Теорія міри і інтеграла
Тема 4: Міри на відрізку і на осі
Лекція 10

Володимир Кадець

ХНУ ім. В.Н.Каразіна

Харків, 2020

Нехай $\Omega = (\omega_1, \omega_2)$ – це відкритий невироджений відрізок скінченної довжини. Підвідрізком відрізка Ω називатимемо будь-який відкритий, замкнений або напіввідкритий відрізок, який лежить в Ω, тобто будь-яку підмножину вигляду $[a, b]$, $[a, b)$, (a, b) або $(a, b]$, що міститься в Ω. Зокрема, порожня множина, так само, як і всі одноточкові множини, – це підвідрізки.

Сім'я всіх підвідрізків відрізка Ω утворює півкільце множин, яке ми позначаємо літерою Φ. Для будь-якого підвідрізка $\Delta \in \Phi$ через $\lambda(\Delta)$ позначимо його довжину. Тобто $\lambda(\Delta) = b - a$, де a і b – відповідно лівий і правий кінці відрізка Δ.

Теорема 1. λ – це зліченно-адитивна міра на півкільці Φ.

Доведення. Згідно з критерієм зліченної адитивності, нам потрібно перевірити скінченну адитивність і зліченну напівадитивність міри λ.

Скінченна адитивність. Нехай Δ_k, $k = 1, 2, ..., n$ – неперетинні підвідрізки, виписані в порядку зростання лівих кінців, a_k, b_k – кінці відповідних Δ_k і нехай $\bigcup_{k=1}^{n} \Delta_k = \Delta \in \Phi$. Тоді a_1 і b_n збігаються з кінцями відрізка Δ і $a_{k+1} = b_k$, $k = 1, 2, ..., n-1$. Маємо

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda(\Delta_k) = \sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) = b_n - a_1 = \lambda(\Delta).$$

Злічення напівадитивність. Нехай $\Delta \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k$; $\Delta_k, \Delta \in \Phi$, a і b – кінці відрізка Δ, а a_k, b_k – кінці відповідних Δ_k. Задамо довільне $\varepsilon > 0$ і, трохи відступивши від кінців вихідних відрізків, введемо допоміжні відрізки $\Delta' \subset \Delta$ і $\Delta'_k \supset \Delta_k$ так, щоб Δ' був замкненим, а Δ'_k були відкритими підмножинами відрізка Ω, і

$$\lambda(\Delta) - \lambda(\Delta') + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda(\Delta'_k) - \lambda(\Delta_k)\right) < \varepsilon, \tag{1}$$

тобто, щоб кінці були зсунуті не дуже сильно. Для нових відрізків як і раніше правильне включення $\Delta' \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta'_k$, але тепер воно несе інше змістовне навантаження: добре відоме нам відкрите покриття компакту!

Виберемо скінченне підпокриття, тобто візьмемо таку скінченну множину індексів $N \subset \mathbb{N}$, що $\Delta' \subset \bigcup_{k \in N} \Delta'_k$. З огляду на скінченну адитивність

$$\lambda(\Delta') \leqslant \sum_{k \in N} \lambda(\Delta'_k) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(\Delta'_k).$$

Скориставшись умовою (1), отримаємо, що

$$\lambda(\Delta) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(\Delta_k) + \varepsilon.$$

З огляду на довільність ε, зліченну напівадитивність доведено. $\square$

Застосувавши до міри λ лебегівську (H. Lebesgue) схему продовження мір, ми одержимо таку зліченно-адитивну міру (позначатимемо її теж літерою λ), задану на σ-алгебрі $\Sigma \supset \Phi$, що $\lambda((a, b)) = b - a$ для будь-якого відрізка (a, b). Елементи σ-алгебри Σ називаються множинами, вимірними за Лебегом, а побудована міра λ на Σ називається мірою Лебега.

Поки означення міри Лебега подано в дещо зашифрованому вигляді з посиланням на загальну схему продовження мір. Нижче подані зауваження мають на меті розписати це означення детальніше.

– Нехай $A = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k) \subset \Omega$ (нагадаємо, що це – загальний вигляд відкритої підмножини відрізка Ω). Тоді A вимірна за Лебегом, і $\lambda(A) = \sum_{k=1}^{\infty} |b_k - a_k|$.

– Множина, що складається з однієї точки, вимірна і має нульову міру Лебега. Отже, міра Лебега будь-якої скінченної або зліченної множини також дорівнює нулю.

– Зовнішню міру будь-якої множини $A \subset \Omega$ можна обчислити за правилом $\lambda^*(A) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |b_k - a_k| : \bigcup_{k=1}^{\infty} [a_k, b_k] \supset A \right\}$.

– Якщо $\bigcup_{k=1}^{\infty}[a_k,b_k]\supset A$, то кожний відрізок $[a_k,b_k]$ можна замінити дещо більшим відкритим відрізком так, щоб сума довжин змінилася як завгодно мало. Тобто у наведеній вище формулі можуть так само використовуватись замість замкнених – відкриті відрізки:

$$\lambda^*(A)=\inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty}|c_k-d_k|:\ \bigcup_{k=1}^{\infty}(c_k,d_k)\supset A\right\}=$$
$$=\inf\{\lambda(B):\ B\text{ – відкрита множина, }B\supset A\}=$$
$$=\inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty}|b_k-a_k|:\ \bigsqcup_{k=1}^{\infty}(a_k,b_k)\supset A\right\}. \tag{2}$$

– За означенням, підмножина A відрізка Ω вимірна за Лебегом, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує така множина B, яка має вигляд скінченного об'єднання відрізків, що $\lambda^*(A \triangle B) < \varepsilon$.

– Для будь-якої вимірної за Лебегом множини A, за означенням продовження міри, $\lambda(A) = \lambda^*(A)$.

– Зовнішня міра і, відтак, міра Лебега множини A не залежать від відрізка $\Omega \supset A$, з якого починалась побудова. Тому надалі ми можемо не уточнювати, на якому саме відрізку розглядаються всі множини.

– Міра Лебега множини зберігається при паралельному перенесенні множини.

– Якщо $\lambda^*(A) = 0$, то A вимірна за Лебегом, і $\lambda(A) = 0$. Такі множини називають нехтуваними або множинами міри нуль.

– Оскільки будь-яка відкрита множина на відрізку вимірна за Лебегом, то і будь-яка борелева підмножина відрізка вимірна за Лебегом (Σ – це σ-алгебра, що містить всі відкриті множини, а $\mathfrak{B}$, за означенням, – найменша σ-алгебра, яка містить усі відкриті множини). Зокрема, всі замкнені множини, множини класів G_δ, F_σ і т. д. вимірні за Лебегом.

Теорема 1. Множина $A \subset \Omega$ вимірна за Лебегом тоді і тільки тоді, коли вона зображується у вигляді різниці $B \backslash C$ множини B класу G_δ і множини $C \subset B$ з $\lambda^*(C) = 0$.

Доведення. Оскільки множини класу G_δ, так само як і нехтувані множини, вимірні, різниці таких множин також вимірні. Тому доведення потребує тільки обернене твердження. Отже, нехай підмножина $A \subset \Omega$ вимірна за Лебегом. За означенням, $\lambda(A) = \lambda^*(A)$. За формулою (2) для зовнішньої міри, для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ існує відкрита множина $B_n \supset A$ з $\lambda(B_n) < \lambda(A) + 1/n$. Покладемо $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$. Множина B, як і потрібно, належить до класу G_δ і містить множину A. Далі, для будь-якого $n \in \mathbb{N}$,

$$\lambda(A) \leqslant \lambda(B) \leqslant \lambda(B_n) < \lambda(A) + 1/n.$$

Отже, $\lambda(A) = \lambda(B)$. Залишається покласти $C = B \backslash A$. □

Переходом до доповнень отримуємо:

Наслідок. Множина $A \subset \Omega$ вимірна за Лебегом тоді і тільки тоді, коли вона зображується у вигляді диз'юнктного об'єднання множини класу F_σ і нехтуваної множини.

Оскільки борелеві множини на відрізку вимірні за Лебегом, до них також можна застосовувати попередню теорему та наслідок з неї. Одержуємо, що, хоча борелеві підмножини відрізка і не вичерпуються множинами класів F_σ і G_δ, вони мало відрізняються від множин цих класів. Більше того, самі множини класів F_σ і G_δ можуть бути отримані одна з одної додаванням або відніманням нехтуваних множин.

Зазначені зображення вимірних множин через борелеві класи і нехтувані множини дають корисну інформацію про будову міри Лебега і множин, вимірних за Лебегом. Проте не варто покладатися на видиму простоту одержаної картини: нехтуваними множинами можна нехтувати з точки зору міри, але в багатьох інших значеннях вони можуть бути влаштовані досить непросто.

Зазначені зображення вимірних множин через борелеві класи і нехтувані множини дають корисну інформацію про будову міри Лебега і множин, вимірних за Лебегом. Проте не варто покладатися на видиму простоту одержаної картини: нехтуваними множинами можна нехтувати з точки зору міри, але в багатьох інших значеннях вони можуть бути влаштовані досить непросто.

Приклад. Канторова множина (G. Cantor) – множина нульової міри, яка має потужність континуума.
Трійковим разкладом числа $x \in [0, 1]$ називається зображення числа у вигляді $x = \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{3^2} + \frac{x_3}{3^3} + ...$, де цифри розкладу x_k – це 0, 1 або 2. Скорочений запис – $x = (0.x_1 x_2 ...)_3$. Деякі числа мають по два трійкових розклади. Наприклад, $(0.10000...)_3 = (0.02222...)_3$. За означенням, канторова множина – це підмножина $\mathcal{K}$ відрізка $[0, 1]$, яка складається з чисел, що мають принаймні один трійковий розклад, який не містить цифри 1.

Структуру канторової множини простіше зрозуміти, розглянувши його доповнення. Так, числа, чиї трійкові розклади обов'язково мають 1 як першу цифру, утворюють інтервал $\Delta_1^1 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Позначимо $K_1 = [0,1] \backslash \Delta_1^1$. Множина K_1 складається з двох відрізків довжини $1/3$. На кожному з цих відрізків відступимо від кінців на одну третину їх довжини і викинемо підвідрізки, які утворилися в середині $\Delta_1^2 = (\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ і $\Delta_2^2 = (\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$.

Числа, в яких перша цифра не дорівнює 1, а друга – обов'язково дорівнює 1, разом утворюють ці інтервали Δ_1^2 і Δ_2^2. Позначимо $K_2 = K_1 \backslash (\Delta_1^2 \cup \Delta_2^2)$.

На n-му кроці множина K_n буде складатися з 2^n відрізків довжини $1/3^n$, і для отримання K_{n+1} з середини кожної такої складової видаляється його третина. Канторова множина збігається з $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$. Міра множини K_n – це сума мір відрізків, які її утворюють, тобто $\lambda(K_n) = 2^n/3^n$, що прямує до нуля при $n \to \infty$. Оскільки $\lambda(\mathcal{K}) \leqslant \lambda(K_n)$ при всіх n, то $\lambda(\mathcal{K}) = 0$.

Континуальність канторової множини можна доводити по-різному. Ось один із найпростіших способів. $\mathcal{K}$ – підмножина відрізка, отже, $\operatorname{card} \mathcal{K}$ не перевищує потужності континуума. Для доведення оберненої нерівності побудуємо ін'єктивне відображення множини континуальної потужності в $\mathcal{K}$. Кожному двійковому дробу $x \in (0, 1)$ поставимо у відповідність трійковий дріб $f(x)$, залишивши нулі дробу x без змін, а одиниці замінивши на двійки. Функція f і буде потрібним ін'єктивним відображенням.

Вправи

– Канторова множина $\mathcal{K}$ замкнена.

– $\mathcal{K}$ – досконала множина, тобто не має ізольованих точок.

– Канторова множина ніде не щільна на відрізку.

– Для будь-якого компактного метричного простору X існує сюр'єктивне неперервне відображення $f\colon \mathcal{K} \to X$.

– Розглянемо множину $2^{\mathbb{N}}$ всіх підмножин натурального ряду в такій топології: базу околів підмножини $A \subset \mathbb{N}$ утворюють сім'ї підмножин

$$U_n(A) = \{B \subset \mathbb{N} : B \cap \{1, 2, ..., n\} = A \cap \{1, 2, ..., n\}\}.$$

Перевірте, що $2^{\mathbb{N}}$ в цій топології гомеоморфна $\mathcal{K}$.

Вправи

– Обчисліть міри Лебега таких множин:

A. $[1,3] \cup [5,6]$;

B. $[1,5] \cup [3,6]$;

C. $\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}\right]$;

D. $\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}\right]$;

E. Множини раціональних чисел на відрізку $[0,1]$;

F. Множини ірраціональних чисел на відрізку $[0,1]$.

Вправи

– Нехай $A \subset [0,1]$ і доповнення до A має нульову міру. Тоді A щільна в $[0,1]$.
– Для будь-якого $A \subset [0,1]$ розглянемо на відрізку функцію $f(x) = \lambda^* (A \cap [0,x])$. Доведіть неперервність функції f.
– Побудуйте на відрізку $[0,1]$ ніде не щільну множину, яка має додатну міру Лебега.
– Побудуйте множину другої категорії на відрізку, яка має нульову міру.
– Міра Лебега атомарна чи безатомна?
Доведіть, що:
– Якщо вимірна множина має ненульову міру Лебега, то її потужність дорівнює потужності континуума.

Вправи

– Потужність сім'ї нехтуваних множин на відрізку дорівнює потужності сім'ї всіх підмножин відрізка. Отже, існують не борелеві нехтувані множини.
– Кожна нехтувана множина міститься в нехтуваній множині класу G_δ.
Внутрішньою мірою множини A на відрізку називається величина

$$\lambda_*(A) = \sup \{\lambda(B) : B \subset A \text{ і } B \text{ замкнена}\} .$$

Доведіть, що:
– $\lambda_* \leqslant \lambda^*$.
– Множина A на відрізку вимірна за Лебегом тоді і тільки тоді, коли $\lambda_*(A) = \lambda^*(A)$.