Теорія міри і інтеграла
Тема 4: Міри на відрізку і на осі
Лекція 12

Володимир Кадець

ХНУ ім. В.Н.Каразіна

Харків, 2020

Зміст лекції

Основна мета сьогоднішньої лекції – це доведення анонсованої раніше теореми Лебега, що кожна монотонна на відрізку функція диференційовна майже скрізь.

Ми розповідатимемо доведення у формі, запропонованій Фредеріком Рісом
https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Riesz/

Означення. Нехай g – дійсна функція, задана на відрізку $\Omega = [\omega_1, \omega_2]$. Внутрішня точка x відрізка Ω називається невидимою справа для функції g, якщо існує таке $t > x$, $t \in \Omega$, що $g(x) < g(t)$.

Лема 1 (лема Ф. Ріса про світлотінь). (F. Riesz) Нехай g – напівнеперервна зверху функція на Ω. Тоді множина A всіх точок, невидимих справа для функції g, відкрита. Більше того, якщо A записати канонічним способом як диз'юнктне об'єднання підвідрізків $\Delta_k = (a_k, b_k)$, то $g(a_k + 0) \leqslant g(b_k)$. (Під $g(a_k + 0)$ розуміємо верхню границю функції $g(t)$ при $t \to a_k + 0$.)

Доведення. Якщо x_0 – невидима справа, $t_0 > x_0$ і $g(x_0) < g(t_0)$, то у x_0 є цілий окіл, де $g(x) < g(t_0)$. Увесь цей окіл буде складатись із точок, невидимих справа. Отже, A – відкрита множина. Нехай тепер $\Delta = (a, b)$ – один із відрізків, який є компонентою A, тобто $(a, b) \subset A$, $a, b \notin A$. Припустимо, що твердження неправильне, тобто $g(a + 0) > g(b)$. Тоді існує точка $x_0 \in \Delta$, для якої $g(x_0) > g(b)$. Розглянемо множину $D = \{x \in [x_0, b] : g(x) \geqslant g(x_0)\}$. D – це непорожня замкнена обмежена множина, $D \subset [x_0, b)$. Нехай x_1 – крайня права точка множини D. Оскільки x_1 невидима справа, в Ω знайдеться точка $t_0 > x_1$ з $g(t_0) > g(x_1)$. Зрозуміло, що t_0 не може лежати праворуч від точки b, інакше b була б також невидимою справа:

$$g(t_0) > g(x_1) \geqslant g(x_0) > g(b).$$

Отже, $t_0 \in (x_1, b)$. Але тоді $t_0 \in D$, тобто x_1 – це не крайня права точка множини D. Суперечність. $\square$

Зазначимо, що за симетрією аналогічне твердження правильне для точок, невидимих зліва (точка x невидима зліва, якщо існує $t < x$, $t \in \Omega$, для якого $g(x) < g(t)$), тільки в кінцях інтервалів, що утворюють множину точок, невидимих зліва, буде правильною протилежна нерівність $g(a_k) \geqslant g(b_k - 0)$:

Наслідок. Нехай g – напівнеперервна зверху функція на Ω. Тоді множина A всіх точок, невидимих зліва для функції g, відкрита. Більше того, якщо A записати канонічним способом як диз'юнктне об'єднання підвідрізків $\Delta_k = (a_k, b_k)$, то $g(a_k) \geqslant g(b_k - 0)$.

Лема 2 (критерій нехтуванності). Нехай множина $A \subset \Omega$ має таку властивість: існує таке $\theta \in (0,1)$, що $\lambda^*(A \cap (a,b)) \leqslant \theta(b-a)$ для будь-якого підвідрізка $(a,b) \subset \Omega$. Тоді A нехтувана.

Доведення. Нехай $B = \bigsqcup\limits_{k \in M} \Delta_k$ – довільна відкрита множина, яка містить A, Δ_k – відкриті підвідрізки, з яких складається ця множина (скінченна або зліченна кількість). Згідно з умовою,

$$\lambda^*(A) \leqslant \sum_{k \in M} \lambda^*(A \cap \Delta_k) \leqslant \theta \sum_{k \in M} \lambda(\Delta_k) = \theta\lambda(B).$$

Переходячи до інфімума по всіх таких B, одержуємо нерівність $\lambda^*(A) \leqslant \theta\lambda^*(A)$, яка може виконуватись тільки при $\lambda^*(A) = 0$. $\square$

Перед початком доведення основної теореми ще кілька вступних зауважень. Термін «зростаюча функція» використовуватимемо в тому ж значенні, що й «неспадна функція», тобто не вимагатимемо строгого зростання. Теорему достатньо довести для зростаючих функцій: спадні одержуються множенням на мінус одиницю. Нехай $\Omega = [\omega_1, \omega_2]$, $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ – зростаюча функція. Для будь-якої внутрішньої точки x відрізка Ω означимо чотири величини, скінченні або $+\infty$:

– праве верхнє похідне число $R(x) = \overline{\lim\limits_{t \to x+0}} \dfrac{f(t) - f(x)}{t - x}$;

– праве нижнє похідне число $r(x) = \underline{\lim\limits_{t \to x+0}} \dfrac{f(t) - f(x)}{t - x}$;

– ліве верхнє похідне число $L(x) = \overline{\lim\limits_{t \to x-0}} \dfrac{f(x) - f(t)}{x - t}$;

– ліве нижнє похідне число $l(x) = \underline{\lim\limits_{t \to x-0}} \dfrac{f(x) - f(t)}{x - t}$.

Для доведення теореми треба показати, що всі перелічені похідні числа майже скрізь дорівнюють одне одному і скінченні. Для цього достатньо довести, що для будь-якої зростаючої функції f на відрізку правильні співвідношення:

$$R(x) \overset{\text{м.с.}}{<} \infty; \tag{1}$$

$$R(x) \overset{\text{м.с.}}{\leqslant} l(x). \tag{2}$$

Справді, застосувавши (2) до допоміжної функції $g(x) = -f(-x)$ і повернувшись до початкової функції, отримуємо умову $L(x) \overset{\text{м.с.}}{\leqslant} r(x)$. Зіставивши ці умови з очевидними нерівностями $r(x) \leqslant R(x)$ і $l(x) \leqslant L(x)$, одержуємо, що

$$R(x) \overset{\text{м.с.}}{\leqslant} l(x) \leqslant L(x) \overset{\text{м.с.}}{\leqslant} r(x) \leqslant R(x).$$

Теорема Лебега. Кожна монотонна на відрізку функція диференційовна майже скрізь, тобто множина точок, де функція не диференційовна, – це множина лебегової міри 0.

Доведення. Нехай $f\colon [\omega_1, \omega_2] \to \mathbb{R}$ – зростаюча функція. Оскільки у монотонної функції розриви лише першого роду, ми для зручності можемо вважати функцію напівнеперервною зверху. Для цього достатньо переозначити функцію в точках розриву, поклавши $f(t) = \overline{\lim_{x\to t}} f(x)$. Перевірте самі, що при такому переозначенні множина точок диференційовності не зміниться, а похідні числа зміняться не більш ніж в зліченній кількості точок (в точках розриву f), тобто майже скрізь залишаться тими самими.

Доведення того, що $R(x) \overset{\text{м.с.}}{<} \infty$.

Для будь-якого $C > 0$ розглянемо множину

$$R_{>C} = \{x \in (\omega_1, \omega_2) : R(x) > C\}.$$

Співвідношення $R(x) \overset{\text{м.с.}}{<} \infty$ буде доведене, якщо показати, що зовнішня міра множини R_∞ тих точок інтервала (ω_1, ω_2), де $R(x) = \infty$, дорівнює нулеві. Оскільки $R_\infty \subset R_{>C}$, достатньо встановити, що $\lambda^*(R_{>C}) \to 0$ при $C \to \infty$.

Доведення того, що $R(x) \overset{\text{м.с.}}{<} \infty$ – продовження.

Нехай $x \in R_{>C}$. Тоді існує точка $t > x$, для якої $\frac{f(t)-f(x)}{t-x} > C$, або $f(t) - Ct > f(x) - Cx$. Отже, множина $R_{>C}$ складається з точок, невидимих справа для функції $g(y) = f(y) - Cy$. За лемою про світлотінь $R_{>C}$ міститься у відкритій множині $B = \bigsqcup\limits_{k \in M} (a_k, b_k)$ з $g(a_k + 0) \leqslant g(b_k)$. Тобто,

$$b_k - a_k \leqslant \frac{1}{C}(f(b_k) - f(a_k + 0)) \leqslant \frac{1}{C}(f(b_k) - f(a_k)).$$

Доведення того, що $R(x) \overset{\text{м.с.}}{<} \infty$ – завершення.

Проміжки $(f(a_k), f(b_k))$ – це інтервали відрізка $(f(\omega_1), f(\omega_2 - 0))$, які попарно не перетинаються. Отже,

$$\lambda^*(R_{>C}) \leqslant \sum_{k\in M} (b_k - a_k) \leqslant \frac{1}{C} \sum_{k\in M} (f(b_k) - f(a_k))$$
$$\leqslant \frac{1}{C}(f(\omega_2 - 0) - f(\omega_1)).$$

Останній вираз прямує до 0 при $C \to \infty$.
Запам'ятаємо отриману нерівність

$$\lambda^*(R_{>C}) \leqslant \frac{1}{C}(f(\omega_2 - 0) - f(\omega_1)). \qquad (*)$$

Доведення того, що $R(x) \overset{\text{м.с.}}{\leqslant} l(x)$.

Позначимо через D множину тих $x \in (\omega_1, \omega_2)$, де $R(x) > l(x)$. Далі, для будь-якої пари раціональних чисел (C, c) з $0 < c < C$ через $D(C, c)$ позначимо множину тих $x \in (\omega_1, \omega_2)$, для яких $l(x) < c$ і $R(x) > C$.
Оскільки пар раціональних чисел – зліченна кількість, то й виділених множин $D(C, c)$ – зліченна кількість. Множина D – це об'єднання вказаних множин $D(C, c)$. Для доведення того факту, що множина D нехтувана, достатньо перевірити, що всі $D(C, c)$ мають нульову міру. При цій перевірці ми спиратимося на критерій нехтуванності, доведений у лемі 2, з $\theta = \frac{c}{C}$.

Отже, нехай $(a, b) \subset \Omega$ – довільний інтервал, $x \in D(C, c) \cap (a, b)$. Оскільки $l(x) < c$, існує $t \in (a, x)$, для якого $\frac{f(x)-f(t)}{x-t} < c$. Тоді $f(x) - cx < f(t) - ct$, тобто x – точка, невидима зліва для функції $g(y) = f(y) - cy$ на відрізку (a, b). Застосувавши ще раз лему про світлотінь, отримуємо, що множина $D(C, c) \cap (a, b)$ міститься у скінченному або зліченному диз'юнктному об'єднанні відрізків $(\alpha_k, \beta_k) \subset (a, b)$, $k \in N$, і на кінцях цих відрізків правильна нерівність $f(\beta_k - 0) - f(\alpha_k) \leqslant c(\beta_k - \alpha_k)$.

Нерівність $(*)$ доведено для зростаючої функції на будь-якому відрізку. Згадаємо, що $D(C, c) \subset R_{>C}$, і застосувавши умову $(*)$ до функції f на відрізку (α_k, β_k), отримуємо:

Доведення – завершення.

$$\lambda^*\left(D(C,c)\cap(\alpha_k,\beta_k)\right) \leqslant \lambda^*\left(R_{>C}\cap(\alpha_k,\beta_k)\right) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{C}\left(f(\beta_k-0)-f(\alpha_k)\right) \leqslant \frac{c}{C}(\beta_k-\alpha_k).$$

Залишається скористатись тим, що за побудовою

$$D(C,c)\cap(a,b) = \bigcup_{k\in N}\left(D(C,c)\cap(\alpha_k,\beta_k)\right),$$

а за зліченною напівадитивністю зовнішньої міри:

$$\lambda^*\left(D(C,c)\cap(a,b)\right) \leqslant \sum_{k\in N}\lambda^*\left(D(C,c)\cap(\alpha_k,\beta_k)\right) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{c}{C}\sum_{k\in N}(\beta_k-\alpha_k) \leqslant \frac{c}{C}(b-a).$$

За критерієм нехтуванності, $\lambda^*\left(D(C,c)\right)=0$.

Вправи

12.1 Наведіть приклад неперервної монотонної функції зі щільною множиною точок недиференційовності.

12.2 Доведіть вимірність за Борелем усіх множин, які наявні в доведенні теореми про диференційовність монотонної функції (множини $R_{>C}$, множини D тих $x \in (\alpha, \beta)$, де $R(x) > l(x)$, тощо).

12.3 Теорема Фубіні про диференційовність ряду (G. Fubini): якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ зростаючих функцій на відрізку збігається в кожній точці до функції f, то ряд з похідних $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ збігається майже скрізь до f'.