

Нескінченні добутки

1

Нескінченна сума (числовий ряд):

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Якщо ряд збігається, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N a_n.$$

Нехай тепер $\{b_n\}$ — послідовність

додатних чисел: $b_n > 0$.

$$b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \dots \cdot b_n \cdot \dots = \prod_{n=1}^{\infty} b_n -$$

нескінченний добуток.

Означення 1. Нескінченний добу-

ток $\prod_{n=1}^{\infty} b_n$ збігається $\stackrel{\text{def}}{\iff}$

$\exists \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N b_n \in (0, +\infty)$, тобто

ця границя скінченна і не дорівнює нулю.

Якщо $\lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N b_n = +\infty$, або

$\lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N b_n = 0$, то нескінченний

добуток $\prod_{n=1}^{\infty} b_n$ розбігається!

Означення 2. Якщо нескінченний добуток $\prod_{n=1}^{\infty} b_n$ збігається, то

$$\prod_{n=1}^{\infty} b_n \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N b_n,$$

тобто $b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot b_4 \cdot \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_n)$.

При цьому, $\prod_{n=1}^{\infty} b_n \neq 0$.

3

Лема (необхідна умова збіжності
нескінченною добутку).

Нехай $\prod_{n=1}^{\infty} b_n$ збігається. Тоді

$$b_n \rightarrow 1.$$

Доведення. Нехай $P_n = b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_n$.

Тоді $\exists P \in (0, +\infty) : P_n \rightarrow P$.

Тому $P_{n+1} \rightarrow P$. З цього маємо:

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} \rightarrow \frac{P}{P} = 1. \text{ Але } P \neq 0$$

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \dots \cdot b_n \cdot b_{n+1}}{b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \dots \cdot b_n} =$$

$$= b_{n+1}, \text{ тобто } b_{n+1} \rightarrow 1. \text{ Тоді і } b_n \rightarrow 1.$$

Теорема (критерій збіжності нескінченного добутку).

$$\prod_{n=1}^{\infty} v_n \text{ збігається} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \ln v_n \text{ збігається}$$

При цьому, якщо є збіжність,

$$\prod_{n=1}^{\infty} v_n = P \text{ і } \sum_{n=1}^{\infty} \ln v_n = S, \text{ то}$$

$$P = e^S.$$

Доведення ($\Rightarrow$). Нехай

$$P_n = v_1 \cdot v_2 \cdot \dots \cdot v_n. \text{ Тоді } P_n \rightarrow P > 0.$$

Оскільки функція $\ln x$ є неперервною, то $\ln P_n \rightarrow \ln P$. Маємо:

$$\ln P_n = \ln(v_1 \cdot v_2 \cdot \dots \cdot v_n) =$$

$$= \ln v_1 + \ln v_2 + \dots + \ln v_n \rightarrow \ln P.$$

Тому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \ln v_n$ збігається і

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln b_n = \ln P, \text{ тобто } S' = \ln P$$

$$\text{і } P = e^{S'}$$

($\Leftarrow$) - Теоретична задача!

Наслідок. Нехай $\alpha_n > 0$. Тоді

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + \alpha_n) \text{ збігається} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < +\infty.$$

$$\text{Доведення. } \prod_{n=1}^{\infty} (1 + \alpha_n) \text{ збіг.} \Leftrightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \alpha_n) \text{ збіг. Маємо:}$$

$$\ln(1 + \alpha_n) \geq 0 \text{ і } \ln(1 + \alpha_n) \sim \alpha_n$$

оскільки $\alpha_n \rightarrow 0$ (необхідні умови збіжності нескінз. добутку і змислу його ряду. Тому $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \alpha_n) < +\infty$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < +\infty.$$

Зауваження

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + \alpha_n) = (1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2)(1 + \alpha_3) \cdot \dots =$$

$$= 1 + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots) + (\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 + \dots)$$

$$+ \dots$$

Дзета-функція
Ейлера - Ріманна

Нехай $x > 1$. Тоді $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} < +\infty$.

$$\zeta(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} = 1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \dots$$

$$D_o(\zeta) = (1, +\infty) - \text{ОДЗ!}$$

— позитивна область визначення

ζ — "дзета".

Нехай $\{p_n\}$ - послідовність простих
чисел: $\{p_n\} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots\}$.

$$m \in \mathbb{N} \Rightarrow m = p_{m_1}^{l_1} \cdot p_{m_2}^{l_2} \cdot \dots \cdot p_{m_k}^{l_k}.$$

$$12 = 2^2 \cdot 3, \quad 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

Теорема Ейлера (про розвинування
 ζ -функції у нескінченний добуток.
 $\zeta(x) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_n^x}}, \quad x > 1.$

Ідея доведення

Розглянемо нескінченний добуток

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_n^x}} = \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2^x}} \right) \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{3^x}} \right) \cdot \dots$$

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{p_n^x}} = 1 + \frac{\frac{1}{p_n^x} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0}{1 - \frac{1}{p_n^x} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0} = 1 + \alpha_n,$$

$$\text{де } \alpha_n = \frac{\frac{1}{p_n^x}}{1 - \frac{1}{p_n^x}} > 0 \quad \text{і} \quad \alpha_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{p_n^x}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty, \text{ оскільки}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n^x} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x} < +\infty \text{ при}$$

$x > 1$. Ми отримаємо, що нескінченний добуток $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_n^x}}$ збіг.

$$\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2^x}} \right) \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{3^x}} \right) \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{5^x}} \right) \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{7^x}} \right) \dots$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2^x} + \left(\frac{1}{2^x} \right)^2 + \left(\frac{1}{2^x} \right)^3 + \dots \right) \left(1 + \frac{1}{3^x} + \left(\frac{1}{3^x} \right)^2 + \dots \right) \cdot \left(1 + \frac{1}{5^x} + \left(\frac{1}{5^x} \right)^2 + \left(\frac{1}{5^x} \right)^3 + \dots \right) \dots =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{(2^2)^x} + \frac{1}{(2^3)^x} + \dots \right) \left(1 + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{(3^2)^x} + \dots \right) \cdot \left(1 + \frac{1}{5^x} + \frac{1}{(5^2)^x} + \frac{1}{(5^3)^x} + \dots \right) =$$

$$= 1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{4^x} + \frac{1}{5^x} + \frac{1}{6^x} + \dots$$

$$\frac{1}{1-q} = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots, \quad |q| < 1$$

Наслідок. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} = +\infty$, тобто

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \dots = +\infty.$$

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}, \quad x \in (1, +\infty).$$

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots = \frac{\pi^2}{6},$$

$$\zeta(4) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \quad (\text{Ейлер})$$

$$\zeta(3) \notin \mathbb{Q} \quad (1978 \text{ р.}, \text{Апері})$$

$$\zeta(5) ?$$

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}, \quad \zeta(-1) = -\frac{1}{12};$$
$$1+2+3+4+\dots = -\frac{1}{12}.$$

Теоретична загадка. Довести, що

$$\zeta(x) \rightarrow +\infty \quad x \rightarrow 1+0.$$

Ріман, 1859 - продовження

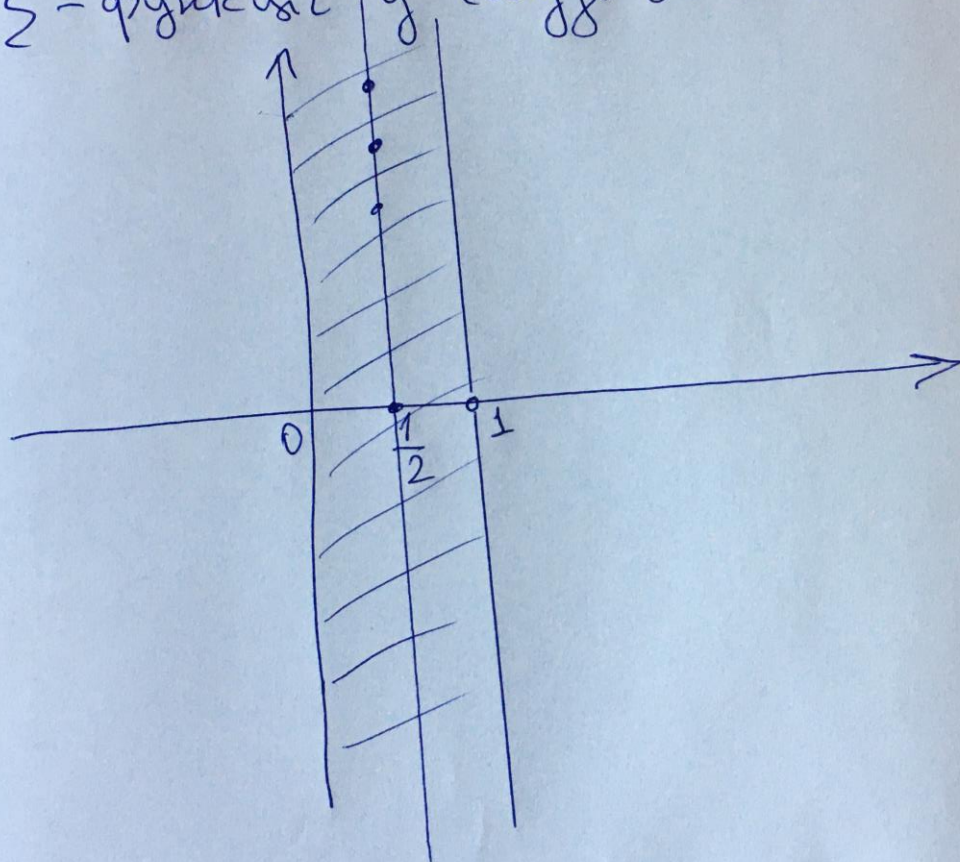
ζ -функції у комплексну площину

$$D(\zeta) = \{z \in \mathbb{C} : z \neq 1\} = \mathbb{C} \setminus \{1\}$$

Асимптотика розподілу простих
чисел: $p_n \sim n \cdot \ln n$ (1897 р.)

Задача Рімана: знайти всі нулі

ζ -функції у смугі $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$



Гіпотеза Рімана: всі нулі знаходяться
на прямій $\sigma = \frac{1}{2}$.

Приз: 1 млн. доларів США (Матема-
тичний інститут Клея, США).