Теорія міри і інтеграла
Тема 3: Продовження мір
Лекція 9

Володимир Кадець

ХНУ ім. В.Н.Каразіна

Харків, 2020

Зміст лекції

Нехай Ω – множина із заданою на ній алгеброю підмножин $\mathbb{A}$ і зліченно-адитивною мірою μ, $A \subset \Omega$ – довільна множина. Зовнішньою мірою множини A називається величина

$$\begin{aligned} \mu^*(A) &= \inf\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) : \ A_k \in \mathbb{A}, A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right\} \\ &= \inf\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) : \ B_k \in \mathbb{A}, A \subset \bigsqcup_{k=1}^{\infty} B_k \right\}. \end{aligned}$$

Введемо на сім'ї всіх підмножин множини Ω псевдометрику, породжену зовнішньою мірою: $\rho(A, B) = \mu^*(A \triangle B)$.
Множину $A \subset \Omega$ назвемо вимірною, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $B \in \mathbb{A}$, що $\rho(A, B) < \varepsilon$.
Теорема 1. Сім'я Σ всіх вимірних підмножин множини Ω утворює σ-алгебру.

Теорема 2. Сім'я Σ всіх вимірних підмножин множини Ω утворює σ-алгебру. зовнішня міра μ^* на σ-алгебрі Σ всіх μ-вимірних підмножин множини Ω буде зліченно-адитивною мірою.

Доведення. Доведемо спочатку скінченну адитивність зовнішньої міри на Σ. Нехай $A_1, A_2 \in \Sigma$ – диз'юнктна пара, $\varepsilon > 0$. За означенням вимірної множини існують $B_1, B_2 \in \mathbb{A}$, для яких $\rho(A_1, B_1) + \rho(A_2, B_2) < \varepsilon$. Множини B_j можуть перетинатися між собою, але цей перетин не може бути великим.

$$\begin{aligned} \mu(B_1 \cap B_2) &= \mu^*(B_1 \cap B_2) = \rho(\emptyset, B_1 \cap B_2) \\ &= \rho(A_1 \cap A_2, B_1 \cap B_2) \leqslant \rho(A_1, B_1) + \rho(A_2, B_2) \leqslant \varepsilon. \end{aligned}$$

(ми скористувалися властивістю 4 псевдометрики ρ).

Тепер скористаємось ще двома властивостями функції ρ, доведеними на попередній лекції:

2. $|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leqslant \rho(A, B)$ для будь-яких $A, B \subset \Omega$,
5. $\rho(\bigcup\limits_{n\in M} A_n, \bigcup\limits_{n\in M} B_n) \leqslant \sum\limits_{n\in M} \rho(A_n, B_n)$.

А саме,

$$\begin{aligned}
&|\mu^*(A_1 \cup A_2) - (\mu^*(A_1) + \mu^*(A_2))| \\
&\leqslant |\mu(B_1 \cup B_2) - (\mu(B_1) + \mu(B_2))| + 2\varepsilon \\
&= \mu(B_1 \cap B_2) + 2\varepsilon \leqslant 3\varepsilon.
\end{aligned}$$

З огляду на довільність ε, рівність

$$\mu^*(A_1 \cup A_2) = \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2),$$

а з нею і скінченна адитивність доведені.

Для завершення доведення скористаємось наступною теоремою:

Скінченно-адитивна міра на півкільці з одиницею, яка задовольняє умову зліченної напівадитивності, автоматично зліченно-адитивна.

Нагадаємо, що одна з властивостей зовнішньої міри – це зліченна напівадитивність: якщо $A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k$, то $\mu^*(A) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu^*(B_k)$.

Оскільки σ-алгебра Σ – теж півкільце, теорема доведена. □

Отже, ми побудували продовження міри μ до зліченно-адитивної міри, заданої на σ-алгебрі $\Sigma \supset \mathbb{A}$. Отож одночасно доведено існування такого продовження на σ-алгебру, породжену алгеброю $\mathbb{A}$. З'єднавши це з результатами попереднього параграфа, отримуємо таке твердження.

Теорема 3. Будь-яка зліченно-адитивна міра, задана на півкільці з одиницею, продовжується до зліченно-адитивної міри, заданої на σ-алгебрі, породженої цим півкільцем.

Одержане продовження міри на σ-алгебру μ-вимірних множин позначатимемо тією самою літерою, що й вихідну міру. Тобто, за означенням, $\mu(A) = \mu^*(A)$ для $A \in \Sigma$.

Важливе зауваження. Побудований за схемою лебегівського продовження простір з мірою (Ω, Σ, μ) – це повний простір з мірою.

Вправа 9.1. Нехай Ω – множина із заданою на ній алгеброю підмножин $\mathbb{A}$ і зліченно-адитивною мірою μ; Σ_1 – σ-алгебра, породжена алгеброю $\mathbb{A}$, μ_1 – деяке зліченно-адитивне продовження міри μ на Σ_1. Тоді $\mu_1(A) \leqslant \mu^*(A)$ для будь-якого $A \in \Sigma_1$.

Вправа 9.2. Нехай на деякій алгебрі множин $\tilde{\Sigma}$ задані дві скінченно-адитивні міри μ_1 і μ_2, $\mu_1(\Omega) = \mu_2(\Omega)$ і $\mu_1(A) \leqslant \mu_2(A)$ для будь-якого $A \in \tilde{\Sigma}$. Тоді міри μ_1 і μ_2 збігаються.

Вправа 9.3. З попередніх двох вправ виведіть єдиність зліченно-адитивного продовження з алгебри на породжену нею σ-алгебру. Звідси виведіть єдиність продовження в теоремі 3.

Вправа 9.4. В умовах вправи 9.1 доведіть єдиність продовження на будь-яку σ-алгебру, яка лежить між Σ_1 і Σ.

Вправа 9.5. Нехай $(\Omega, \mathbb{A}, \mu)$ – простір з мірою. Показати, що простір з мірою (Ω, Σ, μ), побудований для $(\Omega, \mathbb{A}, \mu)$ за описаною в цьому параграфі схемою, буде збігатися з поповненням простору $(\Omega, \mathbb{A}, \mu)$.

Вправа 9.6. Нехай $(\Omega, \mathbb{A}, \mu)$ – повний простір з мірою. Показати, що сім'я Σ вимірних підмножин, побудована для $(\Omega, \mathbb{A}, \mu)$ за описаною в цьому параграфі схемою, буде збігатися з $\mathbb{A}$.

У цьому розділі ми поглибимо наші уявлення про будову вимірних множин.

Нехай (Ω, Σ, μ) – простір зі скінченною мірою, отриманий, як описано вище, продовженням міри μ з деякого півкільця з одиницею $\Phi \subset \Sigma$. Тобто за півкільцем побудовано породжену ним алгебру $\mathbb{A}(\Phi)$, за алгеброю – зовнішню міру μ^*, за зовнішньою мірою – клас вимірних множин (це і є наша Σ) і міра на Σ означена рівністю $\mu(A) = \mu^*(A)$.

Позначимо через Φ_1 сім'ю всіх множин, зображуваних у вигляді об'єднання скінченного або зліченного диз'юнктного набору елементів півкільця Φ. Через Φ_2 позначимо сім'ю всіх множин, зображуваних у вигляді перетину спадної послідовності множин сім'ї Φ_1. Оскільки сім'я вимірних множин Σ – це σ-алгебра, Φ_1 і Φ_2 складаються з вимірних множин.

Твердження 1. Клас множин Φ_1 стійкий щодо операції перетину скінченного числа множин і операції об'єднання скінченного або зліченного диз'юнктного набору множин.

Доведення. Нехай $A = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k$ і $B = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} B_k$ – два довільних елементи сім'ї Φ_1, записані як відповідні зліченні об'єднання диз'юнктних наборів елементів півкільця Φ (щоб уникнути окремого розгляду скінченних зображень, нагадаємо, що деякі з множин A_k, B_k можуть бути порожніми). Тоді перетин множин A і B також записується як зліченне диз'юнктне об'єднання елементів півкільця Φ: $A \cap B = \bigsqcup_{k,j=1}^{\infty} (A_k \cap B_j) \in \Phi_1$.

Далі, нехай

$$A_n = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_{n,k} \in \Phi_1,$$

записані як відповідні диз'юнктні об'єднання, і є диз'юнктними. Тоді

$$\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigsqcup_{n,k=1}^{\infty} A_{n,k} \in \Phi_1. \qquad \square$$

Твердження 2. Для будь-якої множини $A \subset \Omega$

$$\mu^*(A) = \inf \{\mu(B) : \ B \in \Phi_1 \ \ B \supset A\} .$$

Доведення. Кожний елемент алгебри $\mathbb{A}$ як скінченне диз'юнктне об'єднання елементів півкільця Φ – це елемент сім'ї Φ_1. Отже, і зліченне диз'юнктне об'єднання елементів алгебри $\mathbb{A}$ лежить в Φ_1. Залишається скористатись формулою

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) : \ B_k \in \mathbb{A}, A \subset \bigsqcup_{k=1}^{\infty} B_k \right\} ,$$

із заміною $\bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k$ на B.

Твердження 3. Для будь-якої множини $A \subset \Omega$ існує така множина $B \in \Phi_2$, що $A \subset B$ і $\mu^*(A) = \mu(B)$.

Доведення. За попереднім твердженням для будь-якого натурального n існує $B_n \in \Phi_1$, $B_n \supset A$ з $\mu(B_n) < \mu^*(A) + 1/n$. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що B_n утворюють спадний ланцюжок множин (інакше замінимо B_n на $B_n' = \bigcap_{k=1}^{n} B_k$). Перетин цього спадного ланцюжка і буде потрібною множиною. $\square$

Означення. Нехай (Ω, Σ, μ) – простір з мірою. Сім'я $\mathcal{M} \subset \Sigma$ називається **монотонним класом** множин, якщо вона задовольняє такі аксіоми:

A. Якщо $A, B \in \mathcal{M}$, $A \cap B = \varnothing$, то $A \cup B \in \mathcal{M}$.

B. Якщо $A, B \in \mathcal{M}$, $A \subset B$, то $B \backslash A \in \mathcal{M}$.

C. Якщо $A \in \Sigma$, $B \in \mathcal{M}$, $A \subset B$ і $\mu(B) = 0$, то $A \in \mathcal{M}$.

D. Якщо $A_n \in \mathcal{M}$, $n = 1, 2, \ldots,$ – зростаючий ланцюжок множин, то $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$.

Зазначимо, що з аксіоми A випливає, що монотонний клас стійкий щодо операції об'єднання скінченного числа попарно неперетинних множин. Звідси, застосувавши D, виводимо, що монотонний клас стійкий щодо об'єднання зліченного диз'юнктного набору множин.

Теорема про монотонний клас множин. Нехай (Ω, Σ, μ) – простір з мірою, одержаний продовженням міри μ з деякого півкільця з одиницею $\Phi \subset \Sigma$. Нехай, далі, $\mathcal{M} \subset \Sigma$ – монотонний клас множин, який містить всі елементи півкільця Φ. Тоді $\mathcal{M} = \Sigma$.

Доведення. Оскільки $\Omega \in \mathcal{M} \subset \Sigma$, то за аксіомою B монотонного класу разом з кожним своїм елементом A клас $\mathcal{M}$ містить і доповнення $\Omega \backslash A$. Перейшовши в аксіомі D до доповнень, отримуємо стійкість класу $\mathcal{M}$ щодо операції перетину спадної послідовності множин.

Введені вище сім'ї Φ_1 і Φ_2 лежать в $\mathcal{M}$. Згідно із твердженням 3, для будь-якої множини $A \in \Sigma$ міри 0 існує така множина $B \in \Phi_2 \subset \mathcal{M}$, що $A \subset B$ і $\mu(B) = 0$. Отже, за аксіомою C, будь-яка множина A міри 0 – це елемент класу $\mathcal{M}$. Нарешті, розглянемо довільну $A \in \Sigma$. Знову скористаємось твердженням 3 і виберемо таке $B \in \mathcal{M}$, що $A \subset B$ і $\mu(A) = \mu(B)$. Тоді $C = B \backslash A$ – це множина міри 0; отже, $C \in \mathcal{M}$. Залишилось застосувати аксіому B і отримати, що $A = B \backslash C \in \mathcal{M}$. $\square$

Вправа 9.7. Клас Φ_1 – це сім'я всіх множин, зображуваних у вигляді об'єднання скінченного або зліченного (не обов'язково диз'юнктного) набору елементів алгебри $\mathbb{A}$.
Вправа 9.8. Клас Φ_1 – це сім'я всіх множин, зображуваних у вигляді об'єднання скінченного або зліченного (не обов'язково диз'юнктного) набору елементів півкільця Φ.

Вправа 9.9. Клас множин Φ_1 стійкий щодо операції об'єднання скінченного або зліченного числа множин (які, можливо, перетинаються).

Вправа 9.10. Клас множин Φ_2 стійкий щодо операції перетину скінченного або зліченного числа множин.

Вправа 9.11. Обґрунтуйте включення $\Phi_2 \subset \mathcal{M}$ в доведенні останньої теореми.

Вправа 9.12. Де при завершенні доведення теореми використовувалась умова $A \in \Sigma$ (тобто вимірність)? Чи не можна у такий спосіб довести, що будь-яка підмножина $A \subset \Omega$ належить до $\mathcal{M}$?

Вправа 9.13. На відрізку $[0, 1]$ розглянемо півкільце (точніше, навіть алгебру) Φ множин, яка складається зі скінченних множин і їхніх доповнень. Доведіть, що клас Φ_1 у цьому випадку не буде алгеброю множин.

Вправа 9.14. В умовах попередньої вправи опишіть клас Φ_2. Доведіть, що в цьому випадку Φ_2 буде σ-алгеброю множин.
Вправа 9.15. Нехай Ω – множина, що складається з чотирьох точок, $\Sigma = 2^\Omega$, міра множини означається як кількість елементів цієї множини («лічильна міра»). Доведіть, що сім'я $\mathcal{M}$ усіх підмножин, які складаються з парної кількості елементів, – це монотонний клас, який не збігається з Σ. Чи не суперечить цей приклад останній теоремі?
Вправа 9.16. Доведіть такий варіант теореми про монотонний клас множин: нехай (Ω, Σ, μ) – простір з мірою, $\Phi \subset \Sigma$ – півкільце з одиницею, що породжує σ-алгебру Σ. Нехай, далі, $\mathcal{M} \subset 2^\Omega$ – монотонний клас множин, який містить всі елементи півкільця Φ. Тоді $\mathcal{M} \supset \Sigma$.