

Касательное пространство гладкого многообразия

Удобавился от $\gamma: M \rightarrow \mathbb{R}^n$! Для этого нужен одно из св-в за def

Пусть M - k -м. многообразие, $k \geq 1$.

def. Касательным вектором M в $p \in M$ наз. линейное

$\nu: C^k(M) \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющее

$$\nu(fg) = \nu(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot \nu(g) \quad \forall f, g \in C^k(M) \text{ (правило Лейбница)}.$$

Лем. Линейность: $\nu(\lambda f + \mu g) = \lambda \nu(f) + \mu \nu(g) \quad \forall f, g \in C^k(M), \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$\nu(f)$ - преобразованная f по ν - (в напр. ν)

Лем. Оба этих условия линейны отн. ν , т.е. для кас.

векторов ν, w в p и $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ $\lambda \nu + \mu w: f \mapsto \lambda \nu(f) + \mu w(f)$ -

тоже кас. вектор в p (Упр.)

Соч. Мно-во кас. векторов M в p образует вект.

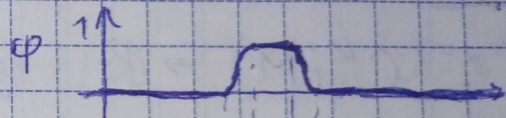
попр-во в $C^k(M)^*$.

def. Пр-во кас. векторов M в p наз. касательным пространством M в p обозн. $T_p M$.

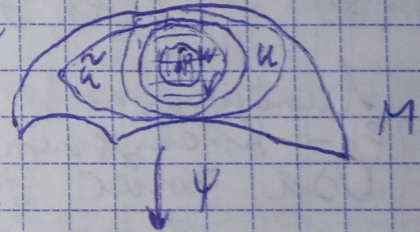
Рн. $\forall p \in M \forall$ окр. $U \ni p \exists$ открытые V, W : $p \in W, \overline{W} \subset V, \overline{V} \subset U$ и $\exists \varphi \in C^k(M)$: $\varphi(M) = [0, 1], \varphi(p) = 0 \Leftrightarrow p \in M \setminus V$ и $\varphi(p) = 1 \Leftrightarrow p \in \overline{W}$.

Рем. П.е. φ -м. φ -гнз Урысона накр. мн-во $\overline{W}$ и $M \setminus V$.

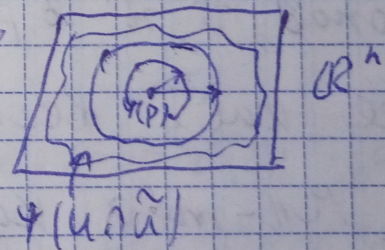
Пусть $(\tilde{U}, \psi)$ - карта в окр-ти



$p, \psi(U \cap \tilde{U})$ - окр. окр. $\psi(p)$ в $\mathbb{R}^n$ ($n = \dim M$), поэтому $\exists \chi > 0$: $B_\chi(\psi(p)) \subset \psi(U \cap \tilde{U})$.



Для $\rho < \chi$ обозначим $\tilde{B}_{\rho, p}(p) := \psi^{-1}(B_\rho(\psi(p))) \subset \psi^{-1}(B_\chi(\psi(p))) \subset U \cap \tilde{U}$ - окр. окр-ть



p . Покажем, что $\forall \rho \tilde{D}_\rho(p) :=$

$\psi^{-1}(\tilde{D}_\rho(\psi(p))) = \tilde{B}_{\rho, p}(p)$. Действительно,

т.к. ψ -гомео-зм и $\tilde{D}_\rho(\psi(p))$ - компакт,

$\tilde{D}_\rho(p)$ - компакт $\Rightarrow [M\text{-хаусд.}] \Rightarrow \tilde{D}_\rho(p)$ - замкнуто

Тл.к. $\tilde{B}_g(p) \subset \tilde{D}_g(p)$, $\overline{\tilde{B}_g(p)} \subset \tilde{D}_g(p)$ и наоборот,
 $\forall q \in \tilde{D}_g(p)$ и $\forall$ ее окр-ти (откр.) $\tilde{U} \ni q$ $\psi(\tilde{U} \cap \tilde{U})$ -
 откр. в $\mathbb{R}^n$ и $\sqrt[n]{\psi(q)} \in \tilde{D}_g(\psi(p)) = \tilde{B}_g(\psi(p))$. Тл.е.

$\psi(\tilde{U} \cap \tilde{U}) \cap \tilde{B}_g(\psi(p)) \neq \emptyset \Rightarrow \tilde{U} \cap \tilde{U} \cap \tilde{B}_g(p) \neq \emptyset$, т.е.

$\tilde{U}$ содержит точку $\tilde{B}_g(p)$: $q \in \tilde{B}_g(p)$. Получили $\tilde{D}_g(p) \subset \overline{\tilde{B}_g(p)}$.

Получим $W := \tilde{B}_{\frac{1}{3}}(p) \Rightarrow \overline{W} = \tilde{D}_{\frac{1}{3}}(p)$;

$V := \tilde{B}_{\frac{24}{5}}(p) \Rightarrow \overline{V} = \tilde{D}_{\frac{24}{5}}(p)$.

По постро., $\overline{W} \subset V$ и $\overline{V} \subset U$; построим $\varphi: M \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\varphi(q) := \begin{cases} \beta_{\frac{1}{3}, \frac{24}{5}}(|\psi(q) - \psi(p)|) & , q \in \tilde{U} \\ 0 & , q \notin \tilde{U} \end{cases}, \text{ где}$$

β - из леммы Тл. Гуркина. Заметим, что верхняя φ -ча

k -значная (β -о-м.) и равна 0 на $\tilde{U} \setminus V$, в ч-ти

на открытом $\tilde{U} \setminus \overline{V} = (M \setminus \overline{V}) \cap \tilde{U}$ - перес. k -тов откр. покр. M .

Тл.е. φ непрерывная, k -м. (лок. св-во) и удовл. условиям Δ

Рп.1. (локальность дифференцирования). Пусть $f, g \in C^k(M)$,
 U - откp.: $f|_U = g|_U$. Тогда $\forall p \in U \quad \forall v \in T_p M$
 $v(f) = v(g)$.

► Применим к U и p пред. Рп. и получим V, w, φ .
 Тогда φ -диа $h := \varphi(f-g) = 0$, т.к. $f-g=0$ на U
 и $\varphi=0$ на $M \setminus U$. В силу линейности,

$$0 = v(h) = \underbrace{v(\varphi)}_0 (f(p) - g(p)) + \underbrace{\varphi(p)}_1 (v(f) - v(g)) \Rightarrow v(f) = v(g) \triangle$$

Лем Заметим, что в док-ве Рп. о φ -диах y . $(\tilde{B}_\epsilon(p), \varphi)$ -
 карта U в окр-ти p как n -мерного мп. (сo образом
 $B_\epsilon(\varphi(p)) \cong \mathbb{R}^n$, дополнив стандартным диффео-изм получим $\rightarrow \mathbb{R}^n$).

Зам. Эти карты задают на U м. Структуру, однозначно опре-
 м. структурой M и единственной, для которой $i: U \rightarrow M$ задает

в φ -ти, можно говорить о $C^k(U)$.

Упр. $\forall$ карты (U, φ) её коорд. φ -гип $x_i \in C^k(U)$.

Рл.2. Пусть $f \in C^k(U)$. Тогда $\exists \bar{f} \in C^k(M)$ и отпр. $W \subset U$: $f|_W = \bar{f}|_W$.

$\triangleright$ Просто берём W и φ из Рл. 0 $\varphi. \mathcal{U}$ и определяем

$$\bar{f}(q) = \begin{cases} \varphi(q)f(q), & q \in U \\ 0, & q \notin U \end{cases}$$

Ан-но построенная φ , т.к. $\varphi \bar{f} = 0$ на $U \setminus V$, она пер. и k -м. Пусть $q \in \bar{W}$ $\varphi(q) = 1 \Rightarrow f(q) = \bar{f}(q)$ $\triangle$

Рем. Для $f \in C^k(U)$ и $p \in U$ построим "частичное продолжение"

$\bar{f} \in C^k(M)$: $f|_U = \bar{f}|_U$ для $p \in U \subset M$ по Рл.2. Для $v \in \text{Tr}_M$

положим $v(f) := v(\bar{f})$. В силу Рл.1, $v(f)$ не зависит

от выбора продолжения, т.е. мы построили э-м Tr_U ,

соотв. v и набором : для $v \in \text{Tr}_U$ и $f \in C^k(M)$ положим

$v(f) := v(f|_U)$. Очевидно, соотв. v_i и линейно.

Сол. $\exists$ естественный лн. изоморфизм между Tr_M и $\text{Tr}_U \forall p \in U$.

Ex. Пусть $p \in M$, (U, φ) - карта в окр-ти p с лок. коорд.
 $(x^1, \dots, x^n)$. Для $f \in C^k(M)$, $i = \overline{1, n}$, положим $\frac{\partial}{\partial x^i}(f) := \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i}(\varphi(p))$
 $(= \frac{\partial f}{\partial x^i}(p))$. Очевидно, $\frac{\partial}{\partial x^i} \in T_p M$.

Рм. $\forall p \in M \forall v \in T_p M \exists! (v^1, \dots, v^n) \in \mathbb{R}^n: v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$
 $\Rightarrow$ Если $v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, то $\forall j = \overline{1, n} \quad v(x^j) = v^i \frac{\partial x^j}{\partial x^i}(p) = v^i \delta_i^j = v^j$

Э. Положим теперь $v^i = v(x^i)$, $i = \overline{1, n}$.

Лем. $\forall f \in C^k(M) \exists! f_1, \dots, f_n \in C^k(U): f|_U = f(p) + f_i(x^i - x_0^i)$,
 где $(x_0^1, \dots, x_0^n) = \varphi(p)$.

$$\Rightarrow (f \circ \varphi^{-1})(x^1, \dots, x^n) - \underbrace{(f \circ \varphi^{-1})(x_0^1, \dots, x_0^n)}_{f(p)} = \int_0^1 \frac{d}{dt} (f \circ \varphi^{-1})(tx^1 + (1-t)x_0^1, \dots, tx^n + (1-t)x_0^n) dt =$$

$$= (x^i - x_0^i) \int_0^1 \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i}(tx^1 + (1-t)x_0^1, \dots, tx^n + (1-t)x_0^n) dt = (f_i \circ \varphi^{-1})(x^1, \dots, x^n) \quad \text{гдe } f_i \in C^k(U)$$

φ -ла 1 . для постоянной $1: v(1) = v(1 \cdot 1) = v(1) \cdot 1 + 1 \cdot v(1)$.
 П.е. $v(1) = 0$ и по линейности $v(c) = 0 \quad \forall c: v(f) = v(f(p)) +$
 $+ v(f_i)(x^i(p) - x_0^i) + f_i(p)(v(x^i) - v(x_0^i)) = v^i f_i(p)$. При $v^i = \frac{\partial}{\partial x^i}$:
 $\frac{\partial}{\partial x^j}(f) = \frac{\partial}{\partial x^j}(x^i) f_i(p) = \delta_j^i f_i(p) = f_j(p)$. П.е. $v(f) = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}(f) \quad \forall f \quad \triangle$

Сол. $\forall$ лок. коорг. $(x^1, \dots, x^n)$ в окр-ти $p \in \{ \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \}$ -

базис $T_p M$. В ч-ти, $\dim T_p M = \dim M$.

Вл. Пусть $p \in M$, $p \in U \cap \tilde{U}$, где (U, φ) и $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ - карты с лок. коорг. $(x^1, \dots, x^n)$ и $(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n)$ соотв.; $v \in T_p M$ и

$v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \tilde{v}^i \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i}$ - его коорг. разл. в соотв. базисах. Тогда

$$\tilde{v}^i = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} (p) v^j, \quad \forall i = \overline{1, n}, \text{ где} \quad (*)$$

$\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} (p) = \frac{\partial (\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1})^i}{\partial x^j} (\varphi(p))$ - частные производ. отобр. перехода

В силу док-ва пред. Вл., $\tilde{v}^i = v(\tilde{x}^i) = v^j \frac{\partial}{\partial x^j} (\tilde{x}^i) = v^j \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} (p)$ $\blacktriangle$

Вет. Ал-но (или как следствие), $\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i} = \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial \tilde{x}^i} (p) \frac{\partial}{\partial x^j}$.

Сол. Определение касательного вектора эквивалентно

деф. 2. Касательным вектором M в $p \in M$ наз. отображение

v , которое каждой карте $(U, \varphi) : p \in U$ ставит в соответствие набор чисел $(v^1, \dots, v^n) = v((U, \varphi))$ ($n = \dim M$),

причем если $v((\tilde{u}, \tilde{\varphi})) = (\tilde{v}^1, \dots, \tilde{v}^n)$ для другой карты $(\tilde{u}, \tilde{\varphi}) : p \in \tilde{u}$, то выполняется $(*)$ (правило преобразования координат вектора).

III. е. $\exists$ естественная функция между кас. векторами и объектами из деф. 2., задаваемая:

$$v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Leftrightarrow v : (u, \varphi) \mapsto (v^1, \dots, v^n)$$

Лем. Более того, объекты из деф. 2. также обладают лн.

структурой: $(\lambda v + \mu w)((u, \varphi)) = \lambda v((u, \varphi)) + \mu w((u, \varphi))$ —

образуют вект. напр-во в пр-ве отображений из мн-ва всех карт в окр-ти p в $\mathbb{R}^n$ в силу линейности $(*)$. Тогда

буд из Сок. — линейный изоморфизм.

деф. Пусть $\gamma \in C^k(I, M)$, касательным вектором γ в $t_0 \in I$ наз. $\gamma'(t_0) : f \mapsto (f \circ \gamma)'(t_0)$, $\forall f \in C^k(M)$.

Лем. $\gamma'(t_0) \in T_{\gamma(t_0)} M$, т.к. $((\lambda f + \mu g) \circ \gamma)'(t_0) = \lambda (f \circ \gamma)'(t_0) +$

$$\mu (g \circ \gamma)'(t_0) \quad \text{и} \quad (fg \circ \gamma)'(t_0) = ((f \circ \gamma)(g \circ \gamma))'(t_0) = (f \circ \gamma)'(t_0) \cdot g(\gamma(t_0)) + f(\gamma(t_0)) (g \circ \gamma)'(t_0). \quad (\forall f, g \in C^k(M), \lambda, \mu \in \mathbb{R})$$

Лем. В крайних точках I берём открыт. произвольно.

Лем. В лок. коорд.: если для карты (U, φ) с коорд. $(x^1, \dots, x^n)$

$$\varphi \circ \gamma = (x^1, \dots, x^n), \text{ то } (f \circ \gamma)'(t_0) = (f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \gamma)'(t_0) = \\ = \frac{\partial f}{\partial x^i}(\gamma(t_0)) (\gamma^i)'(t_0), \text{ т.е. } \gamma'(t_0) = (\gamma^i)'(t_0) \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

опр. γ наз. регулярной в t_0 , если $\gamma'(t_0) \neq 0$ (и рз., если это t_0).

Лем. Это определение совпадает с данным в пред. разделе.

$$\text{Оп. } T_p M = \{ \gamma'(t_0) \mid \gamma \in C^k(I, M) : \gamma(t_0) = p \}.$$

⇒ ~~Вспомогательное~~ Нужно доказать только $\subset$, см. по пред.

разделу: выберем лок. коорд., пусть $v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in T_p M$,

$(x_0^1, \dots, x_0^n)$ - коорд. p , тогда $\gamma(t) := \varphi^{-1}(x_0^1 + t v^1, \dots, x_0^n + t v^n)$

удовл. условиям: $\gamma \in C^k(\mathbb{R}, M)$, $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v$ ▴

Мы решили поставленную задачу: нашли место для $\gamma'(t_0)$.

def. 3. Назовём две кривые $\gamma \in C^k(I, M)$ и $\mu \in C^k(J, M)$ эквивалентными в $p \in M$, если $\exists t_0 \in I, s_0 \in J : \gamma(t_0) = \mu(s_0) = p$ и $\forall f \in C^k(M) \quad (f \circ \gamma)'(t_0) = (f \circ \mu)'(s_0)$. Класс эквивалентности кривых в p наз. касательным вектором M в p .

Упр. 1. Проверить, что это отн. экв-ти.

2. Ввести на мн-тве классов экв-ти лн. структуру.

3. Проверить эквивалентность def. 3. основному def., т.е. построить линейный изоморфизм между гр-вом классов экв-ти кривых в p и $T_p M$.

Лем. Если $M = \mathbb{R}^n$, у нас есть глоб. координаты $(x^1, \dots, x^n)$. Отношение $v^i = \frac{\partial}{\partial x^i} \in (\sigma^1, \dots, \sigma^n)$, получим для $p \in \mathbb{R}^n$

отнес. $T_p \mathbb{R}^n \leftrightarrow \mathbb{R}^n$. В силу сказанного выше, для отн.

$u \in \mathbb{R}^n$ отнес. отображение $T_p u \in \mathbb{R}^n$.

Упр. Построить (естественный) изоморфизм $T_{(p,q)} M \times N \cong T_p M \oplus T_q N$.

Дифференциал и пары отображения

В анализе: для заданных $F: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ $dF: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$.

def. Пусть M, N — k -и многообразия ($k \geq 1$), $F \in C^k(M, N)$.

Дифференциалом F в точке $p \in M$ называется

$$d_p F: T_p M \rightarrow T_{F(p)} N: v \mapsto (d_p F(v): f \mapsto v(F \circ f))$$

Rem. Пусть $f \in C^k(N) \Rightarrow f \circ F \in C^k(M)$, поэтому $d_p F(v): C^k(N) \rightarrow \mathbb{R}$.

Pr. $d_p F$ корректно определено (т.е. $d_p F(v) \in T_{F(p)} N$) и линейно.

► $d_p F(v)(f) = v(f \circ F)$ линейно по f и по v :

$$\begin{aligned} d_p F(v)(\lambda f + \mu g) &= v(\lambda f \circ F + \mu g \circ F) = \lambda v(f \circ F) + \mu v(g \circ F) = \\ &= \lambda d_p F(v)(f) + \mu d_p F(v)(g) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_p F(\lambda v + \mu w)(f) &= (\lambda v + \mu w)(f \circ F) = \lambda v(f \circ F) + \mu w(f \circ F) = \\ &= (\lambda d_p F(v) + \mu d_p F(w))(f) \end{aligned}$$

Законы.

$$d_p F(v)(fg) = v((f \circ F)(g \circ F)) = v((f \circ F) \cdot (g \circ F)(p) + (f \circ F)(p) \cdot v(g \circ F)) =$$

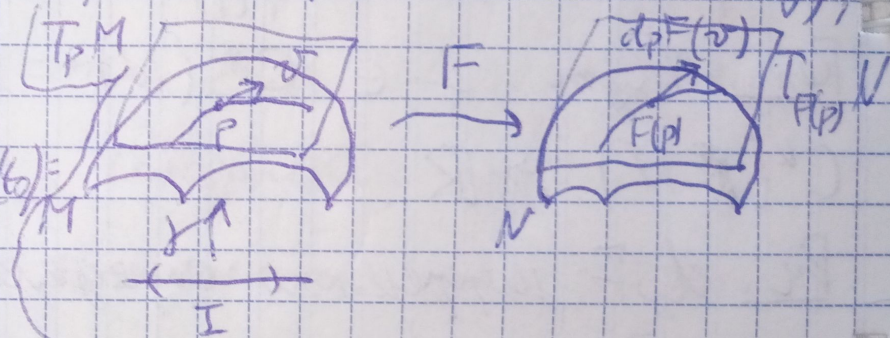
$$= d_p F(v)(f) \cdot g(F(p)) + f(F(p)) \cdot d_p F(v)(g).$$

Это всё $\forall v, w \in T_p M, f, g \in C^k(N), \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ Δ

Rem. Пусть $v = \gamma'(t_0)$ (как мы помним, $\forall v \in T_p M$ есть такой γ),
 $p = \gamma(t_0): \forall f \in C^k(N)$

$$d_p F(v)(f) = \gamma'(t_0)(f \circ F) = (f \circ F \circ \gamma)'(t_0) =$$

$$= (F \circ \gamma)'(t_0)(f).$$



П.е. $d_{\gamma(t_0)} F(\gamma'(t_0)) = (F \circ \gamma)'(t_0)$ - "временное"

определение дифференциала.

Rem. Пусть $(U, \varphi), (V, \psi)$ - карты в окр-стях p и $F(p)$

с коорг. $(x^1, \dots, x^m)$ и $(y^1, \dots, y^n)$ соотв. лок. задание:

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1} : (x^1, \dots, x^m) \mapsto (F^1(x^1, \dots, x^m), \dots, F^n(x^1, \dots, x^m))$$

Тогда для $v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in T_p M$ (но i сумма от 1 до m):

$$\begin{aligned} d_p F(v) &= v^i d_p F\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = v^i d_p F\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)(y^a) \frac{\partial}{\partial y^a} = \\ &= v^i \frac{\partial}{\partial x^i} (y^a \circ F) \frac{\partial}{\partial y^a} = v^i \frac{\partial F^a}{\partial x^i}(p) \frac{\partial}{\partial y^a} \leftarrow \begin{array}{l} \text{сумма по } a \text{ от } 1 \text{ до } n \\ \text{корректнее } \Phi(p), \\ \text{снова упрощаем.} \end{array} \end{aligned}$$

Т.е. в базисах $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m} \right\}, \left\{ \frac{\partial}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^n} \right\}$ $d_p F$ имеем матрицу $\left(\frac{\partial F^a}{\partial x^i}(p) \right)_{\substack{i=1, \dots, m \\ a=1, \dots, n}}$ - M -я Якоби нек. заданная

F . В ч-ти, при $M = \mathbb{R}^m, N = \mathbb{R}^n$ с учётом отождествлений $T_p \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^m, T_{F(p)} \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$ он совпадает с dF из анализа.

Зем. Ещё обозначаем $(F_*)_p, dF_p \dots$

Рл. (цепное правило) Для $G \in C^k(M, N), F \in C^k(N, L), p \in M$:

$$d_p (F \circ G) = d_{G(p)} F \circ d_p G.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow d_p (F \circ G)(v)(f) &= v((f \circ F) \circ G) = d_p G(v)(f \circ F) = \\ &= d_{G(p)} F(d_p G(v)(f)) \quad \forall v \in T_p M, f \in C^k(L) \quad \triangle \end{aligned}$$

Ex. 1 $F = \gamma \in C^k((a, b), M)$. В $t_0 \in (a, b)$ $T_{t_0}(a, b)$ отожд.