

# Додаткові розділи функціонального аналізу

## Тема 1. Теорема Банаха про стискальне відображення та її застосування.

### Лекція 1

Володимир Кадець

ХНУ ім. В.Н.Каразіна

Харків, 2020



## Зміст лекції

Загальна інформація про курс

Стискальні відображення

Ітераційний метод наближеного розв'язку рівняння. Оцінка похибки

Теорема про мале збурення одиничного оператора

Самоподібні множини – означення та приклади



## Інформація про курс

– Назва дисципліни:

“Додаткові розділи функціонального аналізу”.

– Лектор: Кадець Володимир Михайлович.

– Тривалість курсу: один семестр, наприкінці іспит.

**Основна література:**

Кадець В.М. Курс функціонального аналізу та теорії міри.  
Підручник. – Львів, 2012. – 590 с.

**Допоміжна література:**

Банах С., Курс функціонального аналізу, Київ, «Рад. школа»,  
1948.

Рудин У. Функциональный анализ. М., «Мир», 1975.



Нехай на множині  $X$  задано відображення  $f: X \rightarrow X$ . Елемент  $x \in X$  називається нерухомою точкою відображення  $f$ , якщо

$$f(x) = x.$$

До задачі пошуку нерухомих точок можна звести багато дуже несхожих на перший погляд задач з різних галузей математики. Тому кожна з теорем про існування нерухомих точок, що викладається в першій частині нашого курсу, має численні і часто дуже витончені застосування.



Нехай  $X$  – метричний простір. Функція  $f: X \rightarrow X$  називається **відображенням стиску** або **стискальним відображенням**, якщо існує така стала  $C \in [0, 1)$ , що для будь-яких  $x_1, x_2 \in X$

$$\rho(f(x_1), f(x_2)) \leq C\rho(x_1, x_2).$$

**Питання.** Стискальне відображення неперервне. Чому?



**Теорема Банаха про стискальне відображення.** Нехай  $X$  – повний метричний простір,  $f: X \rightarrow X$  – відображення стиску. Тоді у відображення  $f$  існує єдина нерухома точка  $x_0 \in X$ .

Більше того, для будь-якого  $y_0 \in X$  послідовність ітерацій  $(y_n)$ , що задається рекурентною формулою  $y_n = f(y_{n-1})$ , збігається до  $x_0$ .

**Доведення.** Почнемо з єдиності. Нехай  $x_0, x_1 \in X$  – нерухомі точки відображення  $f$ . Тоді

$$\rho(x_0, x_1) = \rho(f(x_0), f(x_1)) \leq C\rho(x_0, x_1),$$

де  $C < 1$  – стала з означення стискального відображення. Нерівність  $\rho(x_0, x_1) \leq C\rho(x_0, x_1)$  може виконуватись, тільки якщо  $\rho(x_0, x_1) = 0$ .



Перейдемо до властивостей послідовності  $y_n$ . Введемо позначення  $d = \rho(y_0, y_1)$ . Послідовно підставляючи в оцінку

$$\rho(y_n, y_{n+1}) = \rho(f(y_{n-1}), f(y_n)) \leq C\rho(y_{n-1}, y_n)$$

значення  $n = 1, 2, \dots$ , отримаємо, що

$$\rho(y_1, y_2) \leq Cd, \quad \rho(y_2, y_3) \leq C^2d, \dots, \quad \rho(y_n, y_{n+1}) \leq C^n d.$$

Отже, для будь-яких  $n < m$  маємо:

$$\begin{aligned} \rho(y_n, y_m) &\leq \rho(y_n, y_{n+1}) + \rho(y_{n+1}, y_{n+2}) + \dots + \rho(y_{m-1}, y_m) \leq \\ &\leq (C^n + C^{n+1} + \dots) d = \frac{C^n d}{1 - C} \xrightarrow[n, m \rightarrow \infty]{} 0. \end{aligned}$$



З огляду на повноту простору це означає, що послідовність  $(y_n)$  збігається. Позначимо границю цієї послідовності через  $x_0$ . Залишилось довести, що  $x_0$  – нерухома точка відображення  $f$ . Справді,

$$\begin{aligned} \rho(x_0, f(x_0)) &\leq \rho(x_0, f(y_n)) + \rho(f(y_n), f(x_0)) \leq \\ &\leq \rho(x_0, y_{n+1}) + C\rho(y_n, x_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

тобто  $\rho(x_0, f(x_0)) = 0$ , і  $x_0 = f(x_0)$ .

□

Запам'ятаємо отриману оцінку

$$\rho(y_n, y_m) \leq \frac{C^n d}{1 - C} :$$

вона нам знадобиться на наступному слайді.



Оцінка швидкості наближення  $y_n$  до нерухомої точки  $x_0$ :

$$\rho(y_n, x_0) \leq \frac{C^n d}{1 - C}, \quad (1)$$

де  $C$  – константа стискання, а  $d = \rho(y_0, y_1)$ .

(Приклад застосування на “дощі”).

**Вправа 1.1.** Наведіть приклад стискального відображення на прямій, для якого оцінка не покращується.



**Приклад.** Нехай  $X$  – нормований простір. Для того, щоб лінійний оператор  $T: X \rightarrow X$  здійснював відображення стиску, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова  $\|T\| < 1$ . Що буде в цьому випадку з нерухомою точкою?

**Застосування:** Теорема про мале збурення одиничного оператора.

Нехай  $X$  – банаховий простір,  $T \in L(X)$  і  $\|T\| < 1$ . Тоді оператор  $I - T$  оборотний.



## Вправи

- 1.2. Властивість бути відображенням стиску в нормованому просторі може порушуватись при заміні вихідної норми на еквівалентну. Наведіть приклад.
- 1.3. Опишіть відображення  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , які є стискальними в усіх нормах на  $\mathbb{R}^2$ .
- 1.4. Нехай  $X$  – повний метричний простір,  $K$  – компакт і неперервна функція  $F: K \times X \rightarrow X$  є рівномірно стискальною за другою змінною: існує така стала  $C \in [0, 1)$ , що для будь-яких  $x_1, x_2 \in X$  і будь-якого  $t \in K$  виконується нерівність  $\rho(F(t, x_1), F(t, x_2)) \leq C\rho(x_1, x_2)$ . Тоді для будь-якого  $t \in K$  існує єдиний розв'язок  $x$  рівняння  $F(t, x) = x$  причому цей розв'язок  $x(t)$  неперервно залежить від  $t$ .

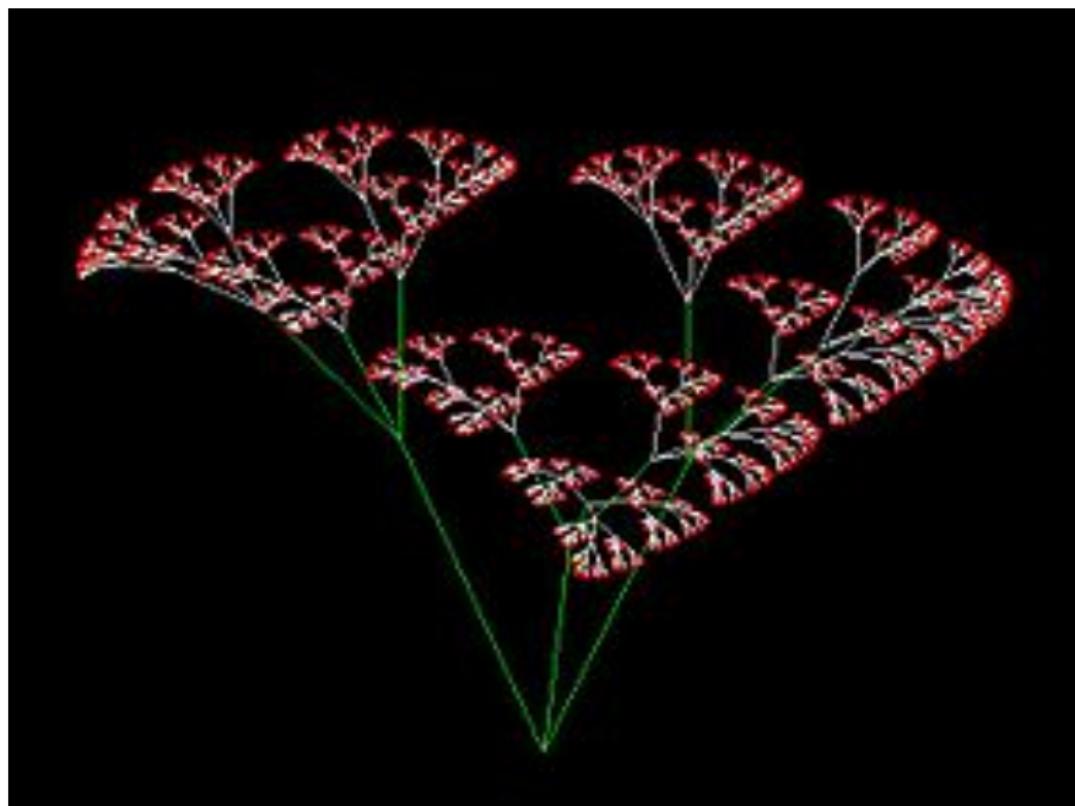


Нехай  $X$  – метричний простір,  $S_i: X \rightarrow X$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  стискальні відображення. Непорожня замкнена підмножина  $E \subseteq X$  називається самоподібною відносно сім’ї стисків  $\{S_i\}_{i=1}^n$ , якщо

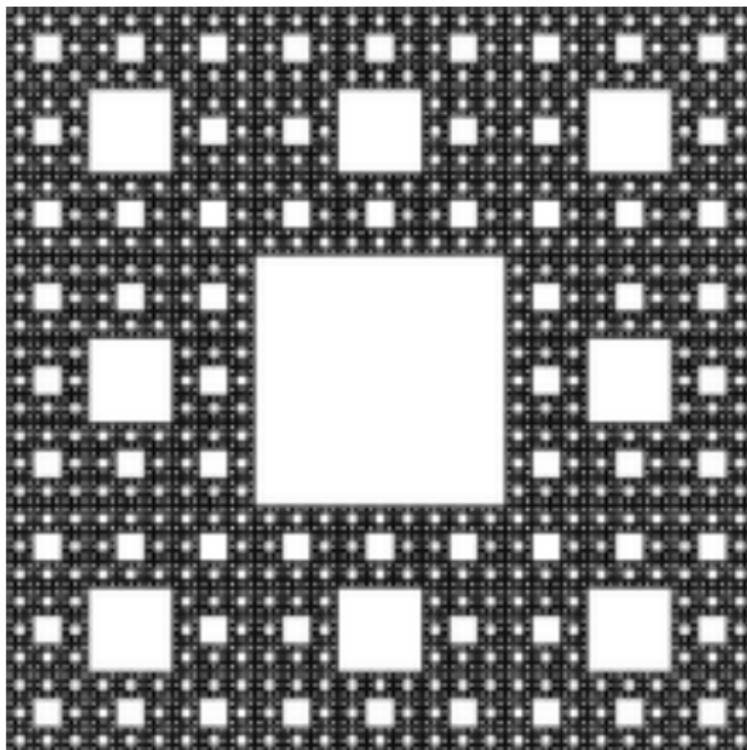
$$E = \bigcup_{i=1}^n S_i(E).$$







## Ковёр Серпинского



## Губка Менгера

