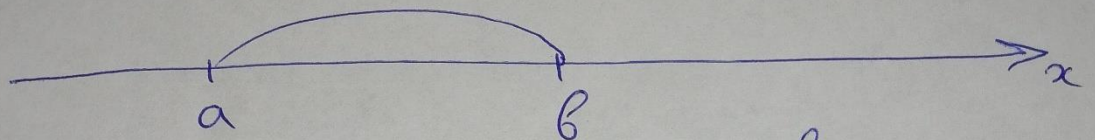


Невласні інтеграли

$$\textcircled{1} \int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$$

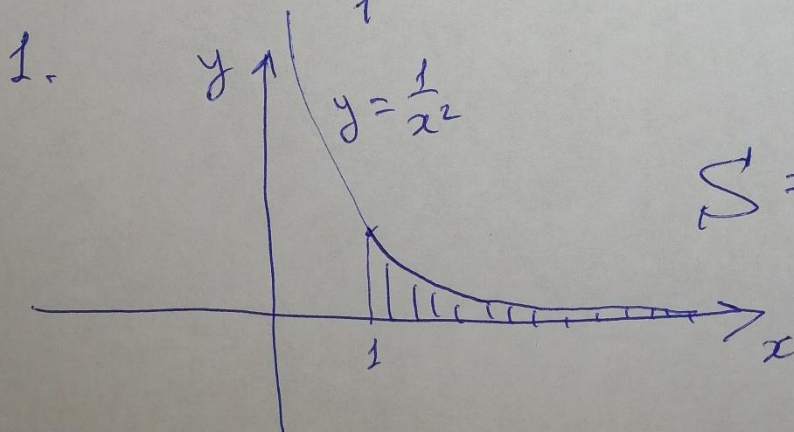


Приклад 1. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2} =$

$$= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\left(\frac{1}{b} - 1 \right) \right) =$$

$$= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{b} \right) = 1.$$

Інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ збігається і дорівнює



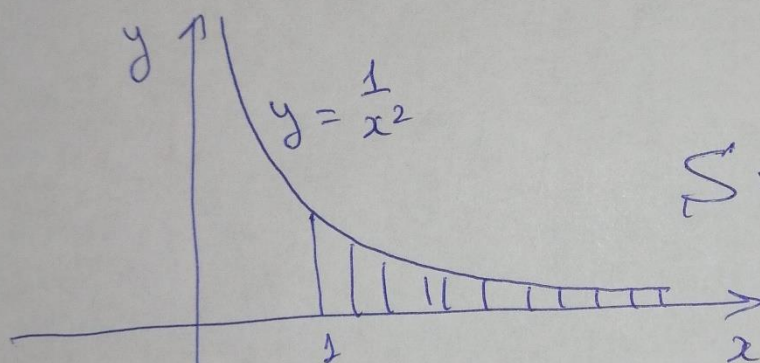
$$S = 1.$$

Пример 2.

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} =$$

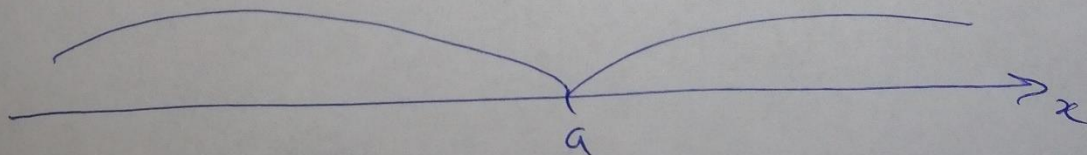
$$= \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln x \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln b = +\infty.$$

Интервал $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ расходится, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = +\infty$.



$$S = +\infty.$$

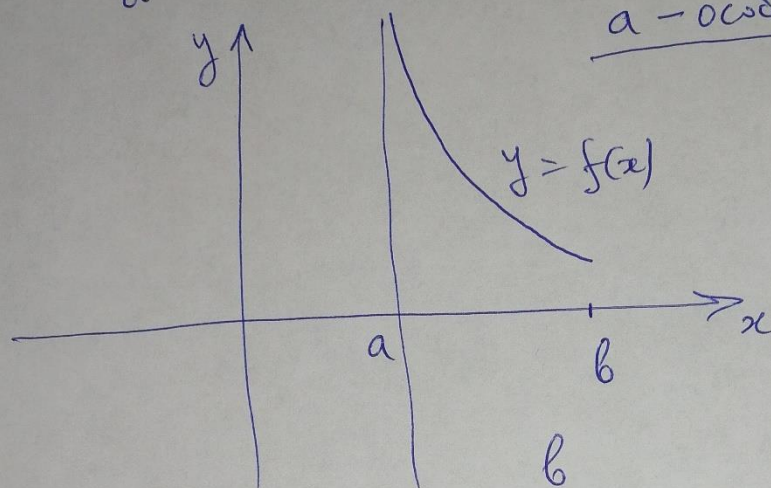
$$(2) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{+\infty} f(x) dx$$



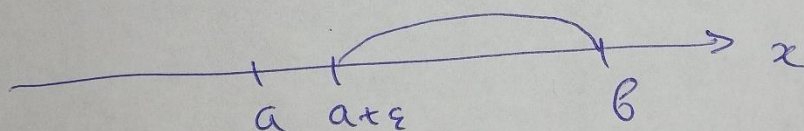
3

③ $\int_a^b f(x) dx$, $f \in C(a, b]$ и $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty$,

a - особая точка

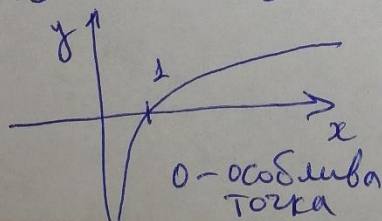


$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx.$$



Пример. $\int_0^1 \ln x dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon}^1 \ln x dx = \begin{cases} u = \ln x \\ dv = dx \\ v = x \end{cases}$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(x \cdot \ln x \Big|_{\varepsilon}^1 - \int_{\varepsilon}^1 x \cdot \frac{1}{x} dx \right) = - \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon \ln \varepsilon - 1 = -1$$

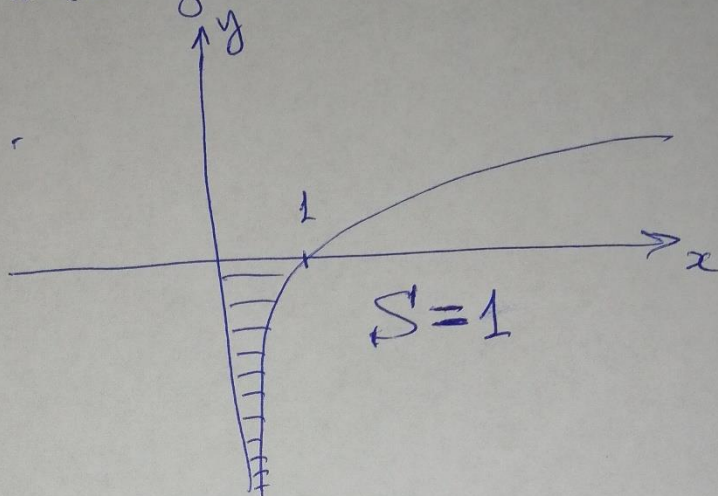


$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon \ln \varepsilon = (0 \cdot \infty) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{\ln \varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon}} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{\varepsilon}}{-\frac{1}{\varepsilon^2}} = - \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon = 0$$

4

Інтеграл $\int_0^1 \ln x dx$ збігається і

$$\int_0^1 \ln x dx = -1.$$



Формула Ньютона-Лейбніца

Теорема. Нехай $f \in C[a, +\infty)$ і $F(x) \in$ первісною для функції $f(x)$ на $[a, +\infty)$.

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ збігається} \Leftrightarrow \exists \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) \in \mathbb{R}.$$

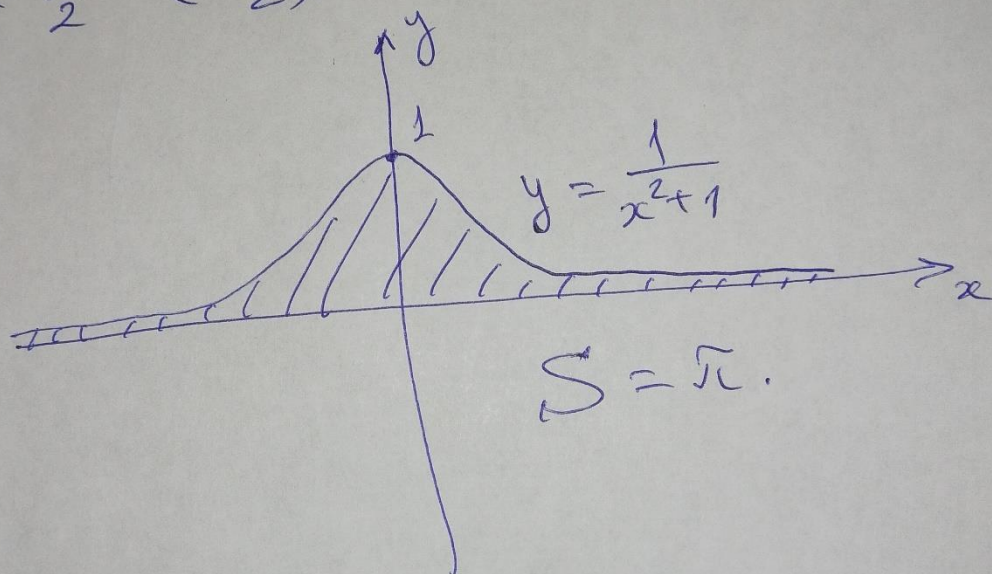
При цьому, у випадку збіжності

$$\begin{aligned} \int_a^{+\infty} f(x) dx &= F(x) \Big|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) - F(a). \end{aligned}$$

Прямая. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \arctg x \Big|_{-\infty}^{+\infty} =$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctg x - \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctg x =$$

$$= \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi.$$



Замени переменные

Прямая. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \left[\begin{array}{l} x = \operatorname{tg} t \\ dx = \frac{dt}{\cos^2 t} \end{array} \right] =$

The figure shows a hand-drawn graph of the function $x = \operatorname{tg} t$. The curve passes through the origin and has vertical asymptotes at $t = -\pi/2$ and $t = \pi/2$. The area under the curve between these two asymptotes is shaded with diagonal lines. Below the graph, the text $S = \pi$ is written, indicating the total area under the curve.

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\frac{dt}{\cos^2 t}}{\operatorname{tg}^2 t + 1} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dt}{\cos^2 t} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dt = \pi.$$

Інтегрування застінками

6

Приклад. $\int_0^1 \ln x dx = \left[\begin{array}{l} u = \ln x \\ dv = dx \\ v = x \end{array} \right] =$

$$= x \ln x \Big|_0^1 - \int_0^1 x \cdot \frac{1}{x} dx =$$

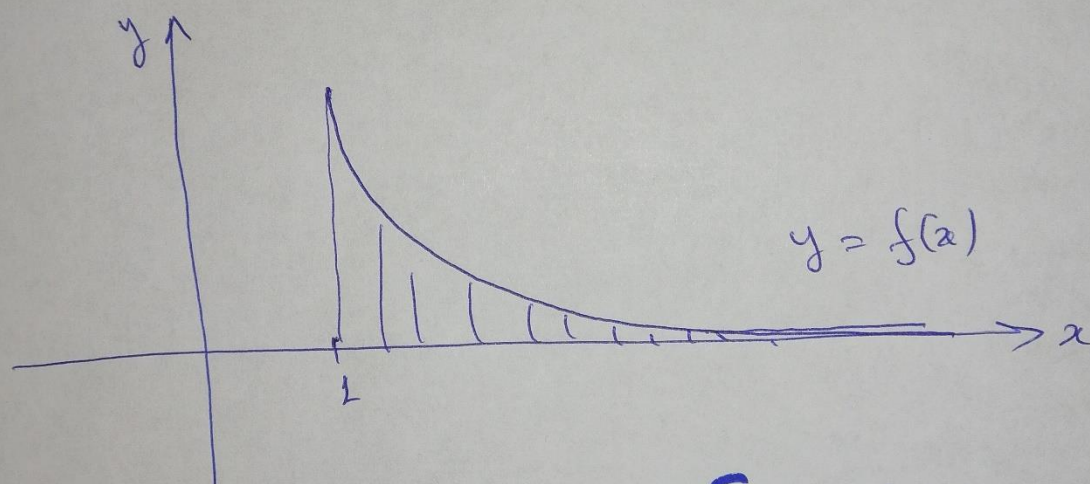
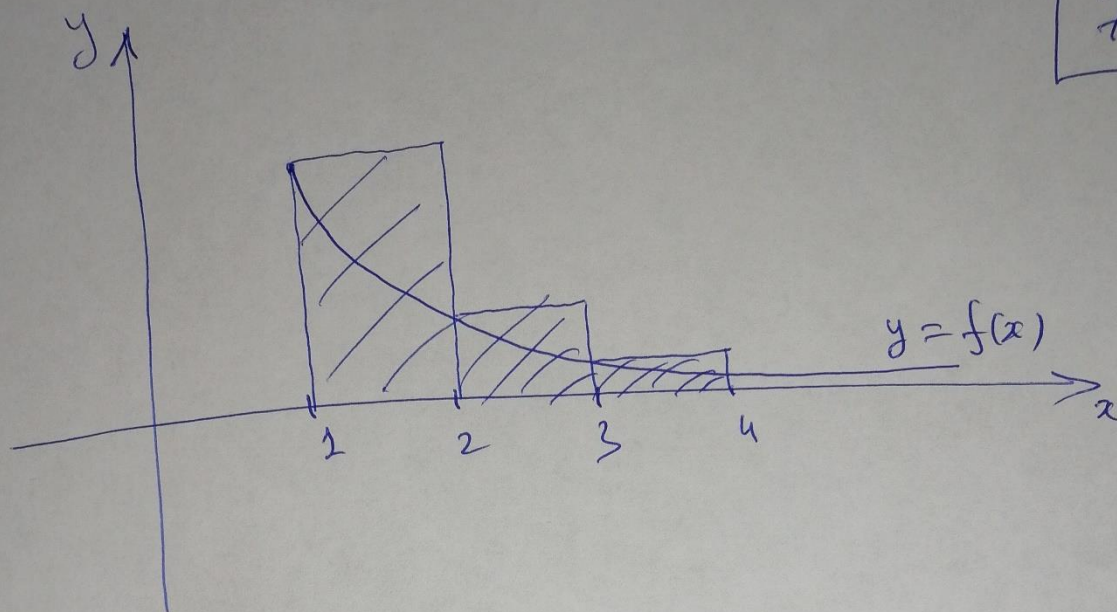
$$= - \lim_{x \rightarrow +0} x \ln x - \int_0^1 dx = 0 - 1 = -1.$$

Зв'язок з числовими рядами

Теорема (інтегральна ознака збіжності числового ряду).

Нехай $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, невід'ємна і не зростає. Тоді

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) < +\infty \Leftrightarrow \int_1^{+\infty} f(x) dx < +\infty.$$



Абсолютная сходимость

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ сходится абсолютно} \Leftrightarrow \int_a^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty$$

Теорема. Если интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ сходится абсолютно, то он сходится.

На відміну від теорії рядів:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ збігається} \not\Rightarrow f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

Теоретична задача. Навести приклад такої неперервної і невід'ємної функції на $[1, +\infty)$, що $\int_1^{+\infty} f(x) dx < +\infty$, але функція $f \in$ необмеженою на $[1, +\infty)$ (зокрема, $f(x) \not\rightarrow 0$).

Теорема Фубіні

Нехай $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ — неперервна функція і $f(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Розглянемо інтеграли

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx \right) dy \quad \text{і} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy \right) dx$$

$$\text{Также } \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dx \right) dy < +\infty, \quad \boxed{9}$$

$$\text{То } \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dy \right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dx \right) dy.$$

Интеграл Ейлера-Пуассона

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2I.$$

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \left[\begin{array}{l} x = yt, \ (y > 0) \\ dx = y dt \end{array} \right] =$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-y^2 t^2} y dt. \quad \text{Меню:}$$

$$I \cdot e^{-y^2} = \left(\int_0^{+\infty} e^{-y^2 t^2} y dt \right) \cdot e^{-y^2} = \int_0^{+\infty} e^{-y^2(t^2+1)} y dt,$$

$$I \cdot \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} e^{-y^2(t^2+1)} y dt \right) dy \quad | 10$$

Herein $f(y, t) = e^{-y^2(t^2+1)} y \geq 0 \quad \forall t \geq 0, y \geq 0$

Poznausmeno $\int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} e^{-y^2(t^2+1)} y dy \right) dt =$

$$= \left[\begin{array}{l} s = y^2 \\ ds = 2y dy \end{array} \right] = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} e^{-(t^2+1)s} ds \right) dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \left(-\frac{1}{t^2+1} e^{-(t^2+1)s} \Big|_0^{+\infty} \right) dt =$$

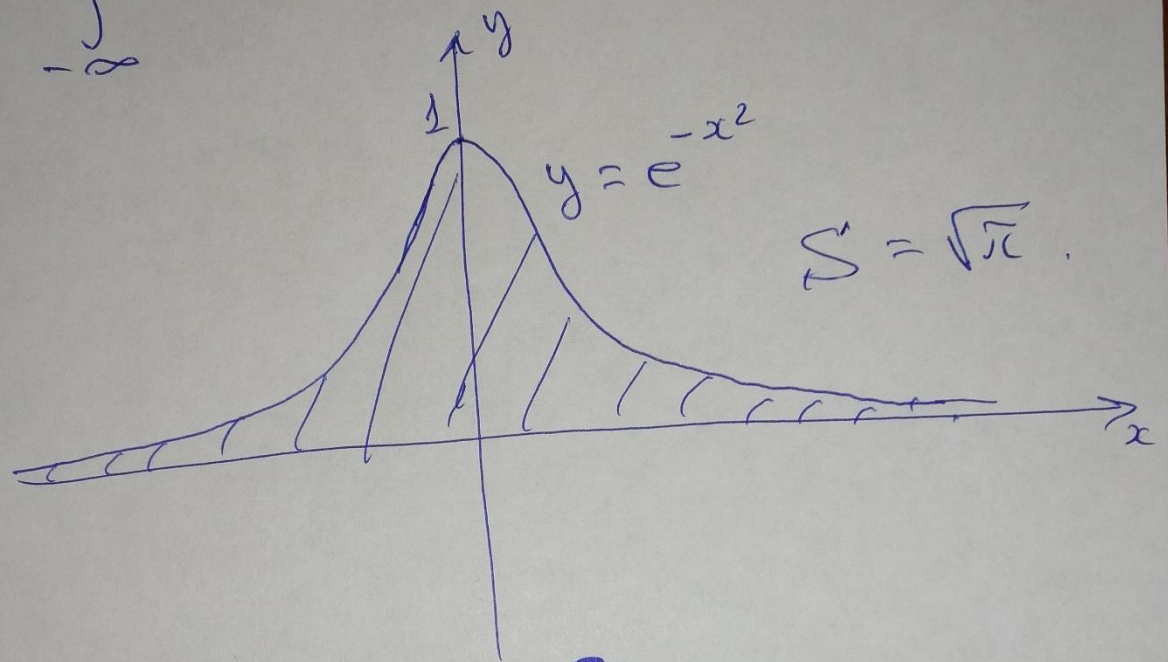
$$= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{t^2+1} - \lim_{s \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t^2+1} \cdot e^{-(t^2+1)s} \right) \right) dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{2} \arctan t \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow +\infty} \arctan t =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}. \text{ Aye } I \cdot \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy = I \cdot I = I^2$$

тогда $I^2 = \frac{\pi}{4}$, $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. То мы

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2I = 2 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}.$$



Інтеграл Гаусса

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx = \left[\begin{array}{l} \frac{x^2}{2} = y^2, \quad x = \sqrt{2} y \\ dx = \sqrt{2} dy \end{array} \right] =$$

$$= \sqrt{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{2\pi}. \text{ Нехай}$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}. \text{ Тоді } \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = 1$$

— густина нормального розподілу ймовірностей

