

Теоретична задача. Дослідити на збіжність числові ряди:

$$a) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n} \quad ; \quad b) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}.$$

Γ -функція Ейлера

$$\Gamma(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{+\infty} t^{x-1} \cdot e^{-t} dt, \quad x \in (0, +\infty).$$

Якщо $x \in (0, 1)$, то $x-1 < 0$, тобто т. 0 є особливою точкою.

Властивості Γ -функції

$$\begin{aligned} 1. \quad \Gamma(1) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_0^{+\infty} = \\ &= -(\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t} - 1) = -(0 - 1) = 1. \end{aligned}$$

2. Формула зшукання (функціональне рівняння для Γ -функції).

$$\Gamma(x+1) = x \Gamma(x), \quad x \in (0, +\infty).$$

Доведення. $\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt =$ 2

$$= \left[\begin{array}{l} u = t^x \\ dv = e^{-t} dt \\ v = -e^{-t} \end{array} \right] = -t^x \cdot e^{-t} \Big|_0^{+\infty} + x \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt =$$

$$= - \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^x}{e^t} - 0 \right) + x \cdot \Gamma(x) = x \Gamma(x).$$

3. Зв'язок з факторіалом: $\Gamma(n+1) = n!$

Доведення. $\Gamma(n+1) = n \Gamma(n) =$
 $= n \Gamma((n-1)+1) = n \cdot (n-1) \Gamma(n-1) = \dots =$
 $= n! \Gamma(1) = n!.$

4. $\Gamma \in C^\infty(0, +\infty)$ і $\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \ln^k t \cdot e^{-t} dt$

для всіх $x \in (0, +\infty)$ і $k \in \mathbb{N}$. Зокрема,

$$\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \ln t \cdot e^{-t} dt,$$

$$\Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \ln^2 t \cdot e^{-t} dt, \quad x \in (0, +\infty).$$

5. Γ є строго опуклою на $(0, +\infty)$
 (оскільки $\Gamma''(x) > 0, x \in (0, +\infty)$).

3

6. $\exists x_0 \in (1, 2) : \Gamma$ спадає на $(0, x_0]$
і зростає на $[x_0, +\infty)$.

Доведення - теоретична задача!

(використати той факт, що $\Gamma(2) = 1! = 1$,
тобто $\Gamma(1) = \Gamma(2)$, і нерівність $\Gamma''(x) > 0$).

7. $\Gamma(x) \sim \frac{1}{x}$ при $x \rightarrow +0$.

Доведення. $\Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$. Тому

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x} \sim \frac{1}{x} \text{ при } x \rightarrow +0, \text{ оскільки}$$

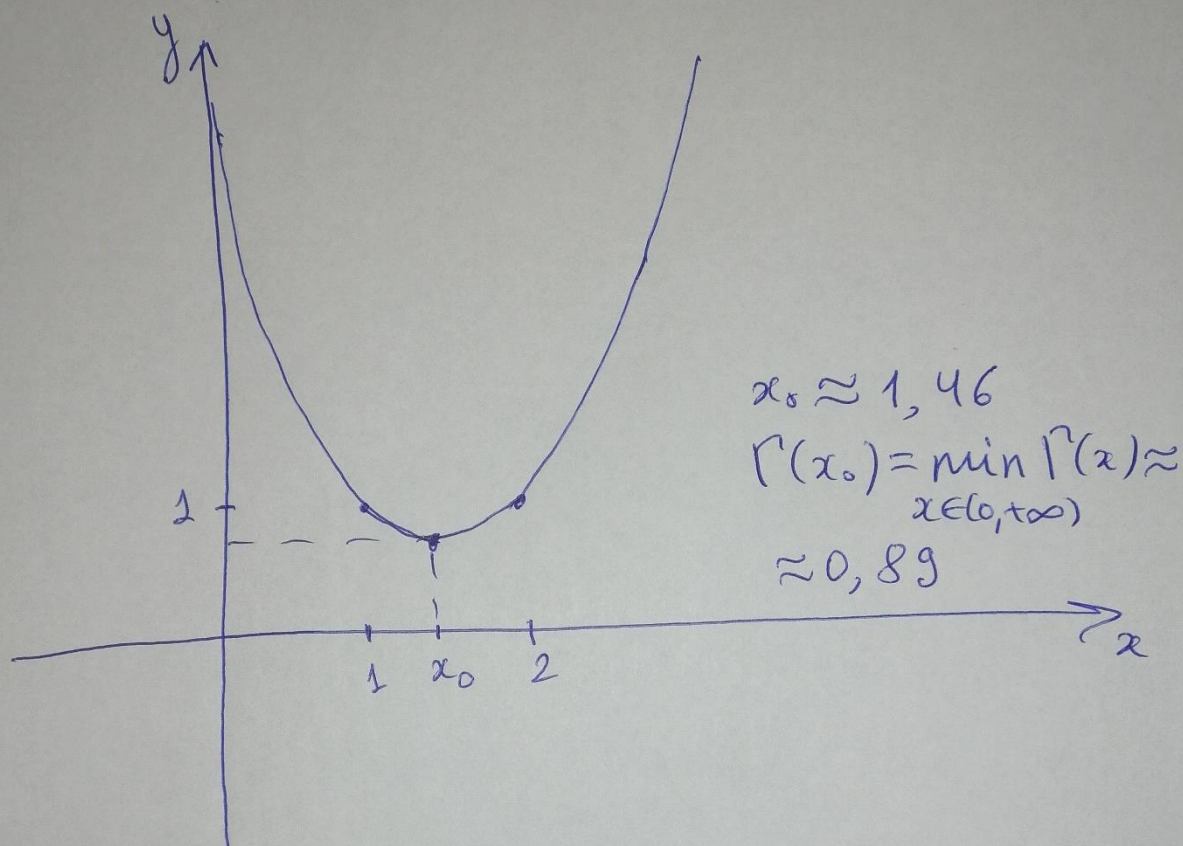
$$\Gamma(x+1) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \Gamma(1) = 1.$$

8. $\Gamma(x+1) \sim \sqrt{2\pi x} \cdot \left(\frac{x}{e}\right)^x$ при $x \rightarrow +\infty$

(формула Стірлінга).

Зокрема, $n! \sim \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Графік Γ -функції



9. Формула зповнення

$$\Gamma(x) \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}, \quad x \in (0, 1).$$

Приклад. $\Gamma(\frac{1}{2}) = ?$

$$\Gamma(\frac{1}{2})^2 = \Gamma(\frac{1}{2}) \cdot \Gamma(1 - \frac{1}{2}) = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{2}} = \pi,$$

тобто $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}.$

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \boxed{5}$$

Тогда $\frac{1}{2}! = \Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$

10. Γ -функция для отрицательных значений.

Если $x < 0$. Тогда интеграл $\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$

расходится, поскольку $t^{x-1} e^{-t} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} t^{x-1} =$

$$= \frac{1}{t^{1-x}} \quad ; \quad \int_0^1 \frac{dt}{t^{1-x}} = +\infty, \text{ поскольку}$$

$1-x > 1$, если $x < 0$.

Если теперь $x \in (-1, 0)$. Тогда

$$x+1 > 0. \quad \Gamma(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Gamma(x+1)}{x}.$$

Если $x \in (-2, -1)$, то $x+1 \in (-1, 0)$ и

$$\Gamma(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Gamma(x+1)}{x}.$$

...

Пример. $\left(-\frac{3}{2}\right)! = \Gamma\left(-\frac{3}{2} + 1\right) = \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) =$

$$= \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2} + 1\right)}{-\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{-\frac{1}{2}} = -2\sqrt{\pi}.$$

Теоретична задача : знайти інтеграл

Ейлера-Пуассона за допомогою

Γ -функції

(в інтегралі $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ зробити відповідну заміну змінної).

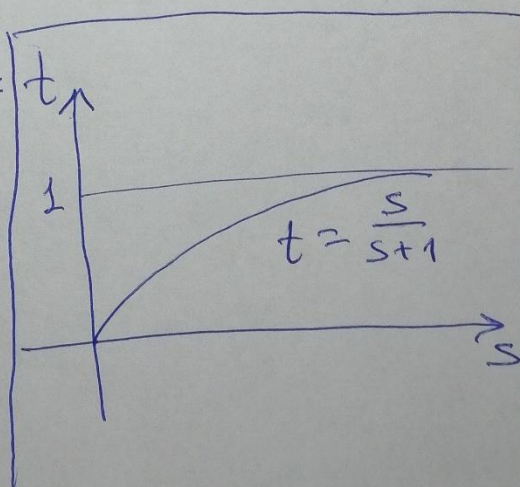
1.1. Зв'язок з B -функцією.

$$B(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^1 t^{x-1} \cdot (1-t)^{y-1} dt, \quad x, y > 0.$$

$$\int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt = \left[\begin{array}{l} t = \frac{s}{s+1} = 1 - \frac{1}{s+1} \\ dt = \frac{ds}{(s+1)^2} \end{array} \right] =$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{s^{x-1}}{(s+1)^{x-1}} \left(\frac{1}{s+1} \right)^{y-1} \frac{ds}{(s+1)^2} =$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{s^{x-1} ds}{(s+1)^{x+y}}.$$



$$\Rightarrow B(x, y) = \int_0^{+\infty} \frac{s^{x-1} ds}{(s+1)^{x+y}}, \quad x, y > 0.$$

Теорема. $B(x, y) = \frac{\Gamma(x) \cdot \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$.

(доведения за допомогою Теоремі Фубіні).

Ідея доведення формули доповнення

$$\begin{aligned} \Gamma(x) \Gamma(1-x) &= \frac{\Gamma(x) \Gamma(1-x)}{\Gamma(x+(1-x))} = \\ &= B(x, 1-x) = \int_0^{+\infty} \frac{s^{x-1}}{s+1} ds, \quad x \in (0, 1) \end{aligned}$$

1-й крок : $x \in \mathbb{Q}$, $x = \frac{k}{m}$, $k, m \in \mathbb{N}$ ($k < m$)

$$\int_0^{+\infty} \frac{s^{\frac{k}{m}-1}}{s+1} ds = \int_0^{+\infty} \frac{s^{\frac{k-m}{m}}}{s+1} ds =$$

$$= \left[\begin{array}{l} t = s^{\frac{1}{m}}, s = t^m \\ ds = m t^{m-1} dt \end{array} \right] =$$

$$= m \int_0^{+\infty} \frac{t^{k-m} \cdot t^{m-1} dt}{t^m + 1} = m \int_0^{+\infty} \frac{t^{k-1} dt}{t^m + 1}.$$

$$t^m + 1 = 0, \quad t^m = -1,$$

$$t_j = \cos \frac{\pi + 2\pi j}{m} + i \sin \frac{\pi + 2\pi j}{m}, \quad j = 0, \dots, m$$

Далі - представлення $t^m + 1$ у вигляді добутку лінійних та квадратних множених з дійсними коефіцієнтами, Потім - представлення раціональної функції $R(t) = \frac{t^{k-1}}{t^m + 1}$ у вигляді суми простих дробів (див. Фуксеном, т. II, розділ 496).

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{s^{\frac{k}{m}-1}}{s+1} ds = \frac{\pi}{\sinh \frac{\pi k}{m}} \text{ , тобто}$$

$$\forall r \in (0, 1) \cap \mathbb{Q} : \int_0^{+\infty} \frac{s^{r-1}}{s+1} ds = \frac{\pi}{\sinh \pi r}.$$

$$\text{Нехай } g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{s^{x-1}}{s+1} ds, \quad x \in (0, 1).$$

Можна довести, що функція g є неперервною на $(0, 1)$. Оскільки

$$g(r) = \frac{\pi}{\sinh \pi r} \quad \forall r \in (0, 1) \cap \mathbb{Q}, \text{ то}$$

$$g(x) = \frac{\pi}{\sinh \pi x} \quad \forall x \in (0, 1), \text{ тобто}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{s^{x-1}}{s+1} ds = \frac{\pi}{\sinh \pi x}, \quad x \in (0, 1).$$

$$\text{Тому } \Gamma(x) \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sinh \pi x}, \quad x \in (0, 1).$$

12. Формула Ейлера - Гаусса

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \cdot n^x}{x \cdot (x+1)(x+2) \cdots (x+n)}$$

$$x > 0.$$

Теоретична задача. Знайти $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x dx}{x^2+1}$

(замітити у вузлах)

$$\int_0^1 \frac{\ln x dx}{x^2+1} + \int_1^{+\infty} \frac{\ln x dx}{x^2+1}$$

і в одному з інтегралів зробити від-
повідну заміну змінної).

