Додаткові розділи функціонального аналізу

Лекція 3

Володимир Кадець

ХНУ ім. В.Н.Каразіна

Харків, 2020

Зміст лекції

Нехай X – метричний простір. Нагадаємо, що відстанню від точки $x \in X$ до непорожньої підмножини $A \subset X$ називається число $\rho(x, A) = \inf_{a \in A} \rho(x, a)$.
Односторонньою дистанцією Гаусдорфа між непорожніми множинами $A, B \subset X$ називається величина

$$\widetilde{\rho}_H(A, B) = \sup_{b \in B} \rho(b, A),$$

а дистанцією Гаусдорфа між $A, B \subset X$ називається

$$\rho_H(A, B) = \max\left\{\widetilde{\rho}_H(A, B),\ \widetilde{\rho}_H(B, A)\right\}.$$

Дистанція Гаусдорфа між двома множинами та ж сама, як і між замиканнями цих множин: $\rho_H(A, B) = \rho_H(\overline{A}, \overline{B})$.

Позначимо $\mathsf{bc}(X)$ метричний простір всіх непорожніх обмежених замкнених підмножин простору X наділений дистанцією Гаусдорфа.

Позначимо $\mathsf{comp}(X)$ підпростір простору $\mathsf{bc}(X)$, що складається з компактних множин. Іншими словами, $\mathsf{comp}(X)$ – це сім'я всіх непорожніх компактних підмножин простору X, з дистанцією Гаусдорфа в якості метрики.

Зауважимо, що якщо X – повний метричний простір, то $\mathsf{comp}(X)$ – замкнений підпростір простору $\mathsf{bc}(X)$, тобто $\mathsf{comp}(X)$ також повний.

Нехай X – метричний простір, $S_i\colon X \to X$, $i = 1, 2, \ldots, n$ – стискальні відображення. Підмножина $E \in \mathrm{comp}(X)$ називається самоподібною відносно сім'ї стисків $\{S_i\}_{i=1}^n$, якщо

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} S_i(E).$$

Теорема 1. Якщо X – повний метричний простір, то для будь-якої сім'ї стисків $\{S_i\}_{i=1}^n$ існує єдина самоподібна відносно $\{S_i\}_{i=1}^n$ підмножина $E \in \mathrm{comp}(X)$.

Доведення. Подробиці на "дошці".

□

Приклади побудови на “дошці”: канторова множина; трикутник Серпинського.

Топологічний простір X має властивість нерухомої точки, якщо будь-яка неперервна функція $f\colon X \to X$ має принаймні одну нерухому точку.

Приклад 1. Відрізок $[0,1]$ має властивість нерухомої точки. Справді, нехай $f\colon [0,1] \to [0,1]$ – неперервна функція. Розглянемо дві множини:

$$A = \{\, t \in [0,1] : f(t) \leqslant t \}\,; B = \{\, t \in [0,1] : f(t) \geqslant t \}\,.$$

Ці множини замкнені і в об'єднанні дають весь відрізок. Отже, з огляду на зв'язність відрізка множини A і B перетинаються. Будь-яка точка множини $A \cap B$ є шуканою нерухомою точкою.

Приклад 2. Коло (без внутрішності) на площині не має властивості нерухомої точки. За відображення без нерухомих точок можна взяти, скажімо, центральну симетрію кола.

Найважливіший клас прикладів надає така теорема Брауера.

Теорема 2. Кожний опуклий компакт у скінченновимірному нормованому просторі має властивість нерухомої точки.

Наведемо приклад застосування теореми Брауера.

Теорема 3. Нехай $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – лінійний оператор, що задається матрицею, всі елементи $a_{i,j}$ якої невід'ємні. Тоді A має власний вектор з невід'ємними координатами.

Доведення. Позначимо

$$\mathbb{R}^n_+ = \{x = (x_1, ..., x_n) : x_k \geqslant 0,\ k = 1, \ldots, n\}.$$

За умовою, $A\left(\mathbb{R}^n_+\right) \subset \mathbb{R}^n_+$. Якщо в $\mathbb{R}^n_+$ існує ненульовий вектор x з $Ax = 0$, то це і є потрібний власний вектор (з власним числом 0). Тому ми можемо вважати, що $Ax \neq 0$ для всіх $x \in \mathbb{R}^n_+ \backslash \{0\}$. Розглянемо функціонал $s(x) = \sum_{k=1}^n x_k$ – сума координат і компакт $K = \left\{ x \in \mathbb{R}^n_+ : s(x) = 1 \right\}$. Згідно з теоремою Брауера, відображення $f\colon K \to K$, яке діє за правилом $f(x) = \frac{Ax}{s(Ax)}$, повинно мати нерухому точку $x_0 \in K$. Для цієї точки $\frac{Ax_0}{s(Ax_0)} = x_0$, тобто x_0 – це власний вектор з власним числом $s(Ax_0)$.