Інтегральні суми для рівномірного розбиття

$x_0 = a \quad x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad \dots \quad x_{n-1} \quad b = x_n$

$$x_k = a + \frac{b-a}{n} \cdot k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n}.$$

Нехай $\xi_k = x_k$. Тоді інтегральна сума буде мати такий вигляд:

$$f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{b-a}{n} \cdot k\right) \cdot \frac{b-a}{n} =$$

$$= (b-a) \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{b-a}{n} \cdot k\right) =$$

$$= (b-a) \cdot \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n} =$$

$= (b-a)\cdot$(середнє арифметичне значень функції у точках $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$).

Якщо $\exists \int_a^b f(x)\,dx$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{b-a}{n}\cdot k\right)\frac{b-a}{n},$$

тобто $$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)}{n}.$$

Тому $\exists \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)}{n}$ і

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)}{n} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

<u>Означення</u>. $\langle f \rangle_{[a,b]} \overset{def}{=}$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)}{n} -$$

середнє значення функції f на відрізку $[a,b]$.

Наслідок. Якщо $f \in R[a, b]$, то $\exists \langle f \rangle_{[a,b]}$ і

$$\langle f \rangle_{[a,b]} = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}.$$

Приклад. $[a, b] = [0, 1]$. Тоді

$$\langle f \rangle_{[0,1]} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + f\left(\frac{3}{n}\right) + \ldots + f(1)}{n}$$

Теоретична задача. Знайти за означенням $\langle x \rangle_{[0,1]}$.

Необхідна умова інтегровності за Ріманом

Теорема. Нехай функція f інтегрована за Ріманом на $[a, b]$, тобто $\exists \int_a^b f(x)dx$. Тоді f є обмеженою на $[a, b]$ (тобто $(\exists C>0)$ $(\forall x \in [a, b]) : |f(x)| \le C$).

Зауваження. Ця умова не є достатньою:

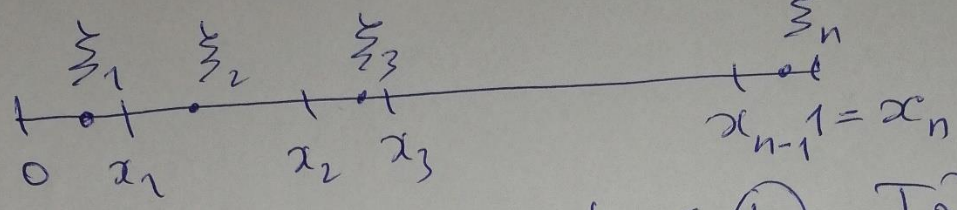
f обмежена на $[a, b] \not\Rightarrow f$ є інтегрованою за Ріманом на $[a, b]$.

Приклад (функція Діріхле). Нехай

$$f(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Тоді f обмежена на $[0, 1]$.

Але, $f \notin R[0,1]$.



Нехай $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \in \mathbb{Q}$. Тоді

$f(\xi_k) = 1 \ \forall k$ і

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = 1$$

Якщо тепер $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \notin \mathbb{Q}$, то

$$\sum_{k=1}^{n} \overset{=0}{f(\xi_k)}\Delta x_k = 0.$$ Тому

$\nexists \lim\limits_{|\tau| \to 0} \sigma(f; (\tau, \vec{\xi}))$ і f не є інтегрованою за Ріманом.

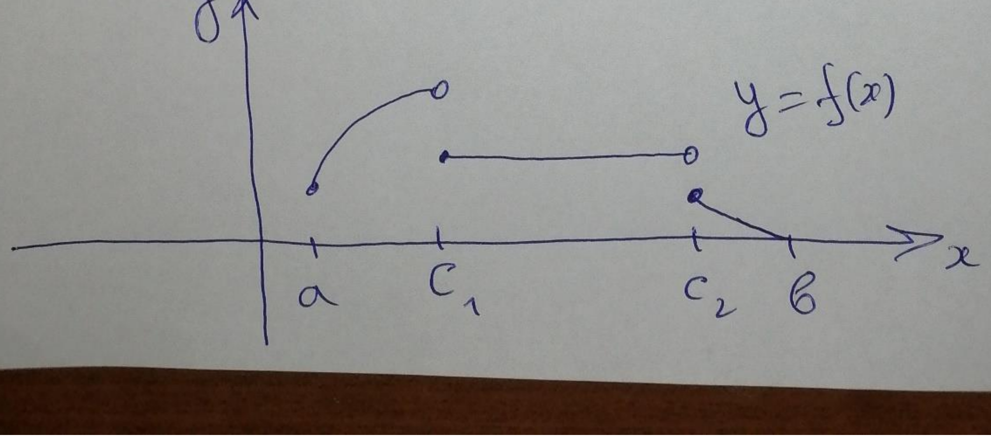
Інтеграл Лебега: $\exists \int_0^1 f(x)dx = 0$.

<u>Теорема Коші–Дарбу</u>. Нехай $f \in C[a, b]$. Тоді $f \in R[a, b]$.

<u>Теорема</u>. Нехай функція f обмежена на $[a, b]$ і <u>має скінченну кількість точок розриву</u>. Тоді f є інтегрованою за Ріманом на $[a, b]$.

<u>Наслідок</u>. Нехай f обмежена на $[a, b]$ і має скінченну кількість точок розриву $c_1, c_2, \ldots, c_m \in [a, b]$, $c_1 < c_2 < \ldots < c_m$. Тоді

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{c_1} f(x)dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx + \ldots + \int_{c_m}^{b} f(x)dx$$



Властивості визначеного інтеграла

1. Якщо $f(x) = 1$, $x \in [a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = b - a,$$ тобто

$$\int_a^b dx = b - a$$ – <u>довжина</u> проміжка інтегрування.

<u>Доведення.</u> $\sigma(f; (\tau, \vec{\xi})) = \sum_{k=1}^{n} \overset{1}{\overset{\shortparallel}{f(\xi_k)}} \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = b - a.$

2. Множина $R[a, b]$ всіх інтегрованих за Ріманом функцій на $[a, b]$ є лінійним простором і інтеграл є <u>лінійним функціоналом</u> в цьому просторі, тобто:

$$(\forall f, g \in R[a,b])(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}): \alpha f + \beta g \in R[a,b]$$ і

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx.$$

Зокрема, $\int_a^b (\alpha f(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx$,

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx.$$

Доведення. Нехай $(\tau, \vec{\xi})$ - довільне розбиття з вибраними точками відрізка $[a, b]$. Тоді

$$\sum_{k=1}^{n} (\alpha f(\xi_k) + \beta g(\xi_k))\Delta x_k =$$

$$= \alpha \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k + \beta \sum_{k=1}^{n} g(\xi_k)\Delta x_k$$

Далі переходимо до границі при $|\tau| \to 0$.