Теорія міри і інтеграла
Тема 4: Міри на відрізку і на осі
Лекція 11

Володимир Кадець

ХНУ ім. В.Н.Каразіна

Харків, 2020

Зміст лекції

Нехай (Ω, Σ, μ) – простір з мірою. Елементи σ-алгебри Σ називатимемо вимірними множинами. Якщо ж на Ω розглядаються одночасно декілька σ-алгебр, і потрібно уточнити, про яку саме σ-алгебру йде мова, то елементи σ-алгебри Σ називатимемо Σ-вимірними множинами. Скажімо, на відрізку поряд із вимірними за Лебегом множинами є ще σ-алгебра борелевих множин. Відповідно до введеної термінології, борелеві множини можна називати ще $\mathfrak{B}$-вимірними або вимірними за Борелем.

Нагадаємо, що множина $A \subset \Omega$ називається нехтуваною, якщо A міститься у вимірній множині нульової міри. Якщо (Ω, Σ, μ) – повний простір з мірою (як, наприклад, відрізок з мірою Лебега), то означення спрощується: терміни «нехтувана множина» і «множина міри 0» стають синонімами. Множина називається множиною повної міри, якщо її доповнення нехтуване.

Твердження P, що стосується точок множини Ω, називається виконаним для майже всіх $t \in \Omega$ або виконаним майже скрізь, якщо множина тих t, де твердження P не виконується, нехтувана.

Наприклад, функція $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ дорівнює нулю майже скрізь (скорочений запис – $f \overset{\text{м.с.}}{=} 0$), якщо множина тих t, де $f(t) \neq 0$, нехтувана. $f \overset{\text{м.с.}}{\geqslant} g$, якщо множина тих t, де $f(t) < g(t)$, нехтувана, і т. д.

Міркування й оцінки, які проводяться майже скрізь, істотно зручніші від звичайних поточкових міркувань. Так, на відрізку (а відрізок за замовчуванням ми вважаємо наділеним мірою Лебега), якщо у функції скінченне або зліченне число точок розриву, то в цих точках ми часто можемо не означати функцію або означати у найзручніший для нас спосіб, бо для майже всіх значень аргументу це ніяк не відіб'ється на властивостях функції.

Зазначимо дві важливі властивості, які випливають безпосередньо з властивостей нехтуваних множин.

- Нехай твердження P_1 спричиняє твердження P_2 (тобто $P_1 \Rightarrow P_2$), і P_1 виконується майже скрізь. Тоді і P_2 виконується майже скрізь.
- Нехай P_j, $j \in M$ – скінченний або зліченний набір тверджень, а P – твердження, яке полягає в одночасному виконанні всіх тверджень P_j. Тоді, якщо всі P_j виконані майже скрізь, то твердження P виконується майже скрізь.

Вправи

11.1 Розпишіть, у чому полягає заперечення твердження

$$f \overset{\text{м.с.}}{\geqslant} g.$$

Чи буде це заперечення збігатися із твердженням $f \overset{\text{м.с.}}{<} g$?

11.2 Чи можуть одночасно виконуватись твердження

$$f \overset{\text{м.с.}}{\geqslant} g \text{ і } f \overset{\text{м.с.}}{<} g?$$

11.3 Якщо $f \overset{\text{м.с.}}{\geqslant} g$ і $g \overset{\text{м.с.}}{\geqslant} h$, то $f \overset{\text{м.с.}}{\geqslant} h$.

11.4 Нехай дві неперервні функції на відрізку збігаються майже скрізь за мірою Лебега. Тоді ці функції збігаються в усіх точках.

Для доведення теорем існування часто використовується така ідея: замість того, щоб конструювати потрібний об'єкт явно, доводять, що таких об'єктів у тому чи іншому сенсі «багато». А якщо їх багато, то вони, вочевидь, існують. Так, найпростіше доведення існування трансцендентних чисел одержується з міркувань потужності: алгебраїчних чисел є зліченна кількість, отже, трансцендентні не просто існують, а складають «основну частину» всіх чисел.

В темі «метричні простори» ми показали, як у такий самий спосіб для доведення теорем існування (а саме, для доведення існування точок неперервності у поточкової границі послідовності неперервних функцій) можна використовувати множини першої та другої категорій. У кожному такому міркуванні головне – це правильно вибрати, яке поняття «малості» використовувати.

Першим неочевидним застосуванням теорії міри в нашому курсі стане доведення існування точок диференційовності у будь-якої монотонної функції. Точніше, доведено таке загальніше твердження.

Теорема Лебега. Кожна монотонна на відрізку функція диференційовна майже скрізь, тобто множина точок, де функція не диференційовна, – це множина лебегової міри 0.

Ми наполегливо радимо не заглядати в книжку і поміркувати над цим твердженням кілька днів. Можна для спрощення розглядати лише неперервні монотонні функції.

Зізнаюся, що, хоча свого часу мене ця задача міцно «зачепила», розв'язати її самостійно мені не вдалося. Натомість потім у мене був добрий стимул для вивчення теорії міри, і викладачеві не потрібно було мене переконувати у важливості цієї науки.

Приклади

Відкрита щільна множина $A \subset [0,1]$ з довільно малою мірою.

Щільна G_δ-множина $B \subset [0,1]$ з $\lambda(B) = 0$.

Множина першої категорії $D \subset [0,1]$ з $\lambda(D) = 1$.

(Згадати Приклад 3 та вправи 3.1 – 3.6 з лекції 3)

Нехай X – топологічний протір. Функція $f: X \to \mathbb{R}$ називається напівнеперервною знизу, якщо для будь-якого $a \in \mathbb{R}$ множина $f^{-1}((a, +\infty))$ відкрита. Іншими словами, функція f напівнеперервна знизу, якщо для довільної точки $x \in X$ і будь-якого $a \in \mathbb{R}$, з умови $f(x) > a$ випливає існування околу елемента x, на якому всі значення функції f також більші за a.
Приклади: за якої умови зростаюча функція на відрізку буде напівнеперервною знизу? Спадна функція?

Функція f називається напівнеперервною зверху, якщо функція $-f$ напівнеперервна знизу. Функція f буде напівнеперервною зверху тоді і тільки в тоді, коли для будь-якого $a \in \mathbb{R}$ множина $f^{-1}((-\infty, a))$ відкрита.

Приклади: за якої умови зростаюча функція на відрізку буде напівнеперервною зверху? Спадна функція?

Функція $f\colon X \to \mathbb{R}$ неперервна тоді і тільки тоді, коли вона одночасно напівнеперервна знизу і зверху. Множину напівнеперервних знизу дійснозначних функцій на X позначимо $\mathrm{LSC}(X)$, напівнеперервних зверху – через $\mathrm{USC}(X)$, а множину неперервних дійсних функцій на X позначимо $C(X)$ (від lower semicontinuous, upper semicontinuous і continuous відповідно).

Приклад. Нехай $A \subset X$ – довільна підмножина,

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \in X \setminus A \end{cases}$$

(така функція називається характеристичною функцією множини A). Функція $\mathbb{1}_A$ напівнепрервна знизу тоді і тільки тоді, коли множина A відкрита, і напівнеперервна зверху в тоді і тільки тоді, коли A замкнена.

Теорема 1. Клас $\mathrm{LSC}(X)$ має такі властивості:

1. Якщо $f, g \in \mathrm{LSC}(X)$, то $f + g \in \mathrm{LSC}(X)$.
2. Якщо $f \in \mathrm{LSC}(X)$, $g \in C(X)$, то $f - g \in \mathrm{LSC}(X)$.
3. Якщо $f \in \mathrm{LSC}(X)$, $\lambda \in [0, +\infty)$, то $\lambda f \in \mathrm{LSC}(X)$.
4. Супремум будь-якої кількості напівнеперервних знизу функцій знову лежить в $\mathrm{LSC}(X)$. Детальніше: нехай $S \subset \mathrm{LSC}(X)$ і функція $f\colon X \to \mathbb{R}$ задана рівністю $f(x) = \sup\{g(x) : g \in S\}$. Тоді $f \in \mathrm{LSC}(X)$.
5. Якщо $f, g \in \mathrm{LSC}(X)$, то $\min\{f, g\} \in \mathrm{LSC}(X)$.

Доведення – початок.

1. Для будь-якого $a \in \mathbb{R}$ множину $(f+g)^{-1}\big((a,+\infty)\big)$ запишемо у вигляді об'єднання відкритих множин:

$$(f+g)^{-1}\big((a,+\infty)\big) = \bigcup_{t\in\mathbb{R}} \Big(f^{-1}\big((t,+\infty)\big) \cap g^{-1}\big((a-t,+\infty)\big)\Big).$$

Отже, ця множина сама є відкритою.
2. Випливає з попереднього пункту, бо $-g \in C(X) \subset \mathrm{LSC}(X)$.
3. $(\lambda f)^{-1}\big((a,+\infty)\big) = f^{-1}\big((a/\lambda,+\infty)\big)$.

Доведення – завершення.

4. В цьому пункті $f(x) = \sup\{g(x) : g \in S\}$. Супремум числової множини більший за a тоді і тільки тоді, коли принаймні одне з чисел цієї множини більше за a. Тому прообраз $f^{-1}\big((a, +\infty)\big)$ можна зобразити як об'єднання відкритих множин:

$$f^{-1}\big((a, +\infty)\big) = \bigcup_{g \in S} g^{-1}\big((a, +\infty)\big).$$

Отже, $f^{-1}\big((a, +\infty)\big)$ є відкритою множиною.
5. $(\min(f, g))^{-1}\big((a, +\infty)\big) = f^{-1}\big((a, +\infty)\big) \cap g^{-1}\big((a, +\infty)\big)$, а перетин двох відкритих множин відкритий. □

Вправи

11.5 $\mathbb{1}_{A\cup B} = \max\{\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B\}$.
11.6 $\mathbb{1}_{A\cap B} = \min\{\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B\} = \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B$.
11.7 Якщо множини A і B не перетинаються, то

$$\mathbb{1}_{A\sqcup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B.$$

11.8 Нехай $A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Тоді $\mathbb{1}_A = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_n}$.
11.9 Нехай (A_n) – деяка послідовність множин. Тоді $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n}$ – це характеристична функція деякої множини $\varlimsup\limits_{n\to\infty} A_n$.
11.10 Розглянемо множину $2^{\mathbb{N}}$ всіх підмножин натурального ряду в топології, описаній у вправах з лекції 10. Перевірте, що послідовність множин збігається в цій топології до деякої множини тоді і тільки тоді, коли характеристичні функції поточково збігаються до відповідної характеристичної функції.

Вправи

11.11 Алгебра характеристичних функцій та відповідна алгебра множин (на дошці).