k \equiv 0$. Отже, можна припускати непорожність всіх U_j^c. Розглянемо на K функції $g_j(x) = \rho(x, U_j^c)$. Ці функції невід'ємні, неперервні і мають таку властивість: $x \in U_j$ тоді і тільки тоді, коли $g_j(x) \neq 0$.

Оскільки кожна точка $x \in K$ лежить принаймні в одній з U_j, функція $g = \sum_{j=1}^n g_j$ ніде на K не перетворюється на нуль. За шукані φ_j можна взяти функції $\varphi_j = \frac{g_j}{g}$. Ці функції неперервні (знаменник не перетворюється в нуль), невід'ємні, $\operatorname{supp} \varphi_j = \operatorname{supp} g_j = U_j$ і $\sum_{j=1}^n \varphi_j = \frac{1}{g} \sum_{j=1}^n g_j = 1$.

Наступне означення узагальнює на нелінійний випадок поняття скінченновимірного оператора.

Відображення g множини X у лінійний простір Y називається скінченновимірним, якщо $\dim \operatorname{Lin} g(X) < \infty$.

Теорема 2. Нехай K – передкомпакт у нормованому просторі Y. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує неперервне скінченновимірне відображення $g_\varepsilon \colon K \to Y$ з $g_\varepsilon(K) \subset \operatorname{conv} K$, що рівномірно наближає на K одиничний оператор з точністю до ε: $\sup_{x \in K} \|g_\varepsilon(x) - x\| \leqslant \varepsilon$.

Доведення. Виберемо в K скінченну ε-сітку $y_1, y_2, ..., y_n$. Тоді відкриті кулі $U_k = B(y_k, \varepsilon)$ утворюють покриття множини K. Нехай $\varphi_j \colon K \to \mathbb{R}$, $j = 1, 2, ..., n$, – розбиття одиниці на K, яке підпорядковане покриттю $\{U_j\}_1^n$. Покладемо $g_\varepsilon(x) = \sum_{j=1}^n \varphi_j(x) y_j$. Неперервність g_ε випливає з неперервності всіх ϕ_j. Далі, $g_\varepsilon(K) \subset \operatorname{conv} K$, оскільки суми $\sum_{j=1}^n \varphi_j(x) y_j$ – це опуклі комбінації точок $y_j \in K$. Залишилось перевірити, що $\sup_{x \in K} \|g_\varepsilon(x) - x\| \leqslant \varepsilon$. Нехай $x \in K$ – довільний елемент. Позначимо через $N = \{j \in \{1, \ldots, n\} \colon \varphi_j(x) \neq 0\}$. За означенням розбиття одиниці, для $j \in N$ маємо включення $x \in B(y_j, \varepsilon)$, тобто $\|x - y_j\| < \varepsilon$. Відповідно,

$$\|g_\varepsilon(x) - x\| = \left\| \sum_{j=1}^n \varphi_j(x) y_j - \sum_{j=1}^n \varphi_j(x) \cdot x \right\| = \left\| \sum_{j=1}^n \varphi_j(x)(y_j - x) \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j \in N} \varphi_j(x) \|(y_j - x)\| < \varepsilon. \qquad \square$$

Теорема 3. Нехай K – опуклий компакт в нормованому просторі Y. Тоді будь-яке неперервне відображення $f\colon K \to K$ може бути з будь-якою точністю рівномірно наближене скінченновимірними неперервними відображеннями множини K в себе.

Доведення. Нехай g_ε – функція з теореми 2. На підставі опуклості маємо $g_\varepsilon(K) \subset K$. Неважко зауважити, що композиція $g_\varepsilon \circ f\colon K \to K$ – це скінченновимірне неперервне відображення, що наближає f з точністю до ε :

$$\sup_{x\in K} \|g_\varepsilon(f(x)) - f(x)\| \leqslant \sup_{y\in K} \|g_\varepsilon(y) - y\| \leqslant \varepsilon. \qquad \square$$

Нехай X – метричний простір. Елемент $x \in X$ називається ε-нерухомою точкою відображення $f\colon X \to X$, якщо

$$\rho\left(f(x), x\right) < \varepsilon$$

Лема 1. Нехай X – компактний метричний простір. Тоді для існування у неперервного відображення $f\colon X \to X$ нерухомої точки достатньо, щоб f мало ε-нерухому точку для кожного $\varepsilon > 0$.

Доведення. Скориставшись для $\varepsilon = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ існуванням ε-нерухомої точки, одержимо послідовність $x_n \in X$ з

$$\rho\left(f(x_n), x_n\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Не зменшуючи загальності, можемо припустити, що у послідовності (x_n) існує границя (інакше замінимо (x_n) збіжною підпослідовністю). Позначимо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ через x. Тоді $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ і $\rho\left(f(x), x\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \rho\left(f(x_n), x_n\right) = 0$.

Тобто $f(x) = x$, і x – це шукана нерухома точка. $\square$

Лема 2. Нехай Y – нормований простір, $K \subset Y$ – опуклий компакт і $f\colon K \to K$ – неперервне скінченновимірне відображення. Тоді f має нерухому точку.

Доведення. Введемо позначення $X = \operatorname{Lin} f(K)$, $\tilde{K} = X \cap K$. Тоді X – скінченновимірний нормований простір, $\tilde{K} \subset X$ – опуклий компакт і $f(\tilde{K}) \subset f(K) \subset X \cap K = \tilde{K}$. За теоремою Брауера, відображення f має нерухому точку в $\tilde{K}$. Ця нерухома точка буде лежати і в K. $\square$

Принцип Шаудера. (J. Schauder) Кожний опуклий компакт в нормованому просторі має властивість нерухомої точки.
https://en.wikipedia.org/wiki/Juliusz_Schauder
Доведення. Нехай Y – нормований простір, $K \subset Y$ – опуклий компакт і $f\colon K \to K$ – неперервне відображення. За з лемою 1, достатньо довести, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ у f є ε-нерухома точка. Скориставшись теоремою 3, знайдемо таке скінченновимірне неперервне відображення $f_\varepsilon\colon K \to K$, що $\rho\left(f(x), f_\varepsilon(x)\right) < \varepsilon$ для всіх $x \in K$. За лемою 2 у відображення f_ε є нерухома точка. Ця нерухома точка x_ε відображення f_ε для вихідного відображення f є ε-нерухомою точкою:

$$\rho\left(x_\varepsilon, f(x_\varepsilon)\right) = \rho\left(f_\varepsilon(x_\varepsilon), f(x_\varepsilon)\right) < \varepsilon. \qquad \square$$