Теорія міри і інтеграла
Тема 3: Продовження мір
Лекція 8

Володимир Кадець

ХНУ ім. В.Н.Каразіна

Харків, 2020

Зміст лекції

Нехай Ω – множина із заданою на ній алгеброю підмножин $\mathbb{A}$ і зліченно-адитивною мірою μ, $A \subset \Omega$ – довільна множина. Зовнішньою мірою множини A називається величина

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) : \ A_k \in \mathbb{A}, A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right\}.$$

Зовнішня міра означена вже на всіх підмножинах множини Ω, але на такому широкому класі множин вона не має навіть скінченної адитивності. У подальшому нами буде побудовано σ-алгебру множин $\Sigma \supset \mathbb{A}$, на якій μ^* буде зліченно-адитивною мірою, чим буде розв'язано задачу продовження міри μ.
Для початку проведемо деяку підготовчу роботу.

Властивості зовнішньої міри:

1. Монотонність: якщо $A \subset B$, то $\mu^*(A) \leqslant \mu^*(B)$.
2. Напівадитивність: для будь-яких $A, B \subset \Omega$ справджується нерівність $\mu^*(A \cup B) \leqslant \mu^*(A) + \mu^*(B)$.
3. Зліченна напівадитивність: якщо $A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k$, то $\mu^*(A) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu^*(B_k)$.
4. $\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) : \ B_k \in \mathbb{A}, A \subset \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k \right\}$.
5. Якщо $A \in \mathbb{A}$, то $\mu^*(A) = \mu(A)$, тобто μ^* – це продовження міри μ.

Доведення.

1. Монотонність: якщо $A \subset B$, то $\mu^*(A) \leqslant \mu^*(B)$.

Порівняємо:

$$\mu^*(A) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) : \ A_k \in \mathbb{A}, A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right\},$$

$$\mu^*(B) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) : \ A_k \in \mathbb{A}, B \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right\}.$$

Бачимо, що для $\mu^*(A)$ інфімум в означенні береться за ширшою сім'єю наборів $\{A_k\}_1^{\infty}$, ніж для $\mu^*(B)$: якщо $B \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, то й $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. А інфімум за ширшою сім'єю не перевищує інфімума за вужчою.

2. Напівадитивність: для будь-яких $A, B \subset \Omega$ справджується нерівність $\mu^*(A \cup B) \leqslant \mu^*(A) + \mu^*(B)$.

Знову замість інфімума за всіма покриттями розглянемо інфімум за вужчим класом

$$\mu^*(A \cup B) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\mu(D_k) : \ D_k \in \mathbb{A}, A \cup B \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k\right\}$$

$$\leqslant \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\mu(A_k) + \sum_{k=1}^{\infty}\mu(B_k) : A_k, B_k \in \mathbb{A}, A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, B \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right\}$$

$$= \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

3. Зліченна напівадитивність: якщо $A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k$, то

$$\mu^*(A) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(B_k).$$

Доводиться так само.

4. $\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) : \ B_k \in \mathbb{A}, A \subset \bigsqcup_{k=1}^{\infty} B_k \right\}.$

Нехай $A \subset \Omega$ – довільна множина. Позначимо

$$\nu(A) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) : \ B_k \in \mathbb{A}, A \subset \bigsqcup_{n=1}^{\infty} B_k \right\}.$$

Нагадаємо, що для будь-якого набору $A_k \in \mathbb{A}$, $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, існує диз'юнктний набір $B_k \in \mathbb{A}$, $A \subset \bigsqcup_{k=1}^{\infty} B_k$, який задовольняє умову $B_k \subset A_k$. Для цього набору $\mu(B_k) \leqslant \mu(A_k)$ і, відповідно, $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$. Отже,

$$\nu(A) \leqslant \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) : \ A_k \in \mathbb{A}, A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right\} = \mu^*(A).$$

Обернена нерівність випливає з того, що інфімум в означенні $\nu(A)$ береться за вужчим класом множин, ніж в означенні зовнішньої міри.

5. Якщо $A \in \mathbb{A}$, то $\mu^*(A) = \mu(A)$, тобто μ^* – це продовження міри μ.

Нехай $A \in \mathbb{A}$, $A_k \in \mathbb{A}$ і $A \subset \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$. Приймемо $B_k = A \cap A_k$. Тоді $B_k \in \mathbb{A}$, $A = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k$ і $\mu(B_k) \leqslant \mu(A_k)$. Скористаємось зліченною адитивністю міри μ:

$$\mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Перейшовши до інфімума по всіх таких наборах $\{A_k\}_1^{\infty}$, одержуємо нерівність $\mu(A) \leqslant \mu^*(A)$. Обернену нерівність отримаємо, якщо в означенні зовнішньої міри підставимо такий конкретний набір $\{A_k\}_1^{\infty}$: $A_1 = A$, $A_k = \varnothing$ $(k \geqslant 2)$.

Введемо на сім'ї всіх підмножин множини Ω псевдометрику, породжену зовнішньою мірою: $\rho(A, B) = \mu^*(A \triangle B)$.

Властивості псевдометрики ρ:

1. Для будь-яких множин $A, B, C \subset \Omega$ правильна нерівність трикутника: $\rho(A, C) \leqslant \rho(A, B) + \rho(B, C)$ (цим обґрунтовується законність вживання терміну «псевдометрика» щодо ρ).
2. $|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leqslant \rho(A, B)$ для будь-яких $A, B \subset \Omega$. Зокрема, зовнішня міра неперервна щодо ρ.
3. $\rho(A, B) = \rho(\Omega \backslash A, \Omega \backslash B)$, тобто перехід до доповнення – це ізометрія.
4. $\rho(A_1 \cap A_2, B_1 \cap B_2) \leqslant \rho(A_1, B_1) + \rho(A_2, B_2)$.
5. $\rho(\bigcup\limits_{n \in M} A_n, \bigcup\limits_{n \in M} B_n) \leqslant \sum\limits_{n \in M} \rho(A_n, B_n)$ для будь-яких скінченних або зліченних наборів множин $A_n, B_n \subset \Omega$.

Доведення. Для кожної з перелічених властивостей випишемо співвідношення, з яких воно випливає:

1. $\rho(A, C) \leqslant \rho(A, B) + \rho(B, C)$.

$$A \triangle C \subset (A \triangle B) \cup (B \triangle C).$$

2. $|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leqslant \rho(A, B)$ для будь-яких $A, B \subset \Omega$.

$$A \subset B \cup (A \triangle B), \quad B \subset A \cup (A \triangle B).$$

3. $\rho(A, B) = \rho(\Omega \backslash A, \Omega \backslash B)$.

$$(\Omega \backslash A) \triangle (\Omega \backslash B) = A \triangle B.$$

4. $\rho(A_1 \cap A_2, B_1 \cap B_2) \leqslant \rho(A_1, B_1) + \rho(A_2, B_2)$.

$$\left(\bigcap_{n \in M} A_n\right) \triangle \left(\bigcap_{n \in M} B_n\right) \subset \bigcup_{n \in M} (A_n \triangle B_n).$$

5. $\rho(\bigcup_{n \in M} A_n, \bigcup_{n \in M} B_n) \leqslant \sum_{n \in M} \rho(A_n, B_n)$.

$$\left(\bigcup_{n \in M} A_n\right) \triangle \left(\bigcup_{n \in M} B_n\right) \subset \bigcup_{n \in M} (A_n \triangle B_n).$$

Множину $A \subset \Omega$ назвемо вимірною, якщо вона належить до замикання за ρ сім'ї $\mathbb{A}$. Сім'ю всіх вимірних підмножин множини Ω позначимо через Σ. Детальніше: $A \in \Sigma$ тоді і тільки тоді, коли для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $B \in \mathbb{A}$, що $\rho(A, B) < \varepsilon$.

Очевидно, $\mathbb{A} \subset \Sigma$. Зазначимо, що клас вимірних множин залежить не лише від вихідної алгебри $\mathbb{A}$, але й від міри μ. Якщо треба підкреслити, що вимірні множини, які розглядаються, породжені саме мірою μ, їх називають не просто вимірними, а μ-вимірними.

Приклад. Якщо $\mu^*(A) = 0$, то A вимірна.

Лема 1. Нехай $A \subset \Omega$ і для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $B \in \Sigma$, що $\rho(A, B) < \varepsilon$. Тоді $A \in \Sigma$.

Доведення. Можна просто обмежитись тим, що замикання множини – це замкнена множина. Розпишемо детальніше. Виберемо $B \in \Sigma$ таку, що $\rho(A, B) < \frac{\varepsilon}{2}$. За означенням вимірної множини для цього B існує $C \in \mathbb{A}$ з $\rho(B, C) < \frac{\varepsilon}{2}$. За нерівністю трикутника $\rho(A, C) < \varepsilon$. $\square$

Лема 2. Об'єднання зліченного числа елементів алгебри $\mathbb{A}$ вимірне.

Доведення. Нехай $A_n \in \mathbb{A}$ – диз'юнктна послідовність, $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Оскільки $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leqslant \mu(\Omega)$, то ряд збігається, і для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує такий номер n, що $\sum_{k=n+1}^{\infty} \mu(A_k) < \varepsilon$. Позначимо $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ через B. Маємо: $B \in \mathbb{A}$ і

$$\rho(A, B) = \mu^* \left(\bigcup_{k=n+1}^{\infty} A_k \right) \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \mu(A_k) < \varepsilon. \qquad \square$$

.

Теорема 1. Сім'я Σ всіх вимірних підмножин множини Ω утворює σ-алгебру.

Доведення. По-перше, $\Omega \in \Sigma$, адже $\Omega \in \mathbb{A}$. Далі, нехай $A \in \Sigma$, а $A_n \in \mathbb{A}$ – послідовність, що апроксимує A: $\rho(A, A_n) \to 0$ при $n \to \infty$. Тоді $\Omega \setminus A_n \in \mathbb{A}$ і

$$\rho(\Omega \setminus A, \Omega \setminus A_n) = \rho(A, A_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

Тобто $\Omega \setminus A \in \Sigma$. Залишилось перевірити стійкість щодо операції зліченного об'єднання. Нехай $A_n \in \Sigma$, $n = 1, 2, \ldots$. Виберемо множини $B_n \in \mathbb{A}$ у такий спосіб, щоб була правильною оцінка $\rho(A_n, B_n) \leqslant \varepsilon 2^{-n}$. Тоді $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ – це вимірна множина, яка апроксимує $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ з точністю до ε:

$$\rho\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\Big) \leqslant \sum_{n \in \mathbb{N}} \rho(A_n, B_n) = \varepsilon. \qquad \square$$

Спробуйте довести самі, що зовнішня міра μ^* на σ-алгебрі Σ буде зліченно-адитивною.