Функціональний аналіз II
Тема 1. Оператори у банахових просторах – загальна теорія
Лекції 1-2

Володимир Кадець

ХНУ ім. В.Н.Каразіна

Харків, 2020

Зміст лекції

Інформація про курс

– Назва дисципліни: Функціональний аналіз II.
– Лектор: Кадець Володимир Михайлович.
– Тривалість курсу: один семестр, наприкінці іспит.

Основна література:

Кадець В.М. Курс функціонального аналізу та теорії міри. Підручник. – Львів, 2012. – 590 с.

Допоміжна література:

Банах С., Курс функціонального аналізу, Київ, «Рад. школа», 1948.

Рудин У. Функциональный анализ. М., «Мир», 1975.

$C(K)$, $C[a, b]$;
ℓ_p, $L_p(\Omega, \Sigma, \mu) = L_p(\mu)$, $L_p[a, b]$ $\quad (1 \leqslant p < \infty)$;
ℓ_∞, $L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu) = L_\infty(\mu)$, $L_\infty[a, b]$;
c_0.
(Подробиці на "дошці").
Підпростір банахового простору – це замкнений лінійний підпростір, в нормі, що успадкована з вихідного простору.

Нормою лінійного оператора T, що діє з нормованого простору X в нормований простір Y, називається величина

$$\|T\| = \sup_{x \in S_X} \|Tx\| .$$

Твердження 1. Нехай $\|T\| < \infty$. Тоді для будь-якого $x \in X$ виконується нерівність $\|Tx\| \leqslant \|T\| \, \|x\|$.
Твердження 2. Нехай X, Y – нормовані простори. Для лінійного оператора $T\colon X \to Y$ такі умови еквівалентні:

(1) T неперервний;

(2) $\|T\| < \infty$;

(3) існує така стала $C > 0$, що для будь-якого $x \in X$ виконується оцінка $\|Tx\| \leqslant C \|x\|$.

Зауваження. Якщо виконується умова (3) попереднього твердження, то $\|T\| \leqslant C$. Цим міркуванням користуються при оцінці норми оператора.

Через $L(X, Y)$ позначатимемо простір всіх лінійних неперервних операторів з нормованого простору X в нормований простір Y.

На $L(X, Y)$ природним способом вводяться лінійні операції: якщо $T_1, T_2 \in L(X, Y)$ – оператори, λ_1, λ_2 – скаляри, то оператор $\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2 \in L(X, Y)$ діє за правилом $(\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2) x = \lambda_1 T_1 x + \lambda_2 T_2 x$.

Вище ми описали, як вводиться норма на $L(X, Y)$ – норма оператора, тобто простір операторів $L(X, Y)$ – це нормований простір.

Теорема 1. Нехай X, Y – нормовані простори, $T_n \colon X \to Y$ – лінійні оператори і для будь-якого $x \in X$ існує $\lim\limits_{n\to\infty} T_n x$. Тоді відображення $T \colon X \to Y$, задане рівністю $T(x) = \lim\limits_{n\to\infty} T_n x$, – лінійний оператор.

Доведення.

$$T(ax_1 + bx_2) = \lim_{n\to\infty} T_n(ax_1 + bx_2) =$$

$$= a \lim_{n\to\infty} T_n(x_1) + b \lim_{n\to\infty} T_n(x_2) = aT(x_1) + bT(x_2). \qquad \square$$

Послідовність лінійних операторів $T_n \colon X \to Y$ називається **поточково збіжною до оператора** $T \colon X \to Y$, , якщо $Tx = \lim\limits_{n\to\infty} T_n x$ для всіх $x \in X$.

Теорема 2. Нехай послідовність операторів $T_n \in L(X, Y)$ поточково збігається до оператора $T\colon X \to Y$ і $\sup_n \|T_n\| = C < \infty$. Тоді $T \in L(X, Y)$ і $\|T\| \leqslant C$.

Доведення.

Для будь-якого $x \in X$ маємо оцінку:
$\|Tx\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n x\| \leqslant C\|x\|$. □

Теорема 3. Якщо послідовність операторів $T_n \in L(X, Y)$ збігається до оператора T за нормою простору $L(X, Y)$, то вона збігається до T і поточково.

Доведення.

$$\|T_n x - Tx\| = \|(T_n - T)x\| \leqslant \|T_n - T\| \cdot \|x\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$ □

З поточкової збіжності не випливає збіжність за нормою.

Нехай $X = C[0,1]$, $Y = \mathbb{R}$ і оператори $T_n \in L(X,Y)$ діють за правилом $T_n(f) = f(0) - f(1/n)$. Послідовність операторів T_n прямує до 0 поточково, проте не прямує за нормою.

Вправи.

1.1. Відомий загальний факт (Josefson-Nissenzweig): на будь-якому нескінченновимірному нормованому просторі існує послідовність неперервних лінійних функціоналів, збіжна до 0 поточково, але не збіжна за нормою. Наведіть такі приклади у всіх відомих Вам нескінченновимірних нормованих просторах.

1.2. В умовах теореми 2 доведіть, що $\|T\| \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} \|T_n\|$.

Іншими словами, норма на $L(X,Y)$ напівнеперервна знизу щодо поточкової збіжності.

1.3. Введіть на $L(X,Y)$ таку топологію, щоб збіжність у цій топології була рівносильна поточковій збіжності.

Нехай X, Y – нормовані простори. Сім'я $G \subset L(X, Y)$ неперервних лінійних операторів називається поточково обмеженою, якщо для будь-якого $x \in X$

$$\sup_{T \in G} \|Tx\| < \infty.$$

Сім'я G називається рівномірно обмеженою, якщо

$$\sup_{T \in G} \|T\| < \infty.$$

Теорема (принцип рівномірної обмеженості: S.Banach, H.Steinhaus). Поточково обмежена сім'я неперервних лінійних операторів, які діють з банахового простору X в нормований простір Y, обмежена рівномірно.

Теорема Банаха-Штейнгауза. Поточково збіжна послідовність операторів $T_n \in L(X, Y)$, які діють з банахового простору X у нормований простір Y, рівномірно обмежена.

Критерій поточкової збіжності. Якщо рівномірно обмежена послідовність операторів $T_n \in L(X, Y)$ з нормованого простору X у нормований простір Y збігається поточково на щільній підмножині $A \subset X$ до оператора $T \in L(X, Y)$ (тобто $\lim\limits_{n\to\infty} T_n x \to Tx$ для всіх $x \in A$), то T_n збігається до T поточково на всьому X (тобто $\lim\limits_{n\to\infty} T_n x \to Tx$ для всіх $x \in X$).

Вправи.

1.4. Нехай X, Y – метричні простори, A – щільна підмножина в X, $f_n, f\colon X \to Y$ – функції, що задовольняють умову Ліпшиця зі спільною сталою C. Тоді з поточкової збіжності на A послідовності (f_n) до f випливає поточкова збіжність на всьому X.

1.5. Нехай X, Y – банахові простори, A – щільна підмножина в X. Для того, щоб послідовність операторів $T_n \in L(X, Y)$ поточково збігалась на X і її границя була неперервним оператором, необхідно і достатньо, щоб одночасно виконувались такі умови:

(1) послідовність (T_n) обмежена;

(2) для будь-якого $x \in A$ послідовність значень $(T_n x)$ фундаментальна.

Нехай X – лінійний простір, X_1 – підпростір в X. Введемо таке відношення еквівалентності на X: $x \sim y$, якщо $x - y \in X_1$. Класом еквівалентності елемента x є множина

$$[x] = x + X_1 = \{x + y : \ y \in X_1\}.$$

Множина таких класів еквівалентності, наділена операціями

$$\lambda[x] = [\lambda x],$$

$$[x_1] + [x_2] = [x_1 + x_2],$$

називається фактор-простором простору X за підпростором X_1 і позначається X/X_1.

З фактор-простором тісно пов'язаний оператор q – фактор-відображення простору X на $X/X_1 : q(x) = [x]$. Лінійність оператора фактор-відображення випливає із означення лінійних операцій на фактор-просторі. Оператор фактор-відображення сюр'єктивний.

Нехай X, Y – лінійні простори, $T\colon X \to Y$ – лінійний оператор, взагалі кажучи, не ін'єктивний.
Ін'єктивізацією оператора T називається відображення

$$\tilde{T}\colon X/\mathrm{Ker}\, T \to Y,$$

яке ставить у відповідність класу еквівалентності $[x]$ елемента $x \in X$ елемент Tx:

$$\tilde{T}([x]) = Tx.$$

Перевірка коректності та малюнок на "дошці".

Нехай Y – замкнений підпростір нормованого простору X, $x \in X$ – довільний елемент, $[x] = x + Y$ – відповідний елемент фактор-простору X/Y. Означимо таку величину:

$$\|[x]\| = \inf_{y \in Y} \|x + y\| .$$

Іншими словами, $\|[x]\|$ – це відстань в X від 0 до множини $x+Y$. Оскільки Y – підпростір і, відтак, $Y = -Y$, то означення можна переписати наступним чином:

$$\|[x]\| = \inf_{y \in Y} \|x - y\| .$$

Геометричний зміст цього означення: $\|[x]\|$ – це відстань в X від x до підпростору Y.

Теорема 4. Введена вище величина $\|[x]\|$ задає норму на просторі X/Y.

Доведення. Перевіримо аксіоми норми.
1. Нехай $\|[x]\| = 0$. Тоді $\inf_{y \in Y} \|x - y\| = 0$, і, отже, x – гранична точка підпростору Y. Оскільки Y замкнений, $x \in Y$ і $[x] = Y = [0]$.
2. Оскільки Y – підпростір, $\lambda Y = Y$ для будь-якого ненульового скаляра λ. Маємо:

$$\|[\lambda x]\| = \inf_{y \in Y} \|\lambda x + y\| = \inf_{y \in Y} \|\lambda x + \lambda y\|$$

$$= |\lambda| \inf_{y \in Y} \|x + y\| = |\lambda| \cdot \|[x]\|.$$

3. Нехай $x_1, x_2 \in X$, $\varepsilon > 0$. Згідно з означенням інфімума існують такі $y_1, y_2 \in Y$, що $\|x_1 + y_1\| < \|[x_1]\| + \varepsilon$ і $\|x_2 + y_2\| < \|[x_2]\| + \varepsilon$. Отримуємо оцінку

$$\|[x_1 + x_2]\| = \inf_{y \in Y} \|x_1 + x_2 + y\| \leqslant \|x_1 + x_2 + y_1 + y_2\| \leqslant$$

$$\leqslant \|x_1 + y_1\| + \|x_2 + y_2\| \leqslant \|[x_1]\| + \|[x_2]\| + 2\varepsilon,$$

що з огляду на довільність ε означає потрібну нерівність трикутника.

Надалі завжди будемо припускати, що фактор-простір нормованого простору наділений описаною вище нормою.

Приклади на “дошці”.

Теорема 5. Нехай X – банаховий простір, Y – замкнений лінійний підпростір в X. Тоді фактор-простір X/Y – також банаховий простір.

Доведення.

Нехай $x_n \in X$ такі, що норми відповідних класів еквівалентності утворюють абсолютно збіжний ряд: $\sum_n \|[x_n]\| < \infty$. Згідно з критерієм повноти, потрібно довести, що ряд $\sum_n [x_n]$ збігається до деякого елемента фактор-простору.

Для цього в кожному класі $[x_n]$ виберемо по такому представнику y_n, що $\|y_n\| \leqslant \|[x_n]\| + \frac{1}{2^n}$. Тоді $\sum_n y_n$ – абсолютно збіжний ряд в X, що з огляду на повноту простору означає, що $\sum_n y_n$ збігається в X до деякого елемента x. Перевіримо, що $\sum [x_n] = [x]$. Справді,

$$\left\|[x] - \sum_{k=1}^{n} [x_k]\right\| = \left\|[x] - \sum_{k=1}^{n} [y_k]\right\| = \left\|\left[x - \sum_{k=1}^{n} y_k\right]\right\|$$

$$\leqslant \left\|x - \sum_{k=1}^{n} y_k\right\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \qquad \square$$

Теорема 6. Нехай X – банаховий простір, Y – замкнений лінійний підпростір в X, X/Y – фактор-простір q – фактор-відображення. Тоді $q(B_X) = B_{X/Y}$ і $\|q\| = 1$.

Доведення. На "дошці".

Вправи.

1.6. Нехай X, Y – нормовані простори, $T\colon X \to Y$ – неперервний лінійний оператор. Перевірте, що ін'єктивізація $\tilde{T}$ оператора T – це неперервний лінійний оператор і $\|\tilde{T}\| = \|T\|$.

1.7. Нехай X – нормований простір, $x \in X$, $f \in X^*$, a – довільний скаляр, $A = \{x \in X : f(x) = a\}$. Тоді

$$\rho(x, A) = \frac{|f(x) - a|}{\|f\|}.$$

Зокрема, підставив $a = 0$ отримуємо, що

$$\rho(x, \ker f) = \frac{|f(x)|}{\|f\|}.$$