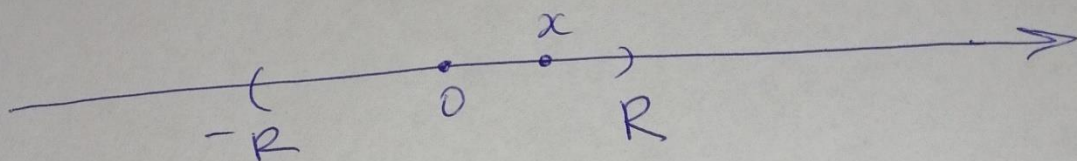


Степеневі ряди в комплексній площині

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad x \in (-R, R)$$



Приклад 1. $f(x) = \frac{1}{1+x}$

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\};$$

$$f(x) = \frac{1}{1 - (-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

$$|-x| < 1 \Leftrightarrow |x| < 1 \Leftrightarrow x \in (-1, 1)$$

Приклад 2. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$$D(f) = \mathbb{R}, \text{ але}$$

$$f(x) = \frac{1}{1 - (-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

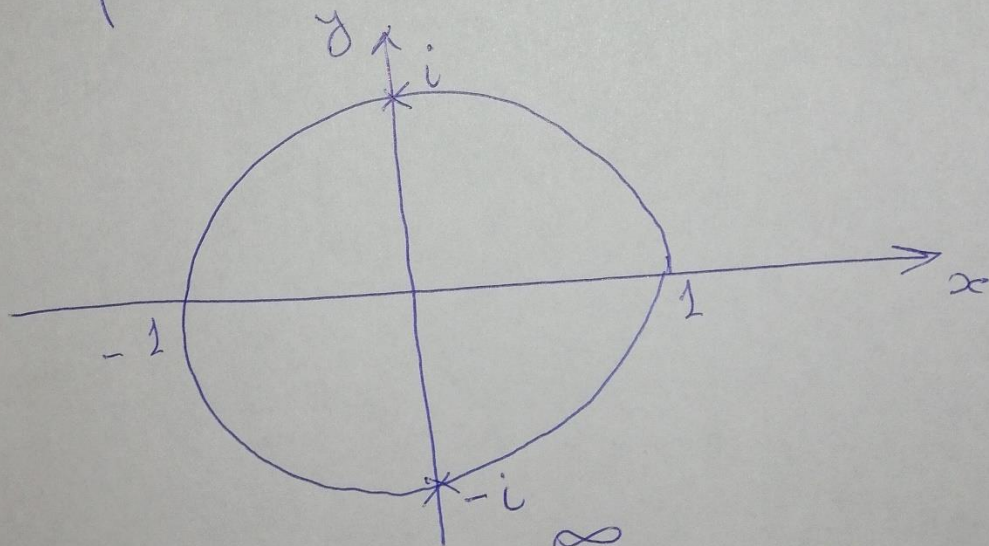
Тільки на $(-1, 1)$. ???

Розглянемо тепер функцію $\frac{1}{1+z^2}$

в комплексній площині:

$f(z) = \frac{1}{1+z^2}$. Тоді її природня область визначення буде мати такий вигляд:

$$D(f) = \{z \in \mathbb{C} : 1+z^2 \neq 0\} = \\ = \{z \in \mathbb{C} : z^2 \neq -1\} = \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}.$$



Маємо: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}, |z| < 1$

Тепер вже зрозуміла попередня умова $|x| < 1$, або $x \in (-1, 1)$.

Збіжність у полі комплексних чисел

Нехай $\{z_n\}$ — послідовність комплексних чисел, тобто $z_n \in \mathbb{C}$, і $z \in \mathbb{C}$.

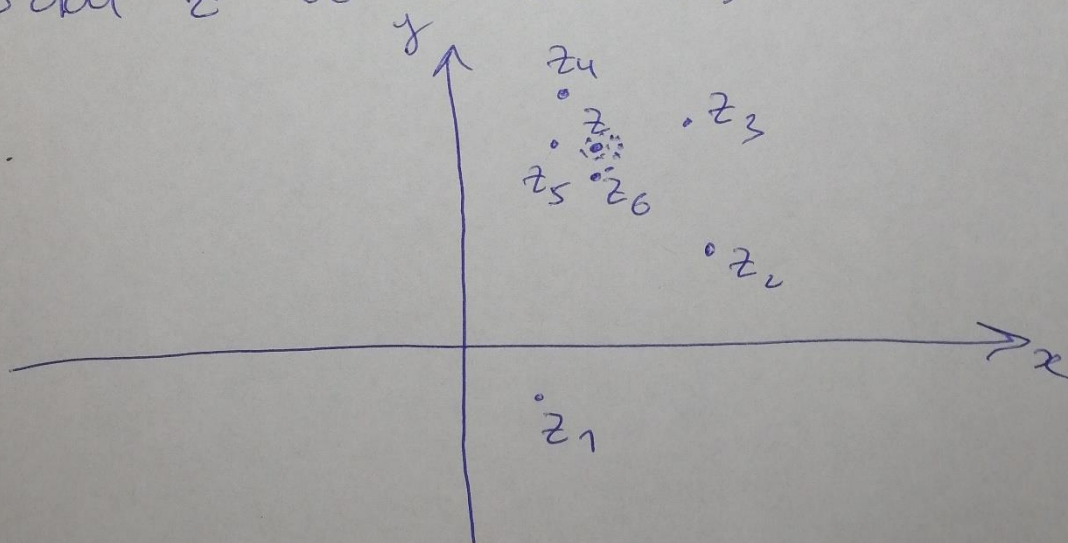
Означення. $z_n \rightarrow z \stackrel{\text{def}}{\iff} |z_n - z| \rightarrow 0$

(нагадаю: якщо $z = x + iy$, то

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, тобто $|z|$ — дійсне

число і $|z| \geq 0$. Якщо $z, w \in \mathbb{C}$,

то $|z - w|$ дорівнює відстані від точки z до точки w).



Теорема про збіжність в $\mathbb{C}$.

Нехай $z_n = x_n + iy_n$, $z = x + iy$.

$$z_n \rightarrow z \Leftrightarrow x_n \rightarrow x \text{ і } y_n \rightarrow y.$$

Доведення. ($\Leftarrow$). Нехай $x_n \rightarrow x$ і

$y_n \rightarrow y$. Тоді $|z_n - z| =$

$$= \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} \rightarrow 0,$$

тобто $z_n \rightarrow z$.

($\Rightarrow$). Нехай $z_n \rightarrow z$, тобто

$|z_n - z| \rightarrow 0$. Маємо:

$$|x_n - x| = \sqrt{(x_n - x)^2} \leq$$

$$\leq \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} = |z_n - z| \rightarrow 0.$$

Тому $|x_n - x| \rightarrow 0$, тобто $x_n \rightarrow x$.

Аналогічно, $y_n \rightarrow y$.

Збіжність ряду в $\mathbb{C}$

5

Нехай $z_n \in \mathbb{C}$. Розглянемо ряд

$$z_1 + z_2 + z_3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} z_n.$$

Означення 1. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ збігається
 $\stackrel{\text{def}}{\iff} \exists w \in \mathbb{C} : z_1 + z_2 + z_3 + \dots + z_n \rightarrow w.$

Означення 2 Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ збігається
абсолютно $\stackrel{\text{def}}{\iff} \sum_{n=1}^{\infty} |z_n| < +\infty.$

Теорема. Якщо ряд $\sum$ комплекс-
них чисел збігається абсолютно, то
він збігається.

Експонента в $\mathbb{C}$

Нагадаємо, що $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ для всіх $x \in \mathbb{R}$.

Нехай тепер $z \in \mathbb{C}$. Розглянемо ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.

Теорема. Цей ряд збігається абсолютно.

Доведення. $\left| \frac{z^n}{n!} \right| = \frac{|z|^n}{n!}$ і $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} = e^{|z|}$, зокрема $\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{z^n}{n!} \right| < \infty$.

Означення $e^z \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.

Таким чином, якщо $z \in \mathbb{C}$, то $e^z \in \mathbb{C}$.

Основна властивість експоненти

Теорема $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$, $z, w \in \mathbb{C}$.

Доведення. Фіксуємо z і w , і нехай $t \in \mathbb{R}$. Будемо розглядати ряди $e^{z \cdot t}$ і $e^{w \cdot t}$ як степеневі ряди відносно змінної t .

Знайдемо добуток $e^{z \cdot t} \cdot e^{w \cdot t}$:

$$\begin{aligned} e^{z \cdot t} \cdot e^{w \cdot t} &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z \cdot t)^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(w \cdot t)^n}{n!} \right) = \\ &= \left(1 + z \cdot t + \frac{z^2}{2!} t^2 + \frac{z^3}{3!} t^3 + \dots \right) \left(1 + w \cdot t + \frac{w^2}{2!} t^2 + \frac{w^3}{3!} t^3 + \dots \right) \\ &= 1 + (z+w)t + \left(\frac{z^2}{2!} + zw + \frac{w^2}{2!} \right) t^2 + \\ &\quad + \left(\frac{z^3}{3!} + \frac{z^2}{2!} w + z \cdot \frac{w^2}{2!} + \frac{w^3}{3!} \right) t^3 + \dots = \\ &= 1 + (z+w)t + \frac{1}{2!} (z^2 + 2zw + w^2) t^2 + \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{3!} (z^3 + 3z^2w + 3zw^2 + w^3) t^3 + \dots = \quad \boxed{8}$$

$$= 1 + (z+w)t + \frac{1}{2!} (z+w)^2 t^2 + \frac{1}{3!} (z+w)^3 t^3 + \dots = e^{(z+w)t}.$$

Якщо тепер

$$t=1, \text{ то ми отримуємо рівність}$$

$$e^z \cdot e^w = e^{z+w}.$$

Наслідок. $e^z \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}.$

Доведення. $e^z \cdot e^{-z} = e^{z-z} = e^0 = 1.$

Φορμυλι Εύλεpa

9

Ηεχαί $x \in \mathbb{R}$. Τογι

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots,$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots,$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \dots.$$

Τεοpема Εύλεpa. Ηεχαί $x \in \mathbb{R}$.

Τογι $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.

Δοβεδειππγ. $e^{ix} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \dots = \begin{bmatrix} i^2 = -1 \\ i^3 = -i \\ i^4 = 1 \end{bmatrix} =$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + i \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \right) \\ = \cos x + i \sin x.$$

Лемма 1. $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}),$
 $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}).$

Доказательство $e^{ix} = \cos x + i \sin x,$
 $e^{-ix} = \cos x - i \sin x.$

Тогда $e^{ix} + e^{-ix} = 2 \cos x,$
 $e^{ix} - e^{-ix} = 2i \sin x.$

Лемма 2. Если $x \in \mathbb{R}$, то
 $|e^{ix}| = 1.$

Доказательство, $|e^{ix}| = |\cos x + i \sin x| =$
 $= \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x} = 1.$

Лемма 3. $\forall z \in \mathbb{C}: e^{z+2\pi i} = e^z.$

Доказательство, $e^{z+2\pi i} = e^{(x+iy)+2\pi i} =$
 $= e^{x+i(y+2\pi)} = e^x \cdot e^{i(y+2\pi)} =$
 $= e^x \cdot (\cos(y+2\pi) + i \sin(y+2\pi)) = e^x \cdot e^{iy} = e^z.$