Теорія міри і інтеграла
Тема 2: Системи множин і міри
Лекція 6
Простір з мірою

Володимир Кадець

ХНУ ім. В.Н.Каразіна

Харків, 2020

Трійка (Ω, Σ, μ), де Ω – непорожня множина із заданою на ній σ-алгеброю Σ, а μ – зліченно-адитивна міра на Σ, називається простором з мірою. Якщо до того ж μ – ймовірнісна міра, тобто $\mu(\Omega) = 1$, то (Ω, Σ, μ) називається ймовірнісним простором. У теорії ймовірностей множина Ω називається простором елементарних подій, елементи σ-алгебри Σ – подіями, а $\mu(A)$ – ймовірністю настання події A. Вимірні функції, які ми ще будемо розглядати пізніше, в теорії ймовірностей називаються випадковими величинами, інтеграл випадкової величини – математичним сподіванням. Хоча ми не будемо користуватися ймовірнісною термінологією, багато питань, що вивчаються в наступних розділах, мають важливе значення і в теорії ймовірностей.

Верхньою границею послідовності множин (A_n) називається множина $\overline{\lim} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$.

Проаналізуємо це означення на "дошці".

Теорема про верхню границю послідовності множин.
Нехай $A_n \in \Sigma$, $A_\infty = \overline{\lim} A_n$. Тоді

(i) $\mu(A_\infty) \geqslant \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \mu(A_n)$.
Зокрема, якщо $\mu(A_\infty) = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$.

(ii) (Лема Бореля – Кантеллі). Якщо $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$, то $\mu(A_\infty) = 0$.

Доведення

Розглянемо $B_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$. Тоді $A_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$. Оскільки B_n утворюють спадний ланцюжок множин, то

$$\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \mu(A_\infty). \tag{1}$$

Для доведення твердження (i) залишається зауважити, що $B_n \supset A_n$, відповідно,

$$\mu(A_\infty) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) \geqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \mu(A_n).$$

Далі, якщо $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$, то

$$\mu(B_n) \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \mu(A_k) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

що разом зі співвідношенням (1) дає твердження (ii). □

Нехай (Ω, Σ, μ) – простір з мірою. Підмножину $B \subset \Omega$ назвемо μ-нехтуваною, якщо існує таке $A \in \Sigma$, що $\mu(A) = 0$ і $B \subset A$. Простір з мірою (Ω, Σ, μ) називається повним (інший термін – Σ повна щодо міри μ), якщо всі μ-нехтувані множини є елементами σ-алгебри Σ.

Іншими словами, (Ω, Σ, μ) повний у разі, якщо для будь-якого $A \in \Sigma$ з $\mu(A) = 0$, якщо $B \subset A$, то $B \in \Sigma$.

Якщо σ-алгебра Σ не є повною щодо міри μ, то μ можна природним способом доозначити на ширшу σ-алгебру Σ', яка буде повною щодо μ.

Ця описана нижче процедура доозначення називається поповненням σ-алгебри Σ за мірою μ. Радимо читачеві розглянути наведену нижче низку тверджень як вправи, і спробувати знайти доведення самостійно. Доведення можна прочитати в розділі 2.1.5 підручника.

Спочатку – властивості μ-нехтуваних множин:

- якщо множина B нехтувана і $B \in \Sigma$, то $\mu(B) = 0$;
- якщо множина B нехтувана, то й усі її підмножини нехтувані;
- об'єднання скінченної або зліченної сім'ї нехтуваних множин нехтувано.

Дві множини $A_1, A_2 \subset \Omega$ назвемо еквівалентними ($A_1 \sim A_2$), якщо їхня симетрична різниця $A_1 \triangle A_2$ нехтувана. Відношення $\sim$ рефлексивне і симетричне (очевидно), а також транзитивне: якщо $A_1 \sim A_2$, $A_2 \sim A_3$, то симетрична різниця $A_1 \triangle A_3 \subset (A_1 \triangle A_2) \cup (A_2 \triangle A_3)$ нехтувана, тобто $A_1 \sim A_3$.

Властивості еквівалентних множин:

1. Якщо $A \sim B$, то $(\Omega \backslash A) \sim (\Omega \backslash B)$.
2. Якщо $A_n \sim B_n$, $n \in M$, де M – скінченний або зліченний набір індексів, то $\bigcup\limits_{n \in M} A_n \sim \bigcup\limits_{n \in M} B_n$ і $\bigcap\limits_{n \in M} A_n \sim \bigcap\limits_{n \in M} B_n$.
3. Якщо $B_1 \sim B_2$, $B_1, B_2 \in \Sigma$, то $\mu(B_1) = \mu(B_2)$.

Означимо сім'ю множин Σ' у такий спосіб: $A \in \Sigma'$, якщо існує така $B \in \Sigma$, що $A \sim B$. При цьому позначимо $\mu'(A) = \mu(B)$. Це означення коректне з огляду на вищенаведену властивість 3, тобто $\mu'(A)$ залежить лише від A і не залежить від вибору B. Також відмітимо, що для $A \in \Sigma$ маємо $\mu'(A) = \mu(A)$.

Конструкція поповнення

Теорема

1. Сім'я множин Σ' містить σ-алгебру Σ і сама є σ-алгеброю на Ω.
2. Міра μ' зліченно-адитивна.
3. (Ω, Σ', μ') – повний простір з мірою.

Побудований простір з мірою (Ω, Σ', μ') називається поповненням простору з мірою (Ω, Σ, μ). Часто міру μ' позначають тією самою літерою, що й μ. Це не призводить до непорозумінь, оскільки за побудовою $\mu' = \mu$ на Σ.

Нехай Ω – множина із заданою на ній σ-алгеброю Σ. Для мір на Σ означені операції додавання і множення на додатний скаляр:

$$(\mu_1 + \mu_2)(A) = \mu_1(A) + \mu_2(A); (a\mu)(A) = a\mu(A).$$

Пропонуємо перевірити, що описані операції зберігають зліченну адитивність мір.

Атомом міри μ називається така підмножина $A \in \Sigma$, що $\mu(A) > 0$ і для будь-якого $B \in \Sigma_A$ або $\mu(B) = 0$, або $\mu(A \setminus B) = 0$.

Якщо у міри є атоми, міра називається атомарною, якщо ж атомів немає, то безатомною. Міра називається суто атомарною, якщо Ω можна зобразити у вигляді об'єднання скінченного або зліченного числа неперетинних атомів.

Типовим прикладом суто атомарної міри є δ-міра. Нехай x – довільна точка множини Ω. δ-Мірою, зосередженою в точці x, називається міра δ_x, означена правилом: $\delta_x(A) = 1$, якщо $x \in A$, і $\delta_x(A) = 0$, якщо $x \notin A$.
Нагадаємо, що множини $A_1, A_2 \in \Sigma$ є μ-еквівалентними, якщо $\mu(A_1 \triangle A_2) = 0$. Наприклад, для міри $\mu = \delta_x$ на сім'ї борелевих підмножин відрізку Ω її атом Ω буде μ-еквівалентним одноточковій множині $\{x\}$. Розв'язавши наведені нижче вправи, читач отримає, зокрема, доведення таких теорем:
Теорема 1. Будь-яка зліченно-адитивна міра на σ-алгебрі може бути зображена у вигляді суми суто атомарної і безатомної мір, причому таке зображення єдине.

Теорема 2. Нехай Ω – сепарабельний метричний простір, σ-алгебра Σ містить всі борелеві множини, μ – зліченно-адитивна міра на Σ. Тоді кожен атом міри μ буде μ-еквівалентним деякій одноточковій множині.

Вправи. На даному просторі з мірою (Ω, Σ, μ)

6.1. Якщо множина еквівалентна атому, то вона сама є атомом.

6.2. Якщо атоми A_1, A_2 міри μ не еквівалентні, то $\mu(A_1 \cap A_2) = 0$.

6.3. Нехай $A_n \in \Sigma$, $n = 1, 2, \dots,$ – скінченна або зліченна послідовність попарно не еквівалентних атомів міри μ. Тоді існує така диз'юнктна послідовність $A'_n \in \Sigma$, $n = 1, 2, \dots,$ атомів міри μ, що $A'_k \sim A_k$, $k = 1, 2, \dots$.

Міри всіх представників одного класу еквівалентності множин збігаються. У зв'язку з цим мірою класу еквівалентності називатимемо міру представника цього класу. Клас еквівалентності атома називатимемо атомарним класом.

6.4. Сума мір будь-якого скінченного числа попарно різних атомарних класів не перевищує $\mu(\Omega)$.

6.5. Існує не більш ніж зліченне число різних атомарних класів.

6.6. Існує така скінченна або зліченна диз'юнктна послідовність $A_1, A_2, \ldots$ атомів міри μ, що будь-який атом міри μ еквівалентний одному з A_n.

6.7. В умовах попередньої вправи приймемо $A_\infty := \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ й означимо міри μ_1 і μ_2 на Σ таким способом: $\mu_1(A) = \mu(A \cap A_\infty)$, $\mu_2(A) = \mu(A \backslash A_\infty)$. Перевірте, що μ_1 і μ_2 – зліченно-адитивні міри, $\mu = \mu_1 + \mu_2$, міра μ_1 суто атомарна і μ_2 безатомна. Цим буде доведено існування розкладу в теоремі 1.

6.8. Нехай $\mu = \mu_1' + \mu_2'$ – деякий розклад на суто атомарну та безатомну міри, B – атом міри μ. Тоді B – атом для μ_1' і $\mu(B) = \mu_1'(B)$. Навпаки, кожен атом міри μ_1' еквівалентний деякому атому міри μ.

6.9. В умовах попередньої вправи міра μ_1' збігається з мірою μ_1 із вправи 6.7. Цим буде доведено єдиність розкладу в теоремі 1.

6.10. Нехай Ω і Σ – з формулювання теореми 2, $A \in \Sigma$. Тоді множину A можна розбити на не більш ніж зліченне число попарно неперетинних множин – елементів Σ, діаметри яких не перевищують ε.

6.11. В умовах теореми 2 для кожного атома A міри μ і для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує атом $A_1 \subset A$ (автоматично еквівалентний атому A) з $\operatorname{diam}(A_1) < \varepsilon$.

6.12. В умовах теореми 2 нехай A – атом міри μ. Скориставшись попередньою вправою, побудуємо ланцюжок $A \supset A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$ атомів з $\operatorname{diam}(A_n) < 1/n$. Доведіть, що перетин цього ланцюжка множин складається з однієї точки і що отримана одноточкова множина буде атомом. Цим буде доведено теорему 2.