Теорія міри і інтеграла
Тема 3: Продовження мір
Лекція 7

Володимир Кадець

ХНУ ім. В.Н.Каразіна

Харків, 2020

Часто міри спочатку є означеними природним чином на деякому відносно вузькому класі множин, і, перед тим як почати ними користуватись, їх потрібно доозначити на множинах з ширшого класу. Така ситуація трапляється навіть у шкільному курсі математики: площа означається спочатку для прямокутників, потім для трикутників, потім – через розбиття на менші частини – для довільних багатокутників. Через наближення круга багатокутниками означається площа круга. Подібний шлях треба пройти для означення об'єму. У цьому підрозділі ми вивчимо загальну схему продовження мір і застосуємо її для побудови найважливішого для нас прикладу – міри Лебега на відрізку.

Чому скінченно-адитивна міра μ, задана на сім'ї Φ не завжди продовжується до скінченно-адитивної міри, заданої на алгебрі $\mathbb{A}(\Phi)$, а якщо продовжується, то не завжди єдиним чином (на "дошці").

Сім'я Φ підмножин множини Ω називається півкільцем з одиницею, якщо:

1. $\Omega \in \Phi$.
2. Якщо $A, B \in \Phi$, то й $A \cap B \in \Phi$.
3. Для будь-якої множини $A \in \Phi$ її доповнення $\Omega \backslash A$ може бути зображено як об'єднання скінченного числа попарно неперетинних елементів сім'ї Φ.

Для множини $A \subset \Omega$ базовим зображенням назвемо зображення у вигляді $A = \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k$, де $A_k \in \Phi$. Зрозуміло, що можуть знайтися множини, які не мають базового зображення.

Теорема 1. Нехай Φ – півкільце з одиницею. Тоді сім'я $\mathbb{A}$ всіх множин, які мають базові зображення, утворює найменшу алгебру $\mathbb{A}(\Phi)$, що містить Φ.

Доведення. Доведемо, що $\mathbb{A}$ – алгебра множин.

1. Нехай $A, B \in \mathbb{A}$; $A = \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k$, $B = \bigsqcup_{j=1}^{m} B_k$ – відповідні базові зображення. Тоді $A \cap B = \bigsqcup_{k=1}^{n} \bigsqcup_{j=1}^{m} A_k \cap B_j$ – базове зображення для $A \cap B$. Тобто сім'я $\mathbb{A}$ стійка щодо операції перетину скінченного числа множин.

2. Доведемо, що сім'я $\mathbb{A}$ стійка щодо операції доповнення. Нехай $A = \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k$ – довільний елемент з $\mathbb{A}$, $\{A_k\}_{k=1}^{n} \subset \Phi$. За аксіомою 3 півкільця з одиницею всі множини $\Omega \backslash A_k$ належать до $\mathbb{A}$. Отже, за вже доведеним, $\Omega \backslash A = \bigcap_{k=1}^{n} (\Omega \backslash A_k) \in \mathbb{A}$.

Відтак, $\mathbb{A}$ – алгебра. Залишилось зауважити, що будь-яка алгебра множин, яка містить всі елементи півкільця Φ, повинна містити і всі їх скінченні об'єднання, тобто всі елементи сім'ї $\mathbb{A}$. Цим доведено, що $\mathbb{A} = \mathbb{A}(\Phi)$. $\square$

Теорема 2. Будь-яка скінченно-адитивна міра μ, задана на півкільці з одиницею Φ, єдиним способом продовжується до скінченно-адитивної міри, заданої на алгебрі $\mathbb{A}(\Phi)$, яка породжена сім'єю Φ.

Доведення. Почнемо з єдиності. Нехай μ' – деяке продовження на $\mathbb{A}(\Phi)$ міри μ, $A = \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k$ – базове зображення довільного елемента алгебри $\mathbb{A}(\Phi)$. Тоді

$$\mu'(A) = \sum_{k=1}^{n} \mu'(A_k) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k).$$

Отже, $\mu'(A)$ однозначно визначається мірою μ.

Перевіримо тепер, що отриманий вище вираз

$$\mu'(A) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$$

справді задає скінченно-адитивну міру на $\mathbb{A}(\Phi)$. Почнемо з перевірки коректності такого означення, тобто з того, що $\mu'(A)$ визначається множиною A, а не вибором його базового зображення. Нехай $A = \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k$ і $A = \bigsqcup_{j=1}^{m} B_k$ – два різних базових зображення множини $A \in \mathbb{A}(\Phi)$. Введемо у розгляд множини $C_{i,j} = A_i \cap B_j$. Ці множини попарно не перетинаються, $A_i = \bigsqcup_{j=1}^{m} C_{ij}$; $B_j = \bigsqcup_{i=1}^{n} C_{ij}$. Маємо

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} \mu(C_{ij}) \right) = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \mu(C_{ij}) \right) = \sum_{j=1}^{m} \mu(B_j).$$

Залишилось перевірити скінченну адитивність міри μ'. Нехай $A, B \in \mathbb{A}(\Phi)$ – диз'юнктні множини, $A = \bigsqcup_{j=1}^{m} A_j$, $B = \bigsqcup_{j=1}^{m} B_j$ – їхні базові зображення. Множини A_k і B_j, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$ в сукупності утворюють базове зображення для $A \cup B$. Отже,

$$\mu'(A \cup B) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) + \sum_{j=1}^{m} \mu(B_j) = \mu'(A) + \mu'(B). \qquad \square$$

Теорема 3. Нехай μ – зліченно-адитивна міра на півкільці з одиницею Φ, μ' – її продовження на алгебру $\mathbb{A} = \mathbb{A}(\Phi)$, побудоване в теоремі 2. Тоді μ' також є зліченно-адитивною мірою.

Доведення. Нехай $A_n \in \mathbb{A}$, $n = 1, 2, \ldots,$ – диз'юнктна послідовність множин та їх об'єднання $B = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n$ також належить до алгебри $\mathbb{A}$. Далі, нехай $B = \bigsqcup_{j=1}^{m} B_j$ – базове зображення для B, $A_k = \bigsqcup_{i=1}^{m_k} A_{ki}$ – базові зображення для A_k. Тоді

$$B_j = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} (A_k \cap B_j) = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} \bigsqcup_{i=1}^{m_k} (A_{ki} \cap B_j)$$

і всі множини, що входять в останнє зображення, належать до півкільця Φ.

З огляду на зліченну адитивність міри μ на Φ,

$$\mu(B_j) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{m_k} \mu(A_{ki} \cap B_j).$$

Отже, $\mu'(B) = \sum_{j=1}^{m} \mu(B_j) = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{m_k} \mu(A_{ki} \cap B_j) \right)$
$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{m_k} \mu(A_{ki} \cap B_j) \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu' \left(\bigsqcup_{i=1}^{m_k} \bigsqcup_{j=1}^{m} A_{ki} \cap B_j \right)$
$= \sum_{k=1}^{\infty} \mu' (A_k).$ $\square$

Нехай Φ – сім'я множин, $\mu\colon \Phi \to \mathbb{R}^+$. Функція множини μ називається зліченно-напівадитивною, якщо для будь-яких $A, B_k \in \Phi$ із включення $A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k$ випливає, що $\mu(A) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(B_k)$.

Теорема 4 (критерій зліченної адитивності). Нехай μ – скінченно-адитивна міра на півкільці з одиницею Φ, яка задовольняє умови зліченної напівадитивності. Тоді μ зліченно-адитивна.

Доведення. Нехай $A, B_k \in \Phi$, $A = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k$. Потрібно довести, що $\mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k)$, а для цього, з огляду на дану за умовою зліченну напівадитивність, достатньо довести нерівність $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) \leqslant \mu(A)$. Нехай μ' – продовження міри μ на алгебру $\mathbb{A}(\Phi)$, побудоване в теоремі 2. З включення $A \supset \bigsqcup_{k=1}^{n} B_k$ і вже доведеної скінченної адитивності міри μ' виводимо, що

$$\mu(A) = \mu'(A) \geqslant \mu'\left(\bigsqcup_{k=1}^{n} B_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu'(B_k) = \sum_{k=1}^{n} \mu(B_k).$$

Залишається спрямувати n до нескінченності. □

Доведення. Нехай $A, B_k \in \Phi$, $A = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} B_k$. Потрібно довести, що $\mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k)$, а для цього, з огляду на дану за умовою зліченну напівадитивність, достатньо довести нерівність $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) \leqslant \mu(A)$. Нехай μ' – продовження міри μ на алгебру $\mathbb{A}(\Phi)$, побудоване в теоремі 2. З включення $A \supset \bigsqcup_{k=1}^{n} B_k$ і вже доведеної скінченної адитивності міри μ' виводимо, що

$$\mu(A) = \mu'(A) \geqslant \mu'\left(\bigsqcup_{k=1}^{n} B_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu'(B_k) = \sum_{k=1}^{n} \mu(B_k).$$

Залишається спрямувати n до нескінченності. □

Вправа 7.1. Нехай Φ – сім'я всіх трикутників на площині (трикутники розглядаються разом із внутрішністю). Для кожного $A \in \Phi$ через $r(A)$ позначимо радіус вписаного у трикутник A кола. Перевірте, що функція множини r – зліченно-напівадитивна на Φ. Чи буде r скінченно-адитивною мірою на Φ?

В чому полягає проблема і чому вона потребує більших зусиль (на “дошці”).

Ідея лебегівського продовження (на “дошці”).

Нехай Ω – множина із заданою на ній алгеброю підмножин $\mathbb{A}$ і зліченно-адитивною мірою μ, $A \subset \Omega$ – довільна множина. Зовнішньою мірою множини A називається величина

$$\mu^*(A) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\mu(A_k) : \ A_k \in \mathbb{A}, A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right\}.$$