Додаткові розділи функціонального аналізу

Лекція 4

Володимир Кадець

ХНУ ім. В.Н.Каразіна

Харків, 2020

Топологічний простір X має властивість нерухомої точки, якщо будь-яка неперервна функція $f\colon X \to X$ має принаймні одну нерухому точку.

Приклад 1. Відрізок $[0, 1]$ має властивість нерухомої точки.

Приклад 2. Коло (без внутрішності) на площині не має властивості нерухомої точки. За відображення без нерухомих точок можна взяти, скажімо, центральну симетрію кола.
Найважливіший клас прикладів надає така теорема Брауера.

Теорема. Кожний опуклий компакт у скінченновимірному нормованому просторі має властивість нерухомої точки.

Теорема 1. Якщо X гомеоморфний простору з властивістю нерухомої точки, то X сам має цю властивість.

(доведення на дошці)

У теорії топологічних просторів аналогом поняття доповнювального підпростору є поняття ретракта. Підпростір Y топологічного простору X називається ретрактом, якщо існує таке неперервне відображення $P\colon X \to Y$ (яке називається ретракцією), що $Py = y$ для всіх $y \in Y$.

Теорема 2. Кожен ретракт топологічного простору з властивістю нерухомої точки сам має властивість нерухомої точки.

(доведення на дошці)

Сімплекси (на дошці).