Теорія міри і інтеграла
Тема 4: Міри на відрізку і на осі
Лекція 13

Володимир Кадець

ХНУ ім. В.Н.Каразіна

Харків, 2020

Зміст лекції

Тонка задача теорії міри. Існування невимірних за Лебегом множин

Функція розподілу і загальний вигляд борелевої міри на відрізку

σ-скінченні міри і міра Лебега на осі

Тонка задача теорії міри полягає в побудові σ-адитивної міри μ з $\mu([0,1]) = 1$, визначеної на сім'ї всіх підмножин відрізка $[0,1]$ та інваріантної щодо зсувів: якщо як множина A, так і її зсув $A+t$ лежать на відрізку, то $\mu(A) = \mu(A+t)$. У цьому підрозділі буде доведено нерозв'язність цієї задачі, тобто, що не існує міри з такими властивостями. Конструкція, яку ми наводимо, належить Віталі (G. Vitali).

Міркування будуть природними. Припустимо існування такої міри μ, вивчимо її властивості і прийдемо в результаті до протиріччя.

Спочатку зазначимо, що міра будь-якої одноточкової множини дорівнює 0. Справді, точки отримуються одна з одної зсувами, отже, їх міри однакові і дорівнюють деякому числу α. Якщо б α було строго більшим за нуль, то міра всього відрізка була б нескінченною, адже на відрізку нескінченно багато точок. Отже, $\alpha = 0$. Тому ми можемо ототожнити точки 0 і 1: на мірах множин це не відіб'ється. Отож відрізок можна уявляти собі згорнутим у коло.

Введемо на відрізку операцію $+_1$ суми за модулем 1: $a +_1 b$ дорівнює дробовій частині числа $a + b$. На колі цій операції відповідає поворот точки $2\pi a$ проти годинникової стрілки на кут $2\pi b$.

Якщо $A \subset [0,1]$, $t \in [0,1]$, то замість звичайного зсуву $A + t$ зручніше розглядати зсув $A +_1 t$, який відповідає повороту на колі, оскільки тут не потрібно стежити, чи не випала частина множини за межі відрізка. Вочевидь, $\mu(A) = \mu(A +_1 t)$, оскільки $A +_1 t = (A \cap [0, 1-t) + t) \bigsqcup (A \cap [1-t, 1] + t - 1)$, тобто множина A розбивається на дві частини, одна з яких переноситься ліворуч, а інша праворуч по відрізку $[0,1]$.

Введемо на $[0,1]$ таке відношення еквівалентності: $a \sim b$, якщо $a - b \in \mathbb{Q}$ (через $\mathbb{Q}$, як звичайно, позначається множина раціональних чисел). У кожному класі еквівалентності виберемо по одному елементу. Одержану множину вибраних елементів позначимо літерою E.

Зазначимо, що всі множини $E +_1 t$, $t \in \mathbb{Q} \cap [0,1)$ попарно не перетинаються. Справді, якщо $E +_1 t$ перетинається з $E +_1 \tau$ в точці x, $t, \tau \in \mathbb{Q} \cap [0,1)$, то елементи $x -_1 t$ і $x -_1 \tau$, які лежать в одному класі еквівалентності, обидва належать до E, що неможливо за побудовою. Множин вигляду $E +_1 t$ нескінченно багато, вони отримуються одна з одної зсувами і диз'юнктні, отже, їхні міри однакові і дорівнюють нулю. Але

$$[0,1] = \bigcup_{t \in \mathbb{Q} \cap [0,1)} (E +_1 t), \text{ тому, } \mu([0,1]) = 0.$$

Суперечність. $\square$

Теорема. Існують невимірні за Лебегом підмножини відрізка $[0, 1]$.

Доведення. Якщо б всі підмножини відрізка були вимірні за Лебегом, то міра Лебега була б інваріантною щодо зсувів σ-адитивною ймовірнісною мірою, визначеною на сім'ї всіх підмножин відрізка $[0, 1]$. Ми щойно довели, що міри з такими властивостями не існує. □

Борелевою мірою на топологічному просторі X називається зліченно-адитивна міра, задана на σ-алгебрі всіх борелевих підмножин простору X. Скажімо, обмеження міри Лебега на систему борелевих підмножин відрізка $\Omega = [\omega_1, \omega_2]$ є борелевою мірою на відрізку. У цьому параграфі ми встановимо взаємно-однозначну відповідність між борелевими мірами на відрізку і зростаючими неперервними справа функціями на цьому відрізку.

Нехай μ – борелева міра на відрізку $\Omega = [\omega_1, \omega_2]$. Функцією розподілу міри μ називається функція $F : \Omega \to \mathbb{R}^+$, яка визначається рівністю $F(t) = \mu([\omega_1, t])$.

Теорема 1. Функція розподілу борелевої міри на відрізку – це (нестрого) зростаюча неперервна справа функція.

Доведення. Якщо $\omega_1 \leqslant a < b \leqslant \omega_2$, то $[\omega_1, a] \subset [\omega_1, b]$, і, відповідно,

$$F(a) = \mu([\omega_1, a]) \leqslant \mu([\omega_1, b]) = F(b).$$

Перейдемо до доведення неперервності справа. Нехай $t_n \in \Omega$ – спадна послідовність, яка прямує до t. Тоді $[\omega_1, t_n]$ – це спадна послідовність множин, і $[\omega_1, t] = \bigcap_{n=1}^{\infty} [\omega_1, t_n]$. Отже,

$$F(t) = \mu([\omega_1, t]) = \lim_{n\to\infty} \mu([\omega_1, t_n]) = \lim_{n\to\infty} F(t_n). \qquad \square$$

Теорема 2. Нехай $F : \Omega \to \mathbb{R}^+$ – зростаюча неперервна справа функція на відрізку $\Omega = [\omega_1, \omega_2]$. Тоді існує єдина борелева міра μ на $[\alpha, \beta]$, для якої F є функцією розподілу.

Доведення. Міркування проводимо за аналогією з побудовою міри Лебега. Нехай Φ – півкільце всіх підвідрізків відрізка Ω. Визначимо міру μ на Φ такими рівностями:
$\mu([\omega_1, a]) = F(a)$, $\mu([a, b]) = F(b) - F(a - 0)$ при $a > \omega_1$ (ці дві формули об'єднуються в одну, якщо домовитись, що $F(\omega_1 - 0) = 0$);
$\mu((a, b]) = F(b) - F(a)$,
$\mu((a, b)) = F(b - 0) - F(a)$,
$\mu([a, b)) = F(b - 0) - F(a - 0)$.

Ці співвідношення вибрані не випадково: саме так повинні бути пов'язані борелева міра та її функція розподілу. Скінченна адитивність так побудованої міри перевіряється легко. Для перевірки зліченної напівадитивності (звідки випливатиме і зліченна адитивність) треба спочатку зауважити, що міра будь-якого підвідрізка збігається із супремумом мір замкнених підвідрізків, які містяться в ньому, і з інфімумом мір відкритих підвідрізків, які його містять. Далі потрібно використати лему про скінченне покриття у такий самий спосіб, як це робилося при доведенні теореми про зліченну напівадитивність міри Лебега на Φ. Для завершення доведення залишається скористатись теоремою існування і єдиності продовження міри з півкільця з одиницею на породжену ним σ-алгебру. $\square$

У багатьох задачах доцільно вважати, що міра приймає не тільки скінченні додатні значення, але й на певних множинах і значення $+\infty$. Одним із таких узагальнень є поняття σ-скінченної міри.

Означення. Нехай Σ – σ-алгебра підмножин множини Ω. Відображення $\mu\colon \Sigma \to [0, +\infty]$ називається σ-скінченною мірою, якщо воно задовольняє такі аксіоми:

1. Зліченна адитивність: $\mu\left(\bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$ для будь-яких $A_k \in \Sigma$.
2. σ-скінченність: уся Ω зображується у вигляді $\Omega = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, де $A_k \in \Sigma$ і $\mu(A_k) < \infty$.

Типовий приклад σ-скінченної міри – це міра Лебега на осі.

Означення. Множина $A \subset \mathbb{R}$ називається вимірною за Лебегом, якщо її перетин з будь-яким скінченним відрізком вимірний за Лебегом як підмножина цього відрізка. Міра Лебега множини A визначається через міри його перетину зі скінченними відрізками:

$$\lambda(A) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \lambda(A \cap [n, n+1)).$$

Трійка (Ω, Σ, μ), де Ω – множина із заданою на ній σ-алгеброю Σ, а μ – σ-скінченна міра на Σ, називається простором зі σ-скінченною мірою. Звичайний простір із мірою називають ще простором зі скінченною мірою, якщо потрібно підкреслити його скінченність.

Вправи

13.1. Вимірні за Лебегом підмножини дійсної осі утворюють σ-алгебру, а міра Лебега на осі – це σ-скінченна міра.
13.2. Кожна борелева множина на осі вимірна за Лебегом.
13.3. Для вимірної підмножини дійсної осі застосовні такі формули обчислення міри Лебега:

$$\lambda(A) = \lim_{n,m\to\infty} \lambda(A \cap [-n, m]) = \lim_{n\to\infty} \lambda(A \cap [-n, n]).$$

13.4 Міра Лебега відкритої множини на осі дорівнює сумі довжин відрізків, що утворюють її.
13.5. Міра Лебега вимірної за Лебегом множини A на осі збігається з її зовнішньою мірою $\lambda^*(A) = \inf \{\lambda(B) : B$ відкрита, $B \supset A\}$.

13.6. Кожна вимірна за Лебегом підмножина осі зображувана як об'єднання борелевої множини і множини міри нуль.
13.7. Нехай M – деяка індексна множина, $(\Omega_n, \Sigma_n, \mu_n)$, $n \in M$ – простори зі скінченною мірою і Ω_n попарно не перетинаються. Покладемо $\Omega = \bigcup_{n \in M} \Omega_n$, σ-алгебру Σ означимо як сім'ю всіх множин вигляду $A = \bigcup_{n \in M} A_n$, $A_n \in \Sigma_n$, і покладемо $\mu(A) = \sum_{n \in M} \mu(A_n)$. За якої умови (Ω, Σ, μ) буде простором зі σ-скінченною мірою? Простором зі скінченною мірою?
13.8. Нехай (Ω, Σ, μ) – простір зі σ-скінченною мірою. Тоді для будь-якої зростаючої послідовності A_n вимірних множин $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{k \to \infty} \mu\left(A_k\right)$.

13.9. Для скінченних мір ми зазначали таку властивість: якщо $A_n, \in \Sigma$, $n = 1, 2, \ldots,$ – спадний ланцюжок множин (тобто $A_1 \supset A_2 \supset \ \ldots\ \supset A_n \supset \ \ldots$), то $\mu\left(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim\limits_{k\to\infty} \mu\left(A_k\right)$.
Покажіть на прикладі міри Лебега на осі, що для σ-скінченних мір це твердження неправильне: існує спадний ланцюжок вимірних множин A_n з $\lambda(A_n) = +\infty$ і $\lambda\left(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k\right) = 0$, тобто

$$\lambda\left(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k\right) \neq \lim\limits_{k\to\infty} \mu\left(A_k\right).$$

Проте за умови скінченності мір множин A_n твердження правильне і в просторах із σ-скінченною мірою.