Теорія міри і інтеграла
Тема 5: Вимірні функції
Лекція 14

Володимир Кадець

ХНУ ім. В.Н.Каразіна

Харків, 2020

Зміст лекції

У теорії міри й інтеграла вивчаються, насамперед, дійснозначні функції. Щоб уникнути непотрібних повторів, домовимось, якщо не обумовлено інше, термін «функція» використовувати для функцій, які набувають дійсних значень. Якщо ми говоримо «функція f на Ω», маємо на увазі функцію f, що діє з Ω в $\mathbb{R}$. Для тих функцій, область значень яких не лежить в $\mathbb{R}$, використовуватимемо термін «відображення».

Операції над функціями розумітимемо в поточковому сенсі. Скажімо, f_1+f_2 – це функція, задана на Ω рівністю $(f_1+f_2)(t) = f_1(t)+f_2(t)$, функція $\max\{f,g\}$ означається як $\max\{f,g\}(t) = \max\{f(t),g(t)\}$ і т. д. Границю послідовності функцій, суму ряду також розуміємо як поточкову.

У цьому підрозділі (Ω, Σ) – множина і задана на ній σ-алгебра. Всі функції, якщо не обумовлене протилежне, вважаються визначеними на Ω; елементи σ-алгебри Σ називаються вимірними підмножинами.

Нехай (Ω_1, Σ_1) і (Ω_2, Σ_2) – множини і задані на них σ-алгебри підмножин. Відображення $f\colon \Omega_1 \to \Omega_2$ називається вимірним, якщо $f^{-1}(A) \in \Sigma_1$ для будь-якого $A \in \Sigma_2$.

Як бачимо з означення, вимірні відображення виконують таку саму роль в теорії міри, як неперервні – в теорії топологічних просторів. Частковий випадок вимірного відображення – це вимірна функція.

Функція f на Ω називається вимірною (детальніше: вимірною по відношенню до σ-алгебри Σ), якщо для будь-якої борелевої підмножини A в $\mathbb{R}$ множина $f^{-1}(A)$ вимірна.

Теорема 1. Нехай (Ω_1, Σ_1) і (Ω_2, Σ_2) – множини із заданими на них σ-алгебрами підмножин, Λ – сім'я підмножин в Ω_2, яка породжує σ-алгебру Σ_2. Для того, щоб відображення $f\colon \Omega_1 \to \Omega_2$ було вимірним, необхідно і достатньо, щоб для будь-якої множини $A \in \Lambda$ її прообраз $f^{-1}(A)$ належав до σ-алгебри Σ_1.

Доведення. Якщо відображення f вимірне, то прообраз будь-якої $A \in \Sigma_2$ лежить в Σ_1. Зокрема, в Σ_1 лежать прообрази всіх $A \in \Lambda$.

Навпаки, нехай Σ_1 містить всі множини вигляду $f^{-1}(A)$ для $A \in \Lambda$. Потрібно довести, що прообрази всіх елементів системи Σ_2 лежать в Σ_1. Для цього означимо таку сім'ю Λ_1 підмножин множини Ω_2: множина A є елементом сім'ї Λ_1, якщо $f^{-1}(A) \in \Sigma_1$. Легко бачити, що Λ_1 утворює σ-алгебру множин і містить всі елементи сім'ї Λ. Оскільки Σ_2 – це найменша σ-алгебра множин, яка містить Λ, звідси випливає, що $\Sigma_2 \subset \Lambda_1$, що й потрібно було довести. □

Нехай $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ – деяка функція, $a \in \mathbb{R}$. Позначимо $f^{-1}\left((a, +\infty)\right)$ через $f_{>a}$, тобто $f_{>a}$ – це множина тих $t \in \Omega$, де $f(t) > a$. Оскільки множини вигляду $(a, +\infty)$, $a \in \mathbb{R}$ в сукупності породжують σ-алгебру $\mathfrak{B}$ борелевих множин на осі, отримуємо такий зручний

Критерій вимірності. Функція $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ вимірна тоді і тільки тоді, коли всі множини $f_{>a}$, $a \in \mathbb{R}$, вимірні.

Добуток σ-алгебр (на дошці).

Теорема 2. Нехай (Ω, Σ), (Ω_1, Σ_1) і (Ω_2, Σ_2) – множини із заданими на них σ-алгебрами підмножин. Наділимо, як звичайно, декартів добуток $\Omega_1 \times \Omega_2$ σ-алгеброю $\Sigma_1 \otimes \Sigma_2$. Тоді для будь-яких вимірних відображень $f_1 \colon \Omega \to \Omega_1$ і $f_2 \colon \Omega \to \Omega_2$ відображення $f \colon \Omega \to \Omega_1 \times \Omega_2$, яке діє за правилом $f(t) = (f_1(t), f_2(t))$, також вимірне.

Доведення. За означенням, σ-алгебра $\Sigma_1 \otimes \Sigma_2$ породжена множинами вигляду $A_1 \times A_2$, де $A_1 \in \Sigma_1$, $A_2 \in \Sigma_2$. Маємо

$$f^{-1}(A_1 \times A_2) = f_1^{-1}(A_1) \cap f_2^{-1}(A_2) \in \Sigma.$$

$\square$

Взявши за Ω топологічний простір, а за Σ – σ-алгебру $\mathfrak{B}$ борелевих множин на Ω, отримуємо частковий випадок вимірності – вимірність за Борелем:

Функція f на топологічному просторі Ω називається вимірною за Борелем, якщо прообраз $f^{-1}(A)$ будь-якої борелевої множини A дійсної осі знову є борелевою множиною.

Будь-яка неперервна функція є вимірною за Борелем. Справді, для неперервної функції f всі множини $f_{>a}$ відкриті, а відтак, належать до σ-алгебри $\mathfrak{B}$ борелевих множин, тобто виконується наведений вище критерій вимірності.

Для довільної множини $A \in \Sigma$ можна розглянути σ-алгебру Σ_A всіх вимірних підмножин множини A. Якщо обмеження функції f на підмножину A вимірне щодо σ-алгебри Σ_A, то функцію називають вимірною на підмножині A.

Вправи

14.1. Якщо функція f вимірна, то для будь-якого $a \in \mathbb{R}$ вимірні множини $f_{\neq a} = \{t \in \Omega : f(t) \neq a\}$, $f_{=a} = \{t \in \Omega : f(t) = a\}$, $f_{\leqslant a} = \{t \in \Omega : f(t) \leqslant a\}$, $f_{<a} = \{t \in \Omega : f(t) < a\}$ і $f_{\geqslant a} = \{t \in \Omega : f(t) \geqslant a\}$.

14.2. Нехай f – вимірна за Борелем функція на відрізку $[a, b]$. Тоді множина точок максимуму функції f – борелева множина.

14.3. Множина точок локального максимуму борелевої функції на осі – борелева множина.

14.4. Нехай (Ω_1, Σ_1) і (Ω_2, Σ_2) – множини із заданими на них σ-алгебрами підмножин, і $\Omega_1 \times \Omega_2$ наділена σ-алгеброю $\Sigma_1 \otimes \Sigma_2$. Доведіть вимірність координатних проекторів P_1 і P_2, які ставлять елементу $(t_1, t_2) \in \Omega_1 \times \Omega_2$ координати t_1 і t_2 відповідно.

Теорема 3. Нехай (Ω_1, Σ_1), (Ω_2, Σ_2) і (Ω_3, Σ_3) – множини із заданими на них σ-алгебрами підмножин, відображення $f\colon \Omega_1 \to \Omega_2$ і $g\colon \Omega_2 \to \Omega_3$ вимірні. Тоді композиція $g \circ f\colon \Omega_1 \to \Omega_3$ також є вимірним відображенням.

Доведення. Нехай $A \in \Sigma_3$. Тоді $g^{-1}(A) \in \Sigma_2$, і, отже, $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}\left(g^{-1}(A)\right) \in \Sigma_1$. □

Наслідок.

1. Нехай функція $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ вимірна, а $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ вимірна за Борелем. Тоді композиція $g \circ f$ цих функцій також вимірна.
2. Якщо $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ вимірна, а $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ неперервна, то $g \circ f$ вимірна.
3. Нехай функція $f_1, f_2\colon \Omega \to \mathbb{R}$ вимірні, а функція двох змінних $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ неперервна. Тоді функція $f(t) = g(f_1(t), f_2(t))$ вимірна.

Теорема 4. Клас вимірних функцій на (Ω, Σ) має такі властивості: якщо функції f і g вимірні, то вимірними є функції $f+g$, fg, $\max\{f, g\}$, і $\min\{f, g\}$. Також вимірні функції $|f|$, $\operatorname{sign} f$, $f^+ = \max\{f, 0\}$, $f^- = (-f)^+$ і λf при будь-якому $\lambda \in \mathbb{R}$. Якщо f ніде не перетворюється в нуль, то вимірною є функція $1/f$.