Функціональний аналіз II
Тема 1. Оператори у банахових просторах – загальна теорія
Лекції 3-4

Володимир Кадець

ХНУ ім. В.Н.Каразіна

Харків, 2020

Зміст лекції

Оператор $T\colon X \to Y$ називається ін'єктивним, якщо його ядро $\operatorname{Ker} T = T^{-1}(0)$ складається тільки з нуля. Оператор називається сюр'єктивним, якщо його образ $\operatorname{Im} T = T(X)$ збігається з усім простором Y. Нарешті, оператор називається бієктивним або оборотним, якщо він одночасно ін'єктивний і сюр'єктивний. Іншими словами, якщо рівняння $Tx = b$ має розв'язок при будь-якій правій частині $b \in Y$, то оператор T сюр'єктивний; якщо з розв'язності рівняння $Tx = b$ при заданій правій частині випливає єдиність розв'язку, то оператор T ін'єктивний. Отож, бієктивність означає існування і єдиність розв'язку при будь-якій правій частині.

Теорема. (S. Banach) Нехай X, Y – банахові простори, $T \in L(X, Y)$ – бієктивний оператор. Тоді оператор T^{-1} неперервний, тобто T – ізоморфізм.

Нехай X, Y – нормовані простори. Оператор $T \in L(X, Y)$ називається обмеженим знизу, якщо існує така стала $c > 0$, що $\|Tx\| \geqslant c\|x\|$ для всіх $x \in X$.

Зауваження. Кожний обмежений знизу оператор ін'єктивний. Справді, якщо $Tx = 0$ для деякого $x \in X$, то нерівність

$$0 = \|Tx\| \geqslant c\|x\|$$

означає, що $x = 0$.

Типовий приклад ін'єктивного, але не обмеженого знизу оператора – це діагональній оператор з ненульовими діагональними елементами, що прямують до нуля (на дошці).

Теорема 1. Оператор $T \in L(X, Y)$ необмежений знизу тоді і тільки тоді, коли існує послідовність $x_n \in S_X$, для якої

$$Tx_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Доведення. Якщо оператор обмежений знизу з деякою сталою $c > 0$ і $x_n \in S_X$, то на підставі нерівності $\|Tx_n\| \geqslant c\|x_n\| = c$ образи елементів x_n не можуть прямувати до нуля.
Навпаки, якщо оператор необмежений знизу, то, зокрема, він не буде обмеженим знизу з константою $c = 1/n$. Тобто для будь-якого n існує елемент y_n з $\|Ty_n\| < \frac{1}{n}\|y_n\|$. Покладемо $x_n = \frac{y_n}{\|y_n\|}$. Це і буде шуканою послідовністю: $x_n \in S_X$ і

$$\|Tx_n\| < \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Теорема 2. Оператор T буде обмеженим знизу тоді і тільки тоді, коли T здійснює ізоморфізм нормованих просторів X і $T(X)$.

Доведення. Якщо T обмежений знизу, то він ін'єктивний. Отже, як оператор, який діє з X в $T(X)$, T бієктивний. Нехай $c > 0$ – стала з означення обмеженості знизу. Тоді для будь-якого $y \in T(X)$ маємо

$$\left\|T^{-1}y\right\| \leqslant \frac{1}{c}\left\|T\left(T^{-1}y\right)\right\| = \frac{1}{c}\|y\|,$$

тобто оператор $T^{-1}\colon T(X) \to X$ неперервний.

Навпаки, якщо T – ізоморфізм просторів X і $T(X)$, то існує $T^{-1}\colon T(X) \to X$ і $\left\|T^{-1}\right\| < +\infty$. Тоді для будь-якого $x \in X$ маємо

$$\|x\| = \left\|T^{-1}\left(Tx\right)\right\| \leqslant \left\|T^{-1}\right\| \|Tx\|,$$

тобто T обмежений знизу зі сталою $c = \frac{1}{\left\|T^{-1}\right\|}$. $\square$

На підставі останньої теореми обмежені знизу оператори називають ще ізоморфними вкладеннями.

Теорема 3. Якщо X – банахів простір і оператор $T \in L(X, Y)$ обмежений знизу, то образ оператора замкнений в Y.

Доведення. За попередньою теоремою, підпростір $T(X)$ ізоморфний простору X. Отже, $T(X)$ повний, а повнота підпростору обумовлює його замкненість. □

У банахових просторах для ін'єктивних операторів справджується й обернена теорема.

Теорема 4. Якщо X, Y – банахові простори й ін'єктивний оператор $T \in L(X, Y)$ має замкнений образ, то оператор T обмежений знизу.

Доведення. Оскільки замкнений підпростір повного простору сам повний, $T(X)$ – банахів простір. За теоремою Банаха про обернений оператор, T – ізоморфізм просторів X і $T(X)$. □

Нехай X, Y – банахові простори, $T\colon X \to Y$ – неперервний лінійний оператор, взагалі кажучи, не ін'єктивний.
Ін'єктивізацією оператора T називається відображення

$$\widetilde{T}\colon X/\mathrm{Ker}\, T \to Y,$$

яке ставить у відповідність класу еквівалентності $[x]$ елемента $x \in X$ елемент Tx:

$$\widetilde{T}([x]) = Tx.$$

Тоді $T = \widetilde{T} \circ q$, де q – фактор-відображення. Оскільки $q(B_X) = B_{X/\ker T}$, то

$$\|T\| = \sup_{x \in B_X} \|Tx\| = \sup_{x \in B_X} \|\widetilde{T}(q(x))\| = \sup_{x \in B_{X/\ker T}} \|\widetilde{T}x\| = \|\widetilde{T}\|.$$

Оскільки образ ін'єктивізації збігається з образом вихідного оператора, отримуємо таке твердження.

Наслідок. Нехай X, Y – банахові простори. Оператор $T \in L(X, Y)$ має замкнений образ тоді і тільки тоді, коли його ін'єктивізація – оператор $\widetilde{T}$ – обмежена знизу. Іншими словами, образ оператора T незамкнений тоді і тільки тоді, коли існує послідовність $[x_n] \in S_{X/\ker T}$, для якої $Tx_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. $\square$

Скориставшись тим, що $\|[x_n]\| = \rho(x_n, \ker T)$, переформулюємо останнє твердження без використання терміна фактор-простір.

Теорема 5. Нехай X, Y – банахові простори. Оператор $T \in L(X, Y)$ має незамкнений образ тоді і тільки тоді, коли існує послідовність $x_n \in X$ з такими властивостями:

1. $\rho(x_n, \ker T) = 1$;
2. $\|Tx_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Якщо норма класу еквівалентності дорівнює одиниці, то там є представники з нормами, як завгодно близькими до одиниці. Тому можна додати ще одну властивість:

3. $\|x_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$.

Вправи.

2.1. Для необоротності оператора $T \in L(X, E)$ необхідно і достатньо, щоб виконувалась одна з таких взаємовиключних можливостей:

- оператор T не ін'єктивний;
- оператор T ін'єктивний, але не обмежений знизу;
- оператор T обмежений знизу, але не сюр'єктивний.

2.2. Оператор інтегрування $T\colon C[0,1] \to C[0,1]$, $(Tf)(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau$ ін'єктивний, але не обмежений знизу.

Нехай $g \in C[0,1]$ – фіксована функція, а оператор $T_g : C[0,1] \to C[0,1]$ означається рівністю $T_g(f) = f \cdot g$. Перевірте, що:

2.3. Оператор T_g неперервний і $\|T_g\| = \|g\|$.

2.4. Оператор T_g є ін'єктивним тоді і тільки тоді, коли множина $g^{-1}(0)$ не має внутрішніх точок.

2.5. Оператор T_g є обмеженим знизу тоді і тільки тоді, коли функція g ніде не перетворюється на нуль.

2.6. Нехай тепер оператор T_g множення на функцію $g \in C[0,1]$ розглядається як оператор з $L_1[0,1]$ в $L_1[0,1]$. Чому дорівнює норма такого оператора? Як в цьому випадку записуються критерії ін'єктивності і обмеженості знизу? критерій замкненості образу? Чи зміняться відповіді для $g \in L_\infty[0,1]$?

Дійснозначна функція p, задана на лінійному просторі X, називається опуклим функціоналом, якщо вона задовольняє такі умови:

- $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ для будь-якого вектора $x \in X$ і будь-якого числа $\lambda \geqslant 0$ (додатна однорідність) і
- $p(x + y) \leqslant p(x) + p(y)$ для будь-яких $x, y \in X$ (нерівність трикутника).

Теорема Гана-Банаха в аналітичній формі (S. Banach, H. Hahn). Нехай на дійсному лінійному просторі X задано опуклий функціонал p; Y – підпростір в X, f – лінійний функціонал на Y і $f(y) \leqslant p(y)$ для будь-якого $y \in Y$. Тоді f можна продовжити до лінійного функціонала g, заданого на всьому X, із збереженням умови мажорування: $g(x) \leqslant p(x)$ для будь-якого $x \in X$.

Теорема про продовження неперервного функціонала. Нехай Y – підпростір нормованого простору X, $f \in Y^*$. Тоді існує такий функціонал $\tilde{f} \in X^*$, що $\tilde{f}(y) = f(y)$ для всіх $y \in Y$ і $\|\tilde{f}\| = \|f\|$. Іншими словами, будь-який неперервний лінійний функціонал, заданий на підпросторі нормованого простору, продовжується на весь простір зі збереженням норми.

Теорема Гана-Банаха в геометричній формі. Нехай A і B – неперетинні опуклі підмножини дійсного нормованого простору X і множина A відкрита. Тоді існують такий функціонал $f \in X^* \setminus \{0\}$ і такий скаляр $\theta \in \mathbb{R}$, що $f(a) < \theta$ для всіх $a \in A$ і $f(b) \geqslant \theta$ для всіх $b \in B$.

Наслідок. Нехай A і B – неперетинні опуклі замкнені підмножини нормованого простору X і одна з цих множин – компакт. Тоді існують такий функціонал $f \in X^* \setminus \{0\}$ і такий скаляр $\theta \in \mathbb{R}$, що $f(a) < \theta$ для всіх $a \in A$ і $f(b) > \theta$ для всіх $b \in B$.

Нехай G – комутативна півгрупа; півгрупову операцію на G позначатимемо знаком '+'. Розглянемо лінійний простір $\ell_\infty(G)$ всіх обмежених дійснозначних функцій на G. Кожен елемент $g \in G$ породжує оператор зсуву $S_g \colon \ell_\infty(G) \to \ell_\infty(G)$, який діє за правилом $\left(S_g F\right)(h) = F(g+h)$. Лінійний функціонал $\mathcal{I}$ на $\ell_\infty(G)$ називається інваріантним середнім на G, якщо він задовольняє такі умови:

- $\inf\limits_{g\in G} F(g) \leqslant \mathcal{I}(F) \leqslant \sup\limits_{g\in G} F(g)$ для будь-якої функції $F \in \ell_\infty(G)$ (тобто $\mathcal{I}(F)$ – середнє значення для F);
- $\mathcal{I}\left(S_g F\right) = \mathcal{I}(F)$ для будь-якої функції $F \in \ell_\infty(G)$ і будь-якого $g \in G$ (інваріантність відносно зсувів).

Ми покажемо, що інваріантне середнє існує на будь-якій комутативній півгрупі G.

Для функції $F \in \ell_\infty(G)$ означимо величину

$$p(F) = \inf\left\{\sup_{h\in G} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} F\left(g_k + h\right) : n \in \mathbb{N},\ (g_k)_{k=1}^{n} \in G^n\right\},$$

де інфімум береться за всіма скінченними наборами $g_k \in G$, можливо, з повтореннями.

Твердження. p – опуклий функціонал на $\ell_\infty(G)$, який задовольняє для будь-якої функції $F \in \ell_\infty(G)$ і будь-якого $g \in G$ умови:

(1) $p\left(S_g F - F\right) \leqslant 0$;

(2) $p\left(F - S_g F\right) \leqslant 0$

(умови (1) і (2) разом означають рівність нулю виразів, які оцінюються).

Доведення. Додатна однорідность тут очевидна, перевіримо нерівність трикутника. Нехай $F_1, F_2 \in \ell_\infty(G)$, $\varepsilon > 0$. Виберемо такі елементи g_k^1, $k = 1, 2, \ldots, n_1$ і g_k^2, $k = 1, 2, \ldots, n_2$ півгрупи G, що

$$\sup_{h \in G} \left\{ \frac{1}{n_i} \sum_{k=1}^{n_i} F_i\left(g_k^i + h\right) \right\} < p(F_i) + \varepsilon, \quad i = 1, 2.$$

Тоді

$$p(F_1 + F_2) \leqslant \sup_{h \in G} \left\{ \frac{1}{n_1 n_2} \sum_{j=1}^{n_2} \sum_{k=1}^{n_1} (F_1 + F_2)\left(g_k^1 + g_j^2 + h\right) \right\}.$$

Скористаємось тим, що супремум суми не перевищує суми супремумів, і продовжимо оцінку:

$$\leqslant \frac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2}\sup_{h\in G}\left\{\frac{1}{n_1}\sum_{k=1}^{n_1}F_1\left(g_k^1+g_j^2+h\right)\right\}+$$

$$+\frac{1}{n_1}\sum_{k=1}^{n_1}\sup_{h\in G}\left\{\frac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2}F_2\left(g_k^1+g_j^2+h\right)\right\}\leqslant p\left(F_1\right)+p\left(F_2\right)+2\varepsilon,$$

що, на підставі довільності ε, доводить потрібну нерівність трикутника.

Перевіримо тепер умову (1).

$$p\left(S_gF - F\right) \leqslant \sup_{h\in G}\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(S_gF - F\right)(h+kg)\right\} =$$

$$= \sup_{h\in G}\frac{1}{n}\left(F\left(h+(n+1)\,g\right) - F\left(h+g\right)\right) \leqslant \frac{2}{n}\sup_{h\in G}\left|F\left(h\right)\right|.$$

Спрямувавши в останній нерівності n до нескінченності, отримаємо потрібну оцінку. Нерівність (2) доводиться аналогічно.
□

Позначимо функцію, яка дорівнює на G тотожній одиниці, через $\mathbb{1}$. Зазначимо ще дві очевидні властивості функціонала p:

- $p(\mathbb{1}) = 1$;
- якщо функція F скрізь менша або дорівнює нулю, то $p(F) \leqslant 0$.

Теорема. На будь-якій комутативній півгрупі існує інваріантне середнє.

Доведення. Розглянемо в $\ell_\infty(G)$ підпростір $Y = \mathrm{Lin}\{\mathbb{1}\}$. Означимо функціонал на Y рівністю $f(c \cdot \mathbb{1}) = c$. Очевидно, що функціонал f лінійний і $f \leqslant p$. Скористаємось теоремою Гана-Банаха і продовжимо f на весь $\ell_\infty(G)$ до лінійного функціонала $\mathcal{I}$ зі збереженням умови мажорування. Доведемо, що $\mathcal{I}$ є інваріантним середнім.

Спочатку зазначимо властивість монотонності функціонала $\mathcal{I}$: якщо $F_1, F_2 \in \ell_\infty(G)$, $F_1 \leqslant F_2$ в усіх точках, то $\mathcal{I}(F_1) \leqslant \mathcal{I}(F_2)$. Справді, за такої умови $F_1 - F_2 \leqslant 0$, отже,

$$\mathcal{I}(F_1) - \mathcal{I}(F_2) = \mathcal{I}(F_1 - F_2) \leqslant p(F_1 - F_2) \leqslant 0.$$

З монотонності функціонала $\mathcal{I}$ одержуємо, що якщо функція F оцінюється зверху і знизу сталими: $c_1\mathbb{1} \leqslant F \leqslant c_2\mathbb{1}$, то $\mathcal{I}(F)$ оцінюється тими самими константами: $c_1 \leqslant \mathcal{I}(F) \leqslant c_2$. Отже, ми перевірили першу умову означення інваріантного середнього. Друга умова – інваріантність щодо зсувів – відразу випливає з умови мажорування і властивостей (1), (2) функціонала p:

$$\mathcal{I}(S_g F) - \mathcal{I}(F) = \mathcal{I}(S_g F - F) \leqslant p(S_g F - F) \leqslant 0;$$

$$\mathcal{I}(F) - \mathcal{I}(S_g F) = \mathcal{I}(F - S_g F) \leqslant p(F - S_g F) \leqslant 0. \qquad \square$$

Нагадаємо, що в курсі теорії міри ми довели нерозв'язність так званої тонкої задачі теорії міри: побудови інваріантної щодо зсуву зліченно-адитивної ймовірнісної міри X, означеній на всіх підмножинах відрізка $[0, 1)$. Звідси ми виводили існування невимірних за Лебегом множин: якщо б кожна підмножина відрізка була вимірною за Лебегом, то міра Лебега була б розв'язком тонкої задачі теорії міри. Водночас аналогічна задача із заміною зліченної адитивності на скінченну адитивність (груба задача теорії міри) вже розв'язна.

Теорема (Банах). Існує скінченно-адитивна міра μ, означена на всіх підмножинах відрізка $[0, 1)$, з $\mu([0, 1]) = 1$ й інваріантна щодо зсувів (тобто $\mu(A + t) = \mu(A)$ для будь-якої підмножини $A \subset [0, 1)$ і будь-якого $t \in \mathbb{R}$, таких, що $A + t \subset [0, 1)$).

Доведення. Наділимо відрізок $[0, 1)$ операцією додавання за модулем 1: сума чисел a і b за модулем 1 – це дробова частина числа g. Зафіксуємо $\mathcal{I}$ – інваріантне середнє на цій групі. Міра μ, визначена рівністю $\mu(A) = \mathcal{I}(\mathbb{1}_A)$, де $\mathbb{1}_A$ – характеристична функція множини A, і буде потрібною мірою. $\square$

Цікаво, що побудувати аналогічну міру на сфері тривимірного евклідового простору (тобто скінченно-адитивну ймовірнісну міру, визначену на всіх підмножинах сфери й інваріантну щодо ізометрій сфери) вже неможливо (F. Hausdorff, 1914). Причиною цього є складна структура групи ізометрій сфери. Читачеві, який зацікавився питаннями існування інваріантних мір, пропонуємо подивитись монографію
Wagon S. The Banach-Tarski paradox. – Cambrige Univ. Press, 1985.,
де розповідається про ефекти в дусі відомого парадоксу Банаха-Тарського, коли сфера розрізається на скінченне число «шматків», з яких вдається скласти дві нові сфери того ж розміру. Можливість такого розрізання, зрозуміло, приводила б до суперечності, якщо б «шматки» можна було «виміряти» за допомогою скінченно-адитивної інваріантної міри.

Розглянемо півгрупу $\mathbb{N}$ натуральних чисел за додаванням. Функції на $\mathbb{N}$ – це послідовності; інваріантне середнє на $\mathbb{N}$ називається узагальненою банаховою границею і позначається значком Lim.

Вправи.

2.1. Узагальнена банахова границя будь-якої обмеженої послідовності лежить між її верхньою і нижньою границями.

2.2. Якщо послідовність $x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ має границю, то $\operatorname{Lim} x = \lim_{n\to\infty} x_n$.

2.3. Якщо послідовність $x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ рівномірно збігається за Чезаро до s, тобто послідовність

$$\frac{x_{k+1} + x_{k+2} + ... + x_{k+n}}{n}$$

рівномірно за k прямує до s при $n \to \infty$, то $\operatorname{Lim} x = s$.

2.4. На прикладі послідовності $x = (1, 0, 1, 0, \ldots)$ переконайтесь, що узагальнена банахова границя послідовності може не бути граничною точкою цієї послідовності.
2.5. На прикладі послідовностей $x = (1, 0, 1, 0, \ldots)$ і $y = (0, 1, 0, 1, \ldots)$ переконайтесь, що узагальнена банахова границя не є мультиплікативним функціоналом: $\mathrm{Lim}\,(xy)$ може не дорівнювати добутку $\mathrm{Lim}\,x$ на $\mathrm{Lim}\,y$.