

Лекція № 7

Невласні інтеграли

Def

Нехай функція $f(x)$ визначена на скінченному чи нескінченному напівінтервалі $[a; \omega)$ і $f(x) \in R[a; b] \quad \forall b \in (a; \omega)$.

Якщо $\exists \lim_{b \rightarrow \omega} \int_a^b f(x) dx = \int_a^{\omega} f(x) dx$, то він називається **невласним інтегралом**.

Зауваження 1.

Якщо $\omega \in R$ і $f(x) \in R[a; \omega]$, то нове визначення невластного інтеграла збігається з

визначенням визначеного інтеграла, тому що $F(b) = \int_a^b f(x) dx$ - неперервна функція від b і

$$\lim_{b \rightarrow \omega} F(b) = F(\omega).$$

Якщо $\omega = +\infty$, то говорять про **невласний інтеграл 1-го роду**.

Якщо $\omega < \infty$, функція $f(x)$ не обмежена на інтервалі $(b; \omega)$, то говорять про **невласний інтеграл 2-го роду**.

Зауваження 2. Особливість може бути ліворуч.

Приклади:

$$1^\circ \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left. \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right|_1^b = \frac{1}{\alpha-1} \quad \text{при } \alpha > 1,$$
$$= \ln x \Big|_1^b \rightarrow \infty \quad \text{при } \alpha = 1$$

$$2^\circ \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} < \infty \quad \text{при } \alpha < 1.$$

Критерій Коші

$$\int_a^{\omega} f(x) dx < \infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists B_\varepsilon \quad \forall b_1, b_2 \in (B_\varepsilon, \omega) \Rightarrow \left| \int_{b_1}^{b_2} f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

$$\int_a^{\omega} f(x) dx < \infty \Leftrightarrow \exists \lim_{b \rightarrow \omega} \int_a^b f(x) dx.$$

З критерію Коші випливає

Теорема порівняння Якщо $0 \leq f(x) \leq g(x) \quad x \in [a; \omega]$, то:

$$а) \int_a^{\omega} g(x) dx < \infty \Rightarrow \int_a^{\omega} f(x) dx < \infty \quad (\text{мажоранта})$$

$$б) \int_a^{\omega} f(x) dx = \infty \Rightarrow \int_a^{\omega} g(x) dx = \infty.$$

Доведення:

Оскільки $F(b) = \int_a^b f(x) dx$ і $G(b) = \int_a^b g(x) dx$ - неспадні функції і $F(b) \leq G(b)$, то:

- якщо $G(b) < M \Rightarrow F(b) < M$, тобто $\exists \lim_{b \rightarrow \omega} F(b)$ - за теоремою Вейерштрасса;

- якщо функція $F(x)$ необмежена, то і $G(x)$ необмежена, отже і $G(x)$ розбігається.
Теорема доведена.

Наслідок. Якщо функції $f(x)$, $g(x) > 0$ при $x \in [a; \omega)$ і $f(x) \square g(x)$ при $x \rightarrow \infty$, то
 $\int_a^\omega f(x) dx \square \int_a^\omega g(x) dx$, тобто збігаються, або розбігається одночасно.

Доведення: $(1-\varepsilon) g(x) \leq f(x) \leq (1+\varepsilon) g(x)$ і по ознаці порівняння твердження вірне.

Приклад $\int_1^\infty \frac{x dx}{\sqrt{1+x^5}} \square \int_1^\infty \frac{dx}{x^{3/2}} < \infty$.

Def

Нехай функція $f(x) \in R[a; b)$.

Якщо інтеграл $\int_a^\omega |f(x)| dx < \infty$, то $\int_a^\omega f(x) dx < \infty$ і говорять, що такий інтеграл збігається **абсолютно**.

Доведення: $\left| \int_{b_1}^{b_2} f(x) dx \right| < \int_{b_1}^{b_2} |f(x)| dx < \varepsilon$.

Приклад $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2} dx$ - збігається абсолютно.

Def

Якщо $\int_a^\omega f(x) dx < \infty$, але $\int_a^\omega |f(x)| dx = \infty$, то говорять, що $\int_a^\omega f(x) dx$ - збігається **умовно**.

Ознака Абеля – Дирихле

Якщо виконані наступні умови:

- 1) функція $F(b) = \int_a^b f(x) dx$ обмежена на напівінтервалі $[a; \omega)$;
- 2) функція $g(x) \square 0$ $\left(\begin{matrix} \text{или} \\ x \rightarrow \omega \end{matrix} \right)$ $\square 0$ $\left(\begin{matrix} \text{или} \\ x \rightarrow \infty \end{matrix} \right)$;

чи:

$$1') \int_a^\omega f(x) dx < \infty;$$

$$2') \text{ функція } g(x) \text{ монотонна й обмежена, тобто } |g(x)| \leq C,$$

$$\text{то } \int_a^\omega f(x) g(x) dx < \infty.$$

Доведення:

За критерієм Коші і 2-ий теоремою про середнє значення

$$\text{Для 1) - 2): } \left| \int_{b_1}^{b_2} f(x) g(x) dx \right| = |g(b_1)| \int_{b_1}^\xi f(x) dx + g(b_2) \int_\xi^{b_2} f(x) dx \leq \varepsilon \cdot 2M + \varepsilon \cdot 2M < 4\varepsilon M,$$

$$\text{Для 1') - 2'): } \left| \int_{b_1}^{b_2} f(x) g(x) dx \right| = |g(b_1)| \int_{b_1}^\xi f(x) dx + g(b_2) \int_\xi^{b_2} f(x) dx \leq C \cdot \varepsilon + C \cdot \varepsilon < 2C\varepsilon.$$

Приклади

1° $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^{\alpha}} dx < \infty$ по ознаці Дирихле при $\alpha > 0$ (у 0 особливостей немає)

Але не абсолютно сходиться $\alpha \in [0; 1]$.

$$\int_0^{\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx = \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos 2x}{x} dx \approx \int_1^{\infty} \frac{dx}{x} - \underbrace{\int_1^{\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx}_{< \infty}.$$

$= \infty$

2° $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} \arctg x dx < \infty$ за Абелем.

3° $\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^{3/2}} dx$ - досліджувати самостійно.

Вправа 1

Придумати приклад $0 \leq f(x)$ $\int_0^{\infty} f(x) dx < \infty$, але $f(x) \not\rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$.

Вправа 2

Придумати приклад $f(x) \not\rightarrow 0$ при $x \rightarrow \omega$, але $\int_a^{\omega} f(x) dx < \infty$ $\wedge$ $\int_a^{\omega} g(x) dx = \infty$.

Теорема (заміна змінних)

Якщо $\varphi: [\alpha; \gamma) \rightarrow [a; \omega)$ - неперервно диференційоване монотонне відображення, причому

$\varphi(\alpha) = a$, то $\int_a^{\omega} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$, при цьому інтеграли існують одночасно.

Доведення: $\int_{a=\varphi(\alpha)}^{b=\varphi(\beta)} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$

Теорема доведена.

Теорема (інтегрування частинами)

Якщо $\exists \lim_{x \rightarrow \omega} f(x)g(x)$, то $\int_a^{\omega} f(x)g'(x) dx = f(x)g(x)|_a^{\omega} - \int_a^{\omega} f'(x)g(x) dx.$

Доведення випливає з формули інтегрування частинами.

Приклади

1° $\int_0^{\infty} \sin(x^2) dx = \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} dt < \infty.$

2° $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \left| \frac{1}{x} \right| = \frac{1}{x} = \int_0^1 \frac{dt}{t^{2-p}},$ при $p > 0$ - власний інтеграл.

Вправа Придумати приклад, щоб $\underbrace{\int_a^{\omega} f(x)g'(x) dx}_{\text{несобственный интеграл}} = f(x)g(x)|_a^{\omega} - \underbrace{\int_a^{\omega} f'(x)g(x) dx}_{\text{собственный интеграл}}.$

$(\int_0^1 \ln x dx = x \ln x |_0^1 - \int_0^1 1 dx).$

Теорема (Інтегральна ознака Коші).

Якщо $f(x)$ - позитивна незростаюча функція, що прямує до нуля, тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ збігається тоді і тільки тоді, коли збігається інтеграл $\int_1^{\infty} f(x) dx$.

Доведення:

Тому що $\sum_{k=1}^n f(k+1) \leq \int_1^{n+1} f(x) dx \leq \sum_{k=1}^n f(k)$

$$\sum_{k=1}^n f(k) < \infty \Rightarrow \int_1^{n+1} f(x) dx < C \Rightarrow \int_1^{\infty} f(x) dx < \infty.$$

$$\int_1^{\infty} f(x) dx < \infty \Rightarrow \sum_{k=2}^{n+1} f(k) < C.$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} f(k) < C + f(1), \text{ тобто } \sum_{k=1}^{n+1} f(k) < \infty.$$

Приклад $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} < \infty$ при $p > 1$, т.к. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} < \infty$ при $p > 1$.

Вправа $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n}$ - довести, що ряд збігається при $p > 1$.

Лекція №8 Метричні і нормовані простори

Простір R^n і відстані на ньому

Def Довільна множина M називається метричним простором, якщо на декартовому добутку задана функція $\rho: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$, що володіє властивостями:

1. **позитивність:**

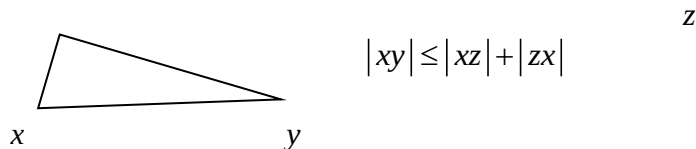
$$\forall x, y \in M \quad \text{а) } \rho(x, y) \geq 0 \quad \wedge \quad \text{б) } \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

2. **властивість симетрії:**

$$\forall x, y \in M \quad \rho(x, y) = \rho(y, x).$$

3. **нерівність трикутника:**

$$\forall x, y, z \in M \quad \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$$



Функція $\rho(x, y)$ називається **відстанню** або **метрикою**.

Вправа: із властивостей 1(а) і 3 одержати властивість 1(б).

Def

Нехай X - лінійний простір.

X називається **нормованим простором**, якщо $\forall x \in X \quad \exists \|x\| \in \mathbb{R}$.

(Позначення $\|x\|$ означає «норма»).

Властивості норми:

1. **позитивність норми:**

$$\forall x \in X \quad \|x\| \geq 0 \quad \wedge \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

2. **однорідність:**

$$\forall x \in X \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \vee \quad \mathbb{C} \quad \Rightarrow \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$$

3. **нерівність трикутника:**

$$\forall x, y \in X \quad \Rightarrow \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Твердження. Якщо X - нормований простір, то X - метричний простір, де $\rho(x, y) = \|x - y\|$.

Доведення:

Властивості 1 і 2 – очевидні.

Перевіримо властивість 3:

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = \|x - z + z - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| = \rho(x, z) + \rho(z, y),$$

що і було потрібно довести.

Приклади метричних і нормованих просторів.

1. **$\mathbb{R}$ - множина дійсних чисел.**

Як норму візьмемо $\|x\| = |x|$ - модуль.

$$\rho(x, y) = |x - y|.$$

Приклад іншої метрики в множині $\mathbb{R}$: $\rho^*(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}$.

Вправа: довести властивість 3 для цієї метрики.

Якщо визначити норму так: $\|x\|^* = \frac{\|x\|}{1 + \|x\|}$, то не виконана умова однорідності, тому що

$$|\lambda| \cdot \|x\|^* \neq \frac{|\lambda| \cdot \|x\|}{1 + |\lambda| \cdot \|x\|}.$$

2. **Простір $\mathbb{R}^n$.**

$$\mathbb{R}^n \quad X = (x_1, \dots, x_n) \quad x_k \in \mathbb{R} \quad k = \overline{1, n}$$

За визначенням: $\|X\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ - евклидова норма.

Нерівність трикутника виконана.

Отже, $\mathbb{R}^n$ - нормований, а тому $\mathbb{R}^n$ - метричний простір.

2'. **Простір $\mathbb{R}^n$. $\|X\| = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$ - Чебишевська норма.**

Нерівність трикутника випливає з властивостей модуля.

Позначення: $\|X\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$.

2". **Простір $\mathbb{R}^n$. $\|X\| = \sum_{k=1}^n |x_k|$ - “вулична метрика”.**

3. $C[a, b]$

$\|X\| = \sup_{t \in [a, b]} |x(t)|$ - Чебишевська норма.

$$\rho(x, y) = \sup_{[a, b]} |x(t) - y(t)|$$

$\rho(x_n, y) = \sup_{[a, b]} |x_n(t) - y(t)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ збігається з рівномірною збіжністю $x_n(t) \xrightarrow{\overline{}} y(t)$ на відрізьку $[a, b]$.

4. $C[a, b]$

$$\|X\| = \int_a^b |x(t)| dt.$$

Вправа: перевірити самостійно, що це – норма.

6. Нехай M - будь-яка множина.

Метрика: $\rho(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$

Нерівність трикутника $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ - виконується.

Такий простір називається **дискретним**.

Означення.

1. **Відкритою кулею** в метричному просторі називається: $K_r(a) = \{x \in M : \rho(x, a) < r\}$ - відкрита куля радіуса r з центром у точці a .
2. $K_r(a)$ називається **околицею точки (центра) a** кулі радіуса r .
 $U_r(a)$ - інше позначення.
3. **Замкнутою кулею** в метричному просторі називається:
 $\overline{K}_r(a) = \{x \in M : \rho(x, a) \leq r\}$ чи $B_r(a)$ - **замкнута куля**.
 $S_r(a) = \{x \in M : \rho(x, a) = r\}$ - **сфера**.

Означення.

1. Множина M називається **відкритою**, якщо: $\forall x \in G \quad \exists U_\delta(x) \subset G$, то $\forall x \in G$ є **внутрішньою точкою** G .
2. Точка $x \notin X$ називається **зовнішньою точкою** множині X , якщо вона є внутрішньою для CX - доповнення, тобто $\exists U(x): U(x) \cap X = \emptyset$.
3. Якщо x не є ні внутрішньою, ні зовнішньою, то вона називається **межевою точкою**. ∂X - **межа**, тобто множина межових точок.

Означення 1.

Точка a називається **граничною точкою** множині X , якщо $\forall U(a) \quad \exists x \in X \cap \overset{\circ}{U}(a)$

Означення 1'.

Точка a - **гранична точка** множині X , якщо $\forall U(a) \quad \exists x_n \in X \cap U(a) \quad n \in \mathbb{N}$, то в будь-якій околиці точки a знаходиться нескінченна безліч точок з X .

Легко бачити, що ці визначення еквівалентні.

Визначення.

Множина F називається **замкнутою**, якщо $\forall a$ граничної точки $F \Rightarrow a \in F$ (тобто всі граничні точки належать F).

Означення.

Множина $\overline{X}$ називається **замиканням** множини X , якщо $\overline{X} = X \cup X'$, де X' - множина граничних точок.

Твердження.

Замикання множини є замкнутою множиною, тобто $\overline{\overline{X}}$ - замкнуто.

Означення.

Точка $a \in X$ називається **ізолюваною** точкою множини X , якщо $\exists U(a): U(a) \cap X = \{a\}$.

Теорема. $K_r(a)$ - открыто, $\wedge \overline{K_r(a)}$ - замкнуто.

Доведення.

А) Візьмемо $\forall b \in K_r(a), \rho(a,b) = r_1 < r, \varepsilon = r - r_1$.

Доведемо, що $U_\varepsilon(b) \subset K_r(a)$.

$$x \in U_\varepsilon(b) \Rightarrow \rho(x,a) \leq \rho(x,b) + \rho(b,a) < r.$$

б) Припустимо, що куля $\overline{K_r(a)}$ не замкнута.

Значить $\exists b$ - гранична точка $\overline{K_r(a)}$ $\wedge b \notin \overline{K_r(a)} \Rightarrow \rho(a,b) = r_1 > r, \varepsilon = r - r_1$.

Візьмемо $U_\varepsilon(b) \cap \overline{K_r(a)} = \emptyset$.

$$\forall x \in U_\varepsilon(b) \Rightarrow \rho(x,a) \geq \rho(a,b) - \rho(x,b) > r.$$

Виходить, $U_\varepsilon(b) \cap \overline{K_r(a)} = \emptyset$.

Теорема доведена.

Зауваження. $\overline{K_r(a)} \neq K_r(a)$.

Так, у дискретному просторі $\overline{K_1(a)} = \{a\} \wedge \overline{K_1(a)} = M \Rightarrow \overline{K_1(a)} \neq K_1(a)$.

Вправа.

Довести, що в просторі $\mathbb{R}^n$ з евклідовою метрикою $\overline{K_1(a)} = K_1(a)$.

Лекція № 9

Властивості відкритих і замкнених множин

Теорема 1

Доповнення замкненої множини – відкрите, а доповнення відкритої множини – замкнене:

$$G - \text{відкрите} \Rightarrow CG = F$$

і навпаки.

Доведення.

Доведемо від протилежного.

Нехай множина $F = CG$ не замкнена, тобто $\exists a$ - гранична

точка $F \wedge a \notin F \Rightarrow a \in G \Rightarrow \exists U(a) \subset G \Rightarrow U(a) \cap F = \emptyset$, що є протиріччям.

Нехай множина $G = CF$ - не відкрита, тобто $\exists a \in G$, у будь-яком проколотом околі якої є точка із множини F . Але тоді точка a є граничною точкою множини, а виходить, повинна належати множині F . Це суперечить тому, що $a \in G$.

Теорема доведена.

Теорема 2

Об'єднання будь-якого числа відкритих множин є відкритим.

Перетинання будь-якого кінцевого числа відкритих множин – відкрите.

$$G_k - \text{відкрите} \Rightarrow \left(\bigcup_k G_k - \text{відкрите} \right) \wedge \left(\bigcap_{k=1}^n G_k - \text{відкрите} \right).$$

Доказ.

$$\text{а) } \forall a \in \bigcup_k G_k \Rightarrow \exists k: a \in G_k \Rightarrow \exists U(a) \subset G_k \subset \bigcup_k G_k.$$

$$\text{б) } a \in \bigcap_{k=1}^n G_k \Rightarrow \exists U_{\varepsilon_k}(a) \subset G_k.$$

Якщо $\varepsilon = \min \varepsilon_k$, то $U_{\varepsilon}(a) \subset \bigcap_{k=1}^n G_k$, що й було потрібно довести.

Теорема доведена.

Контрприклад для теореми 2:

$$\bigcap_{\varepsilon > 1} U_{\varepsilon}(a) = \overline{K_1}(a) - \text{замкнене}.$$

З теорем 1 і 2 випливає

Теорема

$$\text{Якщо множина } F_k - \text{замкнена,} \Rightarrow \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k - \text{замкнене} \right) \wedge \left(\bigcup_{k=1}^n F_k - \text{замкнене} \right).$$

Сам простір і порожній множина є замкненими й відкритими.

Збіжні й фундаментальні послідовності в метричному просторі.

Повнота простору.

Означення (Послідовність $x_n \in M$ - збіжна.)

$$(x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, a) = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N_{\varepsilon} \forall n > N_{\varepsilon} \Rightarrow \rho(x_n, a) < \varepsilon.$$

Властивості границі:

1° Єдиність границі. (Вправа).

2° Обмеженість: якщо послідовність x_n - збігається, $\Rightarrow x_n$ - обмежена, тобто

$$\exists U(a): \forall n \in N \quad x_n \in U(a).$$

Доказ

Візьмемо в якості ε одиницю, тобто $\varepsilon = 1$.

Тоді: $\varepsilon = 1 \Rightarrow \exists N_1 \forall n > N_1 \Rightarrow \rho(x_n, a) < 1$, тобто $x_n \in K_1(a) \quad n > N_1$.

Введемо позначення: $r = \max_{n \leq N_1} \rho(x_n, a)$.

Тепер $R = \max\{r, 1\}$.

Тоді $\forall n \in N \quad x_n \in U_R(a)$, що й було потрібно довести.

3° Якщо X - нормований простір, а послідовності x_n й y_n - збігаються, то:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda x_n + \mu y_n) = \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \mu \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

Лема

Нехай a - гранична точка множини $X \subset M$ (M - метричний простір)

$$\Leftrightarrow \exists x_n \in X \setminus \{a\} : x_n \rightarrow a.$$

Доказ

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in X \cap U_\varepsilon^0(a)$$

$$\varepsilon = 1 \quad \exists x_1 \in X \cap U_1^0(a)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \quad \exists x_2 \neq x_1 : x_2 \in X \cap U_{1/2}^0(a) \dots$$

$$\varepsilon = \frac{1}{n} \quad \exists x_n \neq x_k \quad k=1, \dots, n-1 : x_n \in X \cap U_{1/n}^0(a)$$

Виходить, $x_n \rightarrow a$, що й було потрібно довести.

Доведемо $x_n \rightarrow a$, виходить, якщо взяти будь-яке як завгодно мале ε , то в околі точки a будуть точки із множини X , що й було потрібно довести.

Означення

Послідовність $x_n, M \in X_n$ називається **фундаментальною**

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n, m \geq N \Rightarrow \rho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Теорема 4

Якщо послідовність x_n - збігається, то дана послідовність - фундаментальна.

Доказ

По нерівності трикутника: $\rho(x_n, x_m) \leq \rho(x_n, a) + \rho(a, x_m) < 2\varepsilon \quad n, m > N_\varepsilon$,
що й було потрібно довести.

Означення

Метричний простір M називається **повним**, якщо будь-яка фундаментальна послідовність збігається: x_n - фундаментальна $\Rightarrow x_n$ - збігається.

Приклад: R - повне (у силу критерію Коші).

Контрприклад: Q - множина раціональних чисел з метрикою

$$\rho(r, q) = |r - q| \quad - \text{ не повний простір.}$$

Десяткові наближення $\sqrt{2}$ прагнуть до $\sqrt{2}$, але $\sqrt{2} \notin Q$.

Приклад: Простір $C[a, b]$ - повний. Доведемо це.

Доказ

$x_n(t)$ - фундаментальна

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \quad \forall n, m > N_\varepsilon \Rightarrow \|x_n(t) - x_m(t)\| = \sup_{[a,b]} |x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon.$$

$\forall t \in [a, b] \quad x_n(t)$ - фундаментальна $\Rightarrow x_n(t)$ - збігається, тобто $x_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y_0(t)$.

Повернемося до нерівності:

$$|x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon \Rightarrow |x_n(t) - y_0(t)| \leq \varepsilon \quad \forall t \in [a, b],$$

тобто рівномірна збіжність $x_n(t) \rightarrow y_0(t) \in C[a, b]$, що й було потрібно довести.

Приклад: $C[a, b]$

Якщо взяти таку норму: $\|x(t)\| = \int_a^b |x(t)| dt$, то простір не є повним.

Границя й неперервність функції в метричному просторі.

Нехай $f: X \subset M_1 \rightarrow Y \subset M_2$, a - гранична точка X .

Означення I (за Коші): $b = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in X$.

$$0 < \rho_1(x_1, a) < \delta \Rightarrow \rho_2(f(x), b) < \varepsilon \Leftrightarrow \forall U_\varepsilon(b) \quad \exists U_\delta(a) \\ f(\overset{\circ}{U}_\delta(a)) \subset U_\varepsilon(b)$$

Означення II (за Гейне): $\forall x_n \in X \setminus \{a\} \wedge (x_n \rightarrow a) \Rightarrow f(x_n) \rightarrow b$.

При цьому визначення I (за Коші) $\Leftrightarrow$ визначення II (за Гейне).

Розглянемо окремий випадок, коли $M_1 = \mathbb{R}^n$, $M_2 = \mathbb{R}$, $y = f(x_1, \dots, x_n)$ - числова функція декількох змінних $x_k \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in X \quad 0 < \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - a_k)^2} < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Це визначення еквівалентне наступному (**чебишевська норма**):

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad |x_k - a_k| < \delta \quad k = 1, n; \quad x \neq a \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Означення.

Нехай задана функція $f: X \rightarrow Y$.

Функція $f(x)$ неперервна в точці:

$$a \in X \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in X \cap U_\delta(a) \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(f(a)).$$

Якщо a - гранична точка множини X , то попереднє визначення еквівалентне вираженню:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

В **ізольованій точці** функція неперервна.

Неперервність суперпозиції.

Нехай функція $f(x)$ - неперервна в точці a і функція $g(y)$ - неперервна в точці $b = f(a)$.

Тоді функція $g(f(x))$ - неперервна в точці a .

Доказ

$$x \rightarrow a \Rightarrow f(x_n) = y_n \rightarrow b \Rightarrow g(f(x_n)) = g(y_n) \rightarrow g(b) = g(f(a))$$

Що й було потрібно довести.

Означення.

Відображення або функція неперервна на множині, якщо вона неперервна в будь-якій точці цієї множини.

Теорема: Критерій неперервності.

$$f(x) \in C(X) \Leftrightarrow \forall G \subset Y \Rightarrow f^{-1}(G) \text{ - відкрита множина.}$$

Тобто, прообраз відкритої множини є відкритою множиною.

Доказ

1. Будь-яка точка із прообразу $f^{-1}(G)$ повинна входити в деякий окіл.

$$\text{Поберемо } x_0 \in f^{-1}(G) \quad g_0 = f(x_0) \in G \quad \exists U_\delta(y_0) \subset G.$$

$$\forall x_0 \in f^{-1}(G) \quad y_0 = f(x_0) \in G \quad \exists U_\delta(y_0) \subset G \quad \exists U_\delta(x_0) :$$

$$f(U_\delta(x_0)) \subset U_\delta(f(x_0)) \Rightarrow U_\delta(x_0) \subset f^{-1}(G).$$

Що й було потрібно довести.

2. Доведемо зворотне.

$$\text{Поберемо окіл } \forall U_\varepsilon(y_0) \subset G.$$

Тоді її прообраз $f^{-1}(U_\varepsilon(y_0))$ - відкрита множина.

$$x_0 \in f^{-1}(U_\varepsilon(y_0)) \Rightarrow \exists U_\delta(x_0) \in f^{-1}(U_\varepsilon(y_0)) \Rightarrow f(U_\delta(x_0)) \subset U_\varepsilon(f(x_0)).$$

Що й було потрібно довести.

Приклад: $f: M \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = \rho(x, a) \in C(M)$ - неперервна на всьому M .

(a - фіксована точка).

$$\forall x_0 \in M \quad |f(x) - f(x_0)| = |\rho(x, a) - \rho(x_0, a)| \leq \rho(x, x_0) < \varepsilon.$$

Лекція № 9

Компакти в метричному просторі

Означення. Нехай множина M - метричний простір.

Множина K із множини M називається **компактом** $\Leftrightarrow \forall x_n \in K \quad \exists x_{n_k} \rightarrow x_0 \in K$.

(У просторі $\mathbf{R}$ компактом є сегмент (теорема Больцано - Вейерштрасса)).

Властивості компактів:

1. Множина K - компакт $\Rightarrow K$ - **обмежена**, тобто $\exists K_r(a) \supset K$ (існує куля, яка містить цей компакт).

Доведення:

Припустимо протилежне:

$$\forall x_1 \in K \quad K_1(x_1) \quad \exists x_2 \in K : x_2 \notin K_1(x_1), \text{ тобто } \rho(x_1, x_2) \geq 1.$$

$$K^{(2)} = K_{\rho(x_1, x_2)}(x_2) \quad \exists x_3 \in K \quad \wedge \quad x_3 \notin K^{(2)} \text{ і так далі.}$$

Одержуємо:

$$x_n \in K \quad \rho(x_n, x_m) \geq 1 \text{ - не фундаментальна послідовність} \Rightarrow$$

$$\forall x_{n_k} \text{ - не фундаментальна послідовність, отже, будь-яка підпослідовність}$$

розходиться, що суперечить визначенню компакта.

Теорема доведена.

2. Множина K - компакт $\Rightarrow K$ - **замкнена**.

Доведення:

Якщо a гранична точка множини $K \Rightarrow \exists x_n \in K: x_n \rightarrow a \Rightarrow \forall x_{n_k} \rightarrow a \in K$.

Що й було потрібно довести.

Зауваження.

Якщо K - обмежена, замкнена множина, то із цього не випливає, що K - компакт.

Теорема про структуру компактів у просторі R^n

K - компакт тоді й тільки тоді, коли множина K - обмежена й замкнена.

Доведення.

1. $\Leftarrow$

$$\forall x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \in K$$

$$|x_i^{(k)}| \leq C \quad \forall i=1, n \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Розглянемо послідовність перших координат.

По теоремі Больцано – Вейерштрасса існує збіжна підпослідовність:

$$\exists x_1^{k_s} \xrightarrow{s \rightarrow \infty} x_1^0$$

Розглянемо послідовність других координат:

По теоремі Больцано – Вейерштрасса існує збіжна підпослідовність:

$$\exists x_2^{k_j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} x_2^0$$

Проробивши n кроків, одержимо:

$$\exists l_m \text{ послідовність, для якої } \forall i=1, n \quad x_i^{(l_m)} \rightarrow x_i^0.$$

Тобто $x^{(l_m)} \rightarrow x^0$ в чебишевській метриці, а отже й в евклідовій метриці.

x^0 - гранична точка.

$x^0 \in K$ у силу замкнутості K .

2. $\Rightarrow$

Це було доведено раніше.

Теорема доведена.

Властивості неперервних функцій на компактах

Теорема

Нехай K - компакт, $f: M \rightarrow M_1$ - відображення, $f(x) \in C(K)$.

Тоді $f(K)$ - компакт у просторі M_1 .

Доведення:

Беремо будь-яку послідовність y_s .

$$\forall y_s \in K_1 = f(K) \quad \exists x_s \in K: f(x_s) = y_s \quad \exists s_j: x_{s_j} \rightarrow x_0 \in K.$$

З неперервності по Гейне випливає: $f(x_{s_j}) = y_{s_j} \rightarrow y_0 = f(x_0) \in f(K)$.

Теорема доведена.

Наслідок.

Якщо $M_1 = \mathbb{R} \wedge f(x) \in C(K) \Rightarrow f(K)$ - обмежена замкнена множина в просторі $\mathbb{R}$.

Із цього наслідку одержуємо:

Перша теорема Вейерштрасса

Нехай $f(x)$ числова функція, неперервна на компактї K , тоді вона обмежена, тобто:

$$\exists C \quad \forall x \in K \quad |f(x)| \leq C.$$

Друга теорема Вейерштрасса

$$f(x) \in C(K) \Rightarrow \exists x_1, x_2 \in K \quad f(x_1) = \sup_K f(x) \wedge f(x_2) = \inf_K f(x).$$

Доведення:

Доведемо від противного: припустимо, що $\nexists \max_K f(x)$, тобто:

$$\forall x \in K \quad f(x) < M_1 = \sup_K f(x)$$

$$\forall \varepsilon = \frac{1}{n} \quad \exists x_n : M_1 > f(x_n) > M_1 - \frac{1}{n}$$

Можемо виділити збіжну підпослідовність:

$$\exists x_{n_s} \rightarrow x_0 \in K : f(x_0) = \lim_{s \rightarrow \infty} f(x_{n_s}).$$

Теорема доведена.

Диференціювання функцій декількох змінних

Нехай ϵ числова функція $y = f(x) \quad x \in D \subset \mathbb{R}^n$

І нехай x_0 - внутрішня точка множини D .

Уведемо позначення: $g_k(x_k) = f(x_1^0, \dots, x_{k-1}^0, x_k^0, x_{k+1}^0, \dots, x_n^0)$.

Якщо $\exists g'_k(x_k^0) = \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_k}$, то це називається **частинний похідний**.

Означення. Функція $f(x)$ називається **диференційованою у точці** x_0 тоді й тільки тоді, якщо

$$\exists A_k \in \mathbb{R} \quad k=1, n : \quad \forall x \in U_\delta(x_0).$$

$$f(x) - f(x_0) = \sum_{k=1}^n A_k \Delta x_k + o(\Delta x),$$

$$\text{тобто} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f - \sum_{k=1}^n A_k \Delta x_k}{\|\Delta x\|}$$

$$(\Delta f = A \Delta x + o(\Delta x) \Leftrightarrow \exists f'(x_0) = A).$$

Теорема (Перша необхідна умова диференційованості)

$f(x) \in D\{x_0\} \Rightarrow f(x) \in C\{x_0\}$, тобто диференційована функція неперервна.

Доведення:

$$\Delta f = \sum_{k=1}^n A_k \Delta x_k + o(\Delta x) \rightarrow 0 \quad \Delta x \rightarrow 0, \text{ що й було потрібно довести.}$$

Теорема (Друга необхідна умова диференційованості)

$$f(x) \in D\{x_n\} \Rightarrow \exists \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_k} = A_k$$

Доведення:

Зафіксуємо всі змінні, крім x_k .

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_k} &= \lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \frac{f(x_1^0, \dots, x_k, \dots, x_n^0) - f(x_1^0, \dots, x_k^0, \dots, x_n^0)}{\Delta x_k} = \\ &= \lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \frac{A_k \Delta x_k + o(\Delta x_k)}{\Delta x_k} = A_k\end{aligned}$$

Що й було потрібно довести.

Теорема (Достатня умова диференційованості)

$$\exists \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_k} \in C\{x_0\} \Rightarrow f(x) \in D(x_0)$$

Доведення:

Розглянемо приріст:

$$\begin{aligned}f(x) - f(x_0) &= (f(x_1, \dots, x_n) - f(x_1^0, \dots, x_n^0)) + (f(x_1^0, \dots, x_n) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)) + \\ &+ (f(x_1^0, \dots, x_{n-1}^0, x_n) - f(x_1^0, \dots, x_n^0)) =\end{aligned}$$

Скористаємося формулою Лагранжа:

$$\begin{aligned}&= \frac{\partial f(x_1^0 + \theta \cdot \Delta x_1, x_2^0, \dots, x_n^0)}{\partial x_1} \cdot \Delta x_1 + \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0 + \theta \cdot \Delta x_2, \dots, x_n^0)}{\partial x_2} \cdot \Delta x_2 + \dots + \\ &+ \frac{\partial f(x_1^0, \dots, x_{n-1}^0 + \theta \cdot \Delta x_{n-1}, x_n^0)}{\partial x_{n-1}} \cdot \Delta x_{n-1} + \\ &= \left(\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_1} + o(1) \right) \cdot \Delta x_1 + \dots + \left(\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_n} + o(1) \right) \cdot \Delta x_n = \\ &= \sum \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_k} \cdot \Delta x_k + o(\Delta x),\end{aligned}$$

$$\text{тому що } \sum \frac{o_k(1) \Delta x_k}{\|\Delta x\|} = \sum \frac{\Delta x_k}{\|\Delta x\|} \cdot o_k(1) = o(1).$$

Що й було потрібно довести.

Зауваження.

Покажемо, що умова неперервності частинних похідних є **суттєвою** для диференційованості, але **не є необхідною**.

Приклад 1: Розглянемо функцію $\sqrt[3]{xy}$.

$$f(x, y) = \sqrt[3]{xy} \text{ у точці } (0, 0).$$

Ясно, що функція – неперервна.

Існують частинні похідні: $\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = 0$ $\frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = 0$, тобто друга необхідна умова виконана.

$$\text{Частинні похідні: } \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{y}{x^2}} \text{ і } \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{x}{y^2}} \text{ і } \frac{\partial f}{\partial x} \text{ і } \frac{\partial f}{\partial y} \text{ не є}$$

неперервними в точці $(0, 0)$, достатня умова не виконана.

$$\text{По визначенню: } \Delta f = \sqrt[3]{xy} - 0 = 0 \cdot x + 0 \cdot y + o(\sqrt{x^2 + y^2}).$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt[3]{xy}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \neq 0 \Rightarrow f(x, y) \text{ не диференційована в нулі } (0, 0).$$

Приклад 2: $f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 y^2}$.

Частинні похідні в точці $(0, 0)$: $\frac{\partial f(0, 0)}{\partial x} = \frac{\partial f(0, 0)}{\partial y} = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{y^2}{x}} \text{ - розривна в точці } (0, 0).$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt[3]{x^2 y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{r^{4/3} \cos^{2/3} \varphi \cdot \sin^{2/3} \varphi}{r} = 0.$$

Виходить, функція диференційована.

Тим самим показане наступне включення: $D(G) \supset C^1(G)$.

Означення.

Нехай $f(x) \in D\{x_0\}$. Тоді диференціалом функції $f(x)$ називається:

$$df(x_0) = \sum_{k=1}^n A_k \Delta x_k = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_k} dx_k, \text{ де } dx_k = \Delta x_k.$$

У силу визначення $\Delta f \approx df(x_0)$.

Застосування диференціала до наближених обчислень.

Приклад: $1,03^{0,95}$

$$f(x, y) = x^y$$

$$x = 1,03 \quad y = 0,95 \quad \Delta x = 0,03$$

$$x_0 = 1 \quad y_0 = 1 \quad \Delta y = -0,5$$

Позначимо: $\frac{\partial f}{\partial x} = f'_x$; $\frac{\partial f}{\partial y} = f'_y$

Тоді $f'_x(1, 1) = 1$; $f'_y(1, 1) = 0$.

$$df(1, 1) = \Delta x_k = 0,03$$

$$\Delta f \approx 0,03 \Rightarrow 1,03^{0,95} \approx 1 + 0,03 = 1,03.$$

Означення. Градієнтом диференційованої функції в точці x_0 називається вектор, складений із частинних похідних:

$$\text{grad } f(x_0) = \left(\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_n} \right).$$

Лекція № 10

Диференційовність складеної функції

Теорема

Нехай $y = f(x) \quad x \in \mathbb{R}^n \quad x_k = \varphi_k(t)$

$t \in \mathbb{R}^m \quad \wedge \quad \varphi_k(t) \in D\{t_0\} \quad \wedge \quad f(x) \in D\{x_0\} \quad x_0 = \varphi(t_0)$

Можна утворити складену функцію: $h(t) = f(\varphi(t))$.

Тоді $h(t) \in D\{t_0\} \quad \wedge \quad \frac{\partial h(t_0)}{\partial t_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_i(t_0)}{\partial t_j}$.

Доведення:

Розглянемо приріст функції:

$$\begin{aligned} \Delta h &= f(\varphi(t)) - f(\varphi(t_0)) = \sum_k \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_k} \Delta \varphi_k + o(\Delta \varphi) = \\ &= \sum_k \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_k} \left(\sum_j \frac{\partial \varphi_k(t_0)}{\partial t_j} \Delta t_j + o(\Delta t) \right) + o(\Delta \varphi) = \\ &= \sum_j \left(\sum_k \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial \varphi_k(t_0)}{\partial t_j} \right) \Delta t_j + \sum_k \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_k} \cdot o_k(\Delta t) + o(\Delta \varphi) \end{aligned}$$

По визначенню диференційовності:

$$\Delta \varphi_k = \sum_j \frac{\partial \varphi_k(t_0)}{\partial t_j} \Delta t_j + o(\Delta t)$$

$$|\Delta \varphi_k| = \left| \sum_j \frac{\partial \varphi_k(t_0)}{\partial t_j} \Delta t_j + o(\Delta t) \right| \leq C \|\Delta t\| + \varepsilon \|\Delta t\|, \quad \text{тому що} \quad \frac{|o(\Delta t)|}{\|\Delta t\|} < \varepsilon.$$

Значить $|\Delta \varphi_k| \leq C_1 \|\Delta t\| \Rightarrow \|\Delta \varphi\| \leq C_2 \|\Delta t\|$ і тому $o(\Delta \varphi) = o(\Delta t)$.

Що й було потрібно довести.

Означення. Похідний по напрямку називається $\frac{\partial f(x_0)}{\partial l} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{f(x_0 + lt) - f(x_0)}{t}$,

де $\vec{l}$ - фіксований одиничний вектор.

Лема $\frac{\partial f(x_0)}{\partial l} = \text{grad } f(x_0) \cdot \vec{l}$ - добуток скалярний, тобто проекція градієнта на

відповідну пряму.

Доведення: За допомогою теореми про складену функцію:

$$h(t) = f(x_0 + lt)$$

$$h'(0) = \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_k} \cdot l_k = \text{grad } f(x_0) \cdot \vec{l}$$

Що й було потрібно довести.

Геометричний зміст градієнта (у точці x_0): $\text{grad } f(x_0)$ - це напрямок найбільшого росту функції f .

Дотична площина.

Нехай $y = f(x) \in D\{x_0\}$

Графік: $\Gamma_f = \{x, f(x) \mid x \in D_f\}$ - поверхня в просторі $\mathbb{R}^{n+1}$.

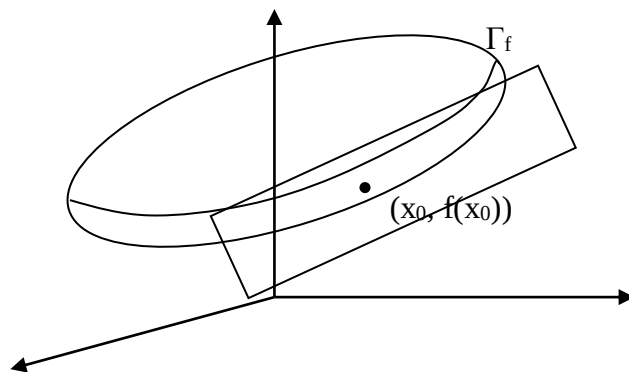
Оскільки функція диференційовна, то можемо записати:

$$y - y_0 = \Delta f = \sum_k \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_k} (x_k - x_k^0) + o(\Delta x)$$

$y - y_0 = \sum_k A_k (x_k - x_k^0)$ - площина в просторі $\mathbb{R}^{n+1}$, яка називається **дотичною площиною до поверхні Γ_f** .

Властивість дотичної площини:

$y - y_{\text{дан}} = o(\Delta x)$, тобто дотична площина найбільше близько наближена до графіка.



Геометричний зміст $df(x_0)$ - приріст абсциси дотичної площини.

Інваріантність форми першого диференціала

Теорема

Нехай $f(x) \in D(x_0)$ $x \in \mathbb{R}^n$ $x = x(t)$ $t \in \mathbb{R}^m$ $\forall k = 1, m$.

$x(t)$ - вектор-функція, що полягає зі скалярних функцій;

$x_k(t)$ - диференційовна в точці t_0 , $x(t_0) = x_0$;

$h(t) = f(x_1(t), \dots, x_n(t))$ - суперпозиція функцій.

Тоді $dh(t) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial h}{\partial x_k} dx$, тобто вид диференціала не міняється.

Доказ

$$dh(t) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial h}{\partial t_j} dt_j = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial t_j} \right) dt_j = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} \left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial x_k}{\partial t_j} dt_j \right) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k,$$

тому що $dx_k = \sum_{j=1}^m \frac{\partial x_k}{\partial t_j} dt_j$ - диференціал функції $x_k(t)$.

Що й було потрібно довести.

Похідні й диференціали вищих порядків

Означення.

Нехай $f(x)$ - функція n змінних.

Нехай $f(x)$ - диференційовна, тобто $\exists \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad \forall x \in D$.

Якщо $\exists \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \quad (i \neq j)$, то вона називається **змішаною похідною**.

Приклад

Дана функція x^y .

Знайдемо її змішану похідну:

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^y) = yx^{y-1}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(yx^{y-1}) = x^{y-1} + y \ln x \cdot x^{y-1}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(yx^{y-1}) = \frac{1}{x}x^y + y \ln x \cdot x^{y-1} = x^{y-1} + y \ln x \cdot x^{y-1}.$$

Теорема про рівність змішаних похідних.

Якщо $\exists \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}; \quad \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} \in C(x_0) \quad \forall x \in U(x_0),$

то $\exists \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_j \partial x_i}$ (передбачається, що $i \neq j$).

Доведення.

Будемо вважати, що функція $f(x)$ залежить тільки від x_i, x_j , усі інші змінні фіксовані.

Складемо функцію:

$$\begin{aligned} \Delta &= f(x_i, x_j) - f(x_i^0, x_j) - f(x_i, x_j^0) + f(x_i^0, x_j^0) = \\ &= \underbrace{(f(x_i, x_j) - f(x_i^0, x_j))}_{\varphi(x_j)} - \underbrace{(f(x_i, x_j^0) - f(x_i^0, x_j^0))}_{\varphi(x_j^0)} = \\ &= [\text{по формулі Лагранжа для функції } \varphi] = \\ &= \varphi'_{x_j}(x_j^0 + \theta_2 \Delta x_j) \Delta x_j = \left(\frac{\partial f(x_i, x_j^0 + \theta_2 \Delta x_j)}{\partial x_j} - \frac{\partial f(x_i^0, x_j^0 + \theta_2 \Delta x_j)}{\partial x_j} \right) \Delta x_j = \\ &= \left[\hat{i} \hat{i} \ddot{y} \hat{o} \ddot{u} \quad \hat{i} \hat{\delta} \hat{e} \hat{i} \hat{a} \hat{i} \hat{y} \hat{a} \hat{i} \right] = [\hat{a} \hat{e} \hat{o} \hat{o} \hat{a} \hat{\delta} \hat{a} \hat{i} \hat{o} \hat{e} \hat{\delta} \hat{o} \hat{a} \hat{i} \quad \hat{i} \hat{i} \quad x_i] = \\ &= \frac{\partial^2 f(x_i^0 + \theta_1 x_i, x_j^0 + \theta_2 \Delta x_j)}{\partial x_i \partial x_j} \Delta x_j \Delta x_i \end{aligned}$$

Перегрупуємо початкову функцію й, за аналогією з попередніми викладеннями, одержимо:

$$\begin{aligned} \Delta &= f(x_i, x_j) - f(x_i^0, x_j) - f(x_i, x_j^0) + f(x_i^0, x_j^0) = \\ &= \underbrace{(f(x_i, x_j) - f(x_i, x_j^0))}_{\psi(x_i)} - \underbrace{(f(x_i^0, x_j) - f(x_i^0, x_j^0))}_{\psi(x_j^0)} = \\ &= \frac{\partial^2 f(x_i^0 + \theta_1' \Delta x_i, x_j^0 + \theta_2' \Delta x_j)}{\partial x_j \partial x_i} \Delta x_j \Delta x_i \end{aligned}$$

Дорівнюємо обидві праві частини отриманих рівностей і скорочуємо на $\Delta x_i \Delta x_j$.

Спрямовуючи $\Delta x \rightarrow 0$ й використовуючи неперервність, одержимо потрібну рівність:

$$\frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \partial x_j}$$

Що й було потрібно довести.

Приклад (Необхідність неперервності змішаних похідних)

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (0, 0) \end{cases}$$

Покажемо, що змішані похідні не рівні:

$$f''_{xy} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'_y(x, 0) - f'_y(0, 0)}{x}$$

$$f'_y(0, 0) = 0$$

$$f'_y(x, 0) = x \quad \text{— по визначенню.}$$

Підставимо це у визначення похідної:

$$f''_{xy} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 0}{x} = 1$$

$$f''_{yx}(0, 0) = -1 \quad \text{у силу антисиметрії.}$$

Наслідок.

Якщо $f \in C^k(G)$ й множина G відкрита, то всі змішані похідні до k -того порядку не залежать від порядку диференціювання.

Визначення диференціалів вищого порядку.

Якщо функція $f(x)$ диференційовна в околі $U(x_0)$, тобто $\exists df(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f(x)}{\partial x_k} dx_k$,

якщо $\exists d(df(x)) = d^2f(x) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_k} dx_j dx_k$, то це називається диференціалом другого порядку.

Аналогічно: $d^k f(x) = d(d^{k-1} f(x))$ — диференціал k -того порядку.

По індукції:

$$d^k f(x, y) = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^k f(x, y) \quad \text{— оператор диференціювання.}$$

Приклад 1

$$d^2 f(x) = d \left(\sum_k \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k \right) = \sum_k \sum_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} dx_j dx_k + \sum_k \frac{\partial f}{\partial x_k} d^2 x_k$$

Приклад 2 Функція e^{x-2y} . Знайти $d^3 e^{x-2y}$.

Розв'язок:

Уведемо позначення: $z = x - 2y$ — лінійна функція.

Тоді $d^3 e^{x-2y} = d^3 e^z = (e^z)''' dz^3 = e^{x-2y} (dx - 2dy)^3$.

Приклад 3 Функція e^{x^2-2y} . Знайти $d^3 e^{x^2-2y}$.

Розв'язок:

Хоча інваріантності немає (тому що функція — нелінійна), але однаково корисно ввести $z = x^2 - 2y$.

$$de^z = e^z dz$$

$$d^2 e^z = d(e^z dz) = e^z (dz)^2 + e^z d^2 z$$

Випишемо:

$$dz = 2xdx - 2dy$$

$$d^2z = 2dx^2$$

$$d^3z = 0$$

Отже:

$$\begin{aligned} d^3e^z &= d(e^z(dz)^2 + e^zd^2z) = e^z(dz)^3 + 2e^zdz \cdot d^2z + e^zdz \cdot d^2z + e^zd^3z = \\ &= e^z((dz)^3 + 3d^2z \cdot dz) = [z = x^2 - 2y] = \\ &= e^{x^2-2y}((2xdx - 2dy)^3 + 3(2xdx - 2dy) \cdot 2dx^2) \end{aligned}$$

Лекція № 11

Локальний екстремум функції декількох змінних

Означення.

Будемо говорити, що функція $f(x)$, визначена в околі $U(x_0)$, має **локальний максимум** у точці x_0 тоді й тільки тоді, коли виконана умова:

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in U_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \leq f(x_0).$$

При $f(x) < f(x_0)$ - **строгий локальний максимум**.

Аналогічно – для **локального мінімуму**:

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in U_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \geq f(x_0).$$

При $f(x) > f(x_0)$ - **строгий локальний мінімум**.

Теорема (Необхідна умова локального екстремума)

Якщо в точці x_0 - локальний екстремум і $f(x) \in D(x_0)$, то $\forall k$ виконується умова:

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_k} = 0 \quad \text{або} \quad df(x_0) = 0.$$

Доведення:

Зафіксуємо всі змінні, крім x_k .

Тоді: $g(x_k) = f(x_1^0, \dots, x_k, \dots, x_n^0)$.

І по теоремі Ферма: $g'(x_k^0) = \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_k} = 0$.

Що й було потрібно довести.

Теорема (Достатня умова локального екстремума)

Нехай $df(x_0) = 0$ і $f(x) \in D^2(x_0)$.

Тоді:

1) Якщо $d^2f(x_0) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j > 0$ при $|dx| \neq 0$, то в цій точці – **локальний мінімум**.

2) Якщо $d^2f(x_0) < 0$, то в цій точці – **локальний максимум**.

3) Якщо $d^2f(x_0)$ міняє знак, тобто:

$$\left. \begin{aligned} \exists \xi \in \mathbb{R}^n \quad \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \partial x_j} \xi_i \xi_j > 0 \\ \exists \eta \in \mathbb{R}^n \quad \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \partial x_j} \eta_i \eta_j < 0 \end{aligned} \right\}, \quad \text{те в цій точці не існує локального екстремума.}$$

Доведення:

По локальній формулі Тейлора: $\Delta f = \underbrace{df(x_0)}_{=0} + \frac{1}{2} d^2 f(x_0) + o(|\Delta x|^2)$.

Тоді:

$$1) \quad d^2 f(x_0) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j = \underbrace{|\Delta x|^2}_{\substack{\text{або } \sum_{i=1}^n \Delta x_i^2 \\ \text{і } \sum_{i=1}^n \Delta x_i^2}} \sum_{i,j=1}^n f''_{ij}(x_0) \underbrace{\frac{\Delta x_i}{|\Delta x|}}_{=\xi_i} \cdot \underbrace{\frac{\Delta x_j}{|\Delta x|}}_{=\xi_j} \geq d |\Delta x|^2.$$

Оскільки функція, визначена на сфері $|\xi|=1$, то вона досягає своїх $\max$ і $\min$ за теоремою

Вейерштрасса, те $d^2 f(x_0) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j$ і

$$0 < d \leq \sum_{i,j=1}^n f''_{ij} \xi_i \xi_j, \text{ де } d = \min_{|\xi|=1} \sum_{i,j=1}^n f''_{ij} \xi_i \xi_j.$$

Підставимо

$$\Delta f = \underbrace{df(x_0)}_{=0} + \frac{1}{2} d^2 f(x_0) + \underbrace{o(|\Delta x|^2)}_{< \varepsilon |\Delta x|^2} \geq \frac{d}{2} |\Delta x|^2 - \varepsilon |\Delta x|^2 > 0, \quad \forall \varepsilon \in \left(0, \frac{d}{2}\right); \quad |\Delta x| < \delta; \quad |\Delta x| \neq 0.$$

$f(x) - f(x_0) > 0$, тобто маємо строгий локальний мінімум.

Що й було потрібно довести.

2) аналогічно 1).

3) За локальною формулою Тейлора:

$$\Delta f = df(x_0) + \frac{1}{2} d^2 f(x_0) + o(|\Delta x|^2) \Big|_{\Delta x = t\xi} > 0$$

$$\Delta f \Big|_{\Delta x = t\xi} < 0 \quad \text{при} \quad t < \delta.$$

Тобто $\forall \delta > 0 \quad \exists x_1, x_2 \in U_\delta(x_0): \quad f(x_1) > f(x_0) > f(x_2)$.

Тобто: локального екстремума не існує.

Теорема доведена.

Зауваження. При $d^2 f(x_0) \geq 0$, екстремума може не бути.

Обчислити **знаковизначенність форми** можна за критерієм Сильвестра.

Неявна функція

Означення.

$$x, y \in \square, \quad f(x, y) = 0 \quad (1)$$

$y = y(x) \quad x \in I$ - неявна функція, обумовлена рівнянням (1), якщо: $f(x, y(x)) \equiv 0 \quad \forall x \in I$.

Приклад 1: $y^2 - x^2 = 0$.

1) $\forall x \in \square$ - нескінченно багато функцій задовольняє цьому рівнянню;

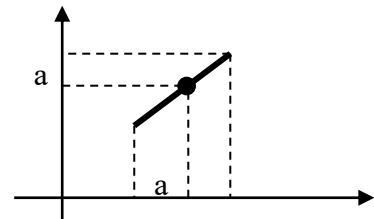
2) $y(x) \in C(\square)$ - чотири неперервні функції;

3) $y(a) = a$ - неперервна функція,

$x = 0; \quad |x| = 0$ - дві неперервні неявні функції;

3') $y(a) = a$ - в околиці $U_\delta(a)$ існує одна неперервна функція;

4) $y(0) = 0$ - чотири неперервні функції.



Теорема 1 про існування неявної функції (про $\exists!$ неявну функцію)

Нехай функція $f(x, y)$ визначена на деякій області $D \subset \mathbb{R}^2$ зі значеннями в $\mathbb{R}$ і задовольняє наступним умовам:

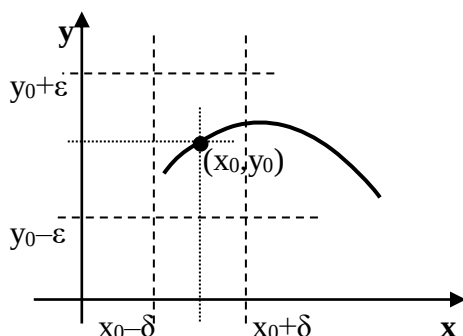
$$\left. \begin{array}{l} 1) \quad (x_0, y_0) \in D, \quad f(x_0, y_0) = 0 \\ 2) \quad f(x, y) \in C(U(x_0, y_0)) \\ 3) \quad \exists f'_y(x, y) \in C(U(x_0, y_0)) \\ 4) \quad f'_y(x_0, y_0) \neq 0 \end{array} \right\}$$

Тоді $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0) \quad \exists \delta > 0$

$$\forall x \in U_\delta(x_0) \quad \exists! y(x) \in U_\varepsilon(y_0) \quad \wedge \quad f(x, y(x)) \equiv 0 \quad \wedge \quad y(x) \in C(U_\delta(x_0)).$$

Доведення:

$$\exists U_r(x_0, y_0): \operatorname{sgn} f'_v(x, y) = \operatorname{sgn} f'_v(x_0, y_0) \quad (> 0 - \text{для визначеності})$$



Похідна зберігає знак, отже функція $f(x, y)$ - монотонна по y при фіксованому x .

Виходить, при фіксованому x існує одне розв'язок $y(x)$ рівняння (1).

З того, що похідна позитивна впливає:

$$f(x_0, y) \uparrow (\ddot{i} \hat{i} \ y)$$

$$f(x, y) < 0 \quad \text{ï ðè} \quad y < y_0$$

$$f(x, y) > 0 \quad \text{ï ðè} \quad y > y_0$$

Отже, $\exists \delta > 0 \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \quad f(x_0, y_0 - \varepsilon) < 0 \quad \wedge \quad f(x_0, y_0 + \varepsilon) > 0$.

Яке b x не побрали, з монотонності функції $q(y) = f(x, y)$ випливає:

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \quad \exists! y(x): \quad f(x, y(x)) = 0.$$

Тобто довели, що:

$$\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0) \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in U_\delta(x_0) \quad \exists ! y(x) \in U_\varepsilon(y_0) \quad \wedge \quad f(x, y(x)) \equiv 0.$$

Неперервність $y(x)$ у точці x_0 записана вище.

Неперервність у точці $x_1 \in U_\delta(x_0)$ доводиться повторенням попереднього міркування у фіксованій точці (x_1, y_1) .

Теорема доведена.

Зауваження. Умови 3) і 4) можна замінити строгою монотонністю по y .

Теорема 2 (про диференційовність неявної функції)

Нехай функція $f(x, y)$ визначена на деякій області $D \subset \mathbb{R}^2$ зі значеннями в $\mathbb{R}$ і задовольняє наступним умовам:

- 1) $(x_0, y_0) \in D - \text{ái óò ðáí í ýÿ ò î ÷ è à è} \quad f(x_0, y_0) = 0$
- 2) $f(x, y) \in C^k(U(x_0, y_0)), \quad k \geq 1 \quad (\text{äê ô âðáí öëðóái î ñò ü} \quad k \quad \text{ðàç})$
- 3) $\exists f'_y(x, y) \in C^{k-1}(U(x_0, y_0))$
- 4) $f'_v(x_0, y_0) \neq 0$

Тоді:

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0) \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in U_\delta(x_0) \\ \exists! y(x) \in U_\varepsilon(y_0) \quad \wedge \quad f(x, y(x)) \equiv 0 \quad \wedge \quad y(x) \in C^k(U_\delta(x_0)) \quad \wedge \\ \wedge \quad y'(x) = -\frac{f'_x(x, y(x))}{f'_y(x, y(x))} \in C(U_\delta(x_0)) \end{aligned}$$

Доведення:

З теореми 1. випливає: $\exists! y(x) \in C(U_\delta(x_0))$.

Доведемо диференційовність неявної функції для $k = 1$.

За означенням:

$$\begin{aligned} - \quad f(x_0, y(x_0)) &= 0 \\ \underline{f(x, y(x))} &= 0 \\ f(x, y(x)) - f(x_0, y(x_0)) &= 0. \end{aligned}$$

З рівності Лагранжа:

$$f'_x(x_0 + \theta \Delta x, y_0(x_0) + \theta \Delta y) \Delta x + f'_y(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y) \Delta y = 0.$$

Звідси одержуємо:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{f'_x(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y)}{f'_y(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y)} \xrightarrow[\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \text{è ç í ãü ä ä ü äí í ñ ò è \\ ÷ ä ñ ò í ü ö í ö í è ç äí äí ü ö}}]{\Delta x \rightarrow 0} -\frac{f'_x(x_0, y_0)}{f'_y(x_0, y_0)} \quad (*)$$

Тобто, теорема доведена для точки $x = x_0$.

Повторюючи міркування для будь-якої точки з околиці $U_\delta(x_0)$, одержуємо:

$$y'(x) = -\frac{f'_x(x, y(x))}{f'_y(x, y(x))} \in C(U_\delta(x)).$$

Доведемо диференційовність неявної функції для $k > 1$.

Продиференціюємо рівність (*), одержимо:

$$y''(x) = -\frac{(f''_{xx}(x, y(x)) + f''_{xy}(x, y(x))y'_x)f'_y - f'_x(f''_{xy} + f''_{yy}y'_x)}{(f'_y)^2} \in C$$

Теорема доведена.

Приклад 1: $f(x, y) = y^2 - x^2 \in C^k(\square^2)$

а) Задамо умову: $f'_y = 2y \neq 0$.

Тому довелося викинути точку $y_0 = 0 \Rightarrow x_0 \neq 0$.

Одержимо формулу: $y' = \frac{x}{y}$.

Як наслідок теореми 2 одержуємо рівняння дотичної для кривої, заданої в неявному виді.

Наслідок. Розглянемо криву $K: f(x, y) = 0 \quad f(x, y) \in C^1(D)$.

$$f'_y(x_0, y_0) \neq 0 \Rightarrow y'(x_0) = -\frac{f'_x(x_0, y_0)}{f'_y(x_0, y_0)}$$

Підставляємо в рівняння дотичної:

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0) = -\frac{f'_x(x_0, y_0)}{f'_y(x_0, y_0)}(x - x_0) \Rightarrow$$

$\Rightarrow f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y = 0$ (**) - це рівняння дотичної до кривої, заданої рівнянням (1).

б) Аналогічно при $f'_x(x_0, y_0) \neq 0 \Rightarrow \exists! x = x(y) \Rightarrow (**)$

Виходить, при $f'_x(x_0, y_0)^2 + f'_y(x_0, y_0)^2 \neq 0$ рівняння дотичної має вигляд $(**)$.

Означення.

$(x_0, y_0) \in K$ називається **особливою точкою**, якщо виконується умова:

$$f'_x(x_0, y_0)^2 + f'_y(x_0, y_0)^2 = 0, \text{ тобто } \text{grad } f(x_0, y_0) = 0.$$

Теорема 1' (про існування неявної функції декількох змінних)

Нехай функція $f(x, y)$ задовольняє наступним умовам:

1) $\forall (x_0, y_0)$ - внутрішньої точки $D_f : f(x_0, y_0) = 0$

2) $f(x, y) \in C(U(x_0, y_0))$

3) $f'_y \in C(U(x_0, y_0))$

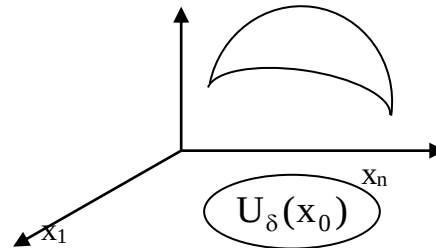
4) $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$

Тоді $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0) \exists \delta > 0$

$$\forall x \in U_\delta(x_0) \exists! y(x) : y(x) \in U_\varepsilon(y_0) \wedge f(x, y(x)) \equiv 0 \wedge y(x) \in C(U_\delta(x_0))$$

Доведення:

Доводиться аналогічно теоремі 1'.



Теорема 2' (про диференційовність неявної функції декількох змінних)

Нехай функція $f(x, y)$ задовольняє наступним умовам:

1) $\forall (x_0, y_0)$ - внутрішньої точки $D_f : f(x_0, y_0) = 0$

2') $f(x, y) \in C^k(U(x_0, y_0))$

3') $f'_y \in C^{k-1}(U(x_0, y_0))$

4) $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$

Тоді $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0) \exists \delta > 0$

$$\forall x \in U_\delta(x_0) \exists! y(x) : y(x) \in U_\varepsilon(y_0) \wedge f(x, y(x)) \equiv 0 \wedge y(x) \in C(U_\delta(x_0)) \wedge y(x) \in C^k(U_\delta(x_0))$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_k} = - \frac{f'_{x_k}}{f'_y}$$

Доведення випливає з теорем 1' і 2.

Дотична площина поверхні, заданої в неявному виді

Нехай поверхня S задана в неявному виді рівнянням:

$$f(x, y, z) = 0, \text{ де } f \in C^1(U(x_0, y_0, z_0))$$

Наслідок теореми 2'.

Нехай $f'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.

$$\text{Тоді } \exists! z(x, y) \in C^1(U(x_0, y_0)), \quad z'_x = - \frac{f'_x(x_0, y_0, z_0)}{f'_z(x_0, y_0, z_0)}, \quad z'_y = - \frac{f'_y(x_0, y_0, z_0)}{f'_z(x_0, y_0, z_0)}.$$

Рівняння дотичної площини:

$$z - z_0 = z'_x(x_0, y_0) \Delta x + z'_y(x_0, y_0) \Delta y = - \frac{f'_x(x_0, y_0, z_0)}{f'_z(x_0, y_0, z_0)} \Delta x - \frac{f'_y}{f'_z} \Delta y.$$

Отже:

$$f'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

Довели в припущенні: $f'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.

Це рівняння вірне при $\text{grad } f(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.

Означення. Якщо $\text{grad } f(x_0, y_0, z_0) = 0$, то точка (x_0, y_0, z_0) називається **особою**.

Рівняння нормалі:
$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{f'_z(x_0, y_0, z_0)}.$$

Зауваження. В особливій точці немає площини й немає нормалі.

Приклад 2: $x^2 + (y - z)^2 - 2(y + z)^2 = 2x - 1$

Знайти (якщо є) особливі точки.

Розв'язок:

$$\begin{cases} f'_x = 2x - 2 = 0 \\ f'_y = 2(y - z) - 4(y + z) = 0 \\ f'_z = -2(y - z) - 4(y + z) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ -y - 3z = 0 \\ -z - 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Визначник дорівнює нулю.

Дана поверхня – конус.

Немає дотичній площини в точці $(1, 0, 0)$.

Лекція № 12

Диференціювання відображень

Нехай $f(x)$ - відображення з $\square^n$ у $\square^m$ і x_0 - внутрішня точка області визначення D_f .

$f(x)$ диференційовна в точці x_0 , якщо існує лінійний оператор A з $\square^n$ у $\square^m$ такий, що $\forall x \in U(x_0) \quad f(x) - f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x)$.

Лема

$f(x): \square^n \rightarrow \square^m$ диференційовна в точці $x_0 \Leftrightarrow f_k(x) \in D(x_0) \quad \forall k = 1, m$

Доведення:

1. Доведемо $\Rightarrow$

$$\forall x \in U(x_0) \quad f(x) - f(x_0) = A \cdot \Delta x + o(\Delta x), \quad \text{де } A = (a_{ij}) \Big|_{j=1, n}^{i=1, m}$$

$$k = 1, m \quad f_k(x) - f_k(x_0) = \sum_{j=1}^n a_{kj} \Delta x_j + o_k(\Delta x) \Rightarrow f_k \in D(x_0)$$

2. Доведемо $\Leftarrow$

Проробивши попередні викладення у зворотному порядку, одержимо зворотне твердження.
Лема доведена.

Означення.

$$f'(x_0) = (a_{ij}) = \left(\frac{\partial f_i(x_0)}{\partial x_j} \right)_{i,j} - \text{матриця Якобі, у якої:}$$

рядки – градієнти функції f_i , а стовпці – дотичні вектори до координатної кривої $y = f(x_1^0, \dots, x_j, \dots, x_n^0)$.

Неявне відображення (функція)

Def

Неявне відображення: $y = y(x): D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$,

якщо виконуються умови: $f(x, y(x)) \equiv 0$ або
$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) \equiv 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ f_m(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) \equiv 0 \end{cases},$$

т.е. потрібно дозволити цю систему відносно y .

Розглянемо окремий випадок – лінійні рівняння:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + b_{11}y_1 + \dots + b_{1m}y_m = 0 \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n + b_{m1}y_1 + \dots + b_{mm}y_m = 0 \end{cases}$$

Система має розв'язок тільки за умови: $\det B \neq 0$.

Тоді $y = B^{-1}Ax \Rightarrow y' = B^{-1}A$.

Теорема про існування неявного відображення.

Нехай маємо функцію $f: U(x_0, y_0) \subset \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$, яка задовольняє наступним умовам:

- 1) $f(x_0, y_0) = 0$
- 2) $f(x, y) \in C(U(x_0, y_0))$
- 3) $f'_y(x, y) \in C(U(x_0, y_0))$

$$4) \det f'_y(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1(x_0, y_0)}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_1(x_0, y_0)}{\partial y_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m(x_0, y_0)}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_m(x_0, y_0)}{\partial y_m} \end{vmatrix} \neq 0$$

Тоді $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0) \exists \delta > 0 \quad \forall x \in U_\delta(x_0) \exists! y = y(x) \in U_\varepsilon(y_0):$

$$f(x, y(x)) = 0 \quad \wedge \quad y(x) \in C(U_\delta(x_0)).$$

Теорема про диференційовність неявного відображення.

Нехай маємо функцію $f: U(x_0, y_0) \subset \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$, яка задовольняє наступним умовам:

- 1) $f(x_0, y_0) = 0$
- 2) $f(x, y) \in C(U(x_0, y_0))$
- 3) $f'_x(x, y), f'_y(x, y) \in C(U(x_0, y_0))$, $\partial \hat{f} \hat{a} \tilde{n} \partial \ddot{u} \quad f \in C^1(U(x_0, y_0))$

$$4) \det f'_y(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1(x_0, y_0)}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_1(x_0, y_0)}{\partial y_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m(x_0, y_0)}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_m(x_0, y_0)}{\partial y_m} \end{vmatrix} \neq 0$$

Тоді $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0) \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in U_\delta(x_0) \quad \exists! y = y(x) \in U_\varepsilon(y_0):$
 $f(x, y(x)) = 0 \quad \wedge \quad y(x) \in C^1(U_\delta(x_0)) \quad \wedge \quad y'_x = -f'_y(x, y(x))^{-1} \cdot f'_x(x, y(x)).$

Доведення: Доведемо за визначенням:

$$\begin{aligned} & \|\Delta y + f'_y(x_0, y_0)^{-1} \cdot f'_x(x_0, y_0) \Delta x\| = \\ & = \|f'_y(x_0, y_0)^{-1} \cdot (f'_y(x_0, y_0) \Delta y + f'_x(x_0, y_0) \Delta x)\| = \\ & = \left[df(x_0, y_0) = \Delta f - o(\|\Delta x\| + \|\Delta y\|) \right] = o(\|\Delta x\| + \|\Delta y\|) \\ & \left[\Delta f = f(x, y(x)) - f(x_0, y_0) \right] \end{aligned}$$

де $\Delta x = x - x_0, \quad \Delta y = y - y_0.$

Звідси випливає, що $\|\Delta y + A \cdot \Delta x\| \leq \varepsilon_1 (\|\Delta x\| + \|\Delta y\|) \leq \frac{1}{2} (\|\Delta x\| + \|\Delta y\|).$

$$\|\Delta y\| - \|A\| \cdot \|\Delta x\| \leq \|\Delta y\| - \|A \cdot \Delta x\| \leq \|\Delta y + A \cdot \Delta x\| \leq \frac{1}{2} (\|\Delta x\| + \|\Delta y\|).$$

$$\frac{1}{2} \|\Delta y\| \leq \left(\|A\| + \frac{1}{2} \right) \cdot \|\Delta x\|$$

$$\|\Delta y\| \leq (2\|A\| + 1) \cdot \|\Delta x\|.$$

Вертаючись до доведеного:

$$\begin{aligned} \|\Delta y + f'_y(x_0, y_0)^{-1} \cdot f'_x(x_0, y_0) \Delta x\| &= \|f'_y(x_0, y_0)^{-1} \cdot f'_x(x_0, y_0) \Delta y + f'_a(x_0, y_0) \Delta x\| \leq \\ &\leq \varepsilon_1 (\|\Delta x\| + \|\Delta y\|) \leq \varepsilon_1 (1 + C) \cdot \|\Delta x\| \end{aligned}$$

Тобто вираз під знаком норми є $o(\Delta x)$ і тому диференційовність функції доведена.

Проводячи аналогічні міркування для будь-якої точки в досить малом околі, одержуємо диференційовність у будь-якій точці.

Також одержали: $y'(x) = -f'_y(x, y(x))^{-1} \cdot f'_x(x, y(x)) \in C(U_\delta(x_0)).$

Теорема доведена.

Зауваження. Якщо в попередній теоремі зажадати заміну умов 1), 2), 4) і 3') на $f(x, y) \in C^k(U(x_0, y_0))$, те одержимо: $y(x) = C^k(U_\delta(x_0)).$

Наслідок. З обліком наведеного вище зауваження із цієї теореми випливає «Теорема про диференційовність неявної функції».

Приклад:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + z^2 = 1 \\ x^2 + y^2 - 2y + z^2 = 1 \end{cases}$$

Маємо дві сфери, які в перетинанні дають окружність.

Розглянемо в околі точки (1, 1, 1).

$$\begin{aligned} \exists! \quad & y = y(x) \\ & z = z(x) \end{aligned} \in C^1(1).$$

Знайти: $y'(x), z'(x).$

Розв'язок:

$$f_1 = x^2 + y^2 - 2x + z^2 - 1 = 0$$

$$f_2 = x^2 + y^2 - 2y + z^2 - 1 = 0$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1(1,1,1)}{\partial y} & \frac{\partial f_1(1,1,1)}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2(1,1,1)}{\partial y} & \frac{\partial f_2(1,1,1)}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2y & 2z \\ 2y-2 & 2z \end{vmatrix} \stackrel{(1,1,1)}{=} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

Уважаючи y, z диференційовними одержуємо:

$$\begin{cases} 2x + 2yy' - 2 + 2zz' = 0 \\ 2x + 2yy' - 2y' + 2zz' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + y' - 1 + z' = 0 \\ 2 + y' - y' + z' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y' = 1 \\ z' = 1 \end{cases}.$$

Лекція № 13

Зворотні відображення

Означення.

Відображення $f: D \subset X \rightarrow D_1 \subset X_1$ є **гомеоморфізм** D на D_1 (де X - метричний простір), якщо виконуються наступні умови:

- 1) f - бієкція;
- 2) $f \in C(D) \wedge f^{-1} \in C(D_1)$.

Властивості гомеоморфізмів:

1. D - відкрите $\Leftrightarrow D_1 = f(D)$ - відкрите, тому що $f = (f^{-1})^{-1}$.
2. D - замкнене $\Leftrightarrow D_1 = f(D)$ - замкнене, тому що образ компакта – компакт.
3. D - компакт $\Leftrightarrow D_1$ - компакт.
4. D - зв'язне $\Leftrightarrow D_1$ - зв'язне, випливає із властивостей 1, 2 і визначення связности.
5. Із властивостей 1 і 4 випливає, що область (відкрита зв'язна множина) переходить в область.

Зауваження. З обмеженості D не випливає обмеженість D_1 .

Контрприклад: $y = \ln x$ на $(0, 1) \rightarrow (-\infty, 0)$.

Якщо обое множини відкриті, те, отже, межа перейде в межу.

Означення.

Відображення $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow D_1 \subset \mathbb{R}^n$ називається **дифеоморфізмом**, якщо виконуються наступні умови:

- 1) f - бієкція;
- 2) $f \in C^1(D) \wedge f^{-1} \in C^1(D_1)$.

Зауваження. Якщо у визначенні **дифеоморфізма** умова 2) замінити на умову:

2') $f \in C^k(D) \wedge f^{-1} \in C^k(D_1)$, те f - **дифеоморфізм** із класу C^k .

Будемо вважати, що D й D_1 - відкриті множини.

Вправа: Привести приклад бієкції f такий, що f - неперервна й диференційовна в D , але f^{-1} - недиференційовна.

Теорема про зворотнє відображенні (або Теорема про дифеоморфізм)

Нехай $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (де D - відкрита множина) і виконані умови:

1. $x_0 \in D, y_0 = f(x_0)$
2. $f \in C^1(U(x_0))$

$$3^\circ. \det f'(x_0) \neq 0, \text{ тоді } \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n(x_0)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n(x_0)}{\partial x_n} \end{vmatrix} \neq 0$$

Тоді $\exists \varepsilon > 0 \quad \exists f^{-1}(y) \quad y \in U_\varepsilon(y_0)$,

причому $f^{-1} \in C^1(U_\varepsilon(y_0)) \wedge (f^{-1})' = (f'(x_0))^{-1}$.

Виходить, f - дифеоморфізм

$U_\delta(x_0)$ на $V = f(U_\delta(x_0))$.

Доведення: Розглянемо $F(x, y) = y - f(x) = 0$.

Перевіримо виконання умов теореми про неявне відображення:

$$1. F(x_0, y_0) = 0$$

$$2. F \in C^1(U(x_0, y_0))$$

$$3. \exists F'_x = -f'_x \in C^1(U(x_0))$$

$$4. \exists (F'_x(x_0, y_0))^{-1} = (-f'_x(x_0))^{-1}, \text{ тому що } \det \neq 0.$$

Тоді $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \forall g \in U_\varepsilon(y_0) \quad \exists x(y) \in U_\delta(x_0)$

$$x = f^{-1}(y) \in C^1(U_\varepsilon(y_0))$$

$$(f^{-1}(y))' = -F'_x(x, y)^{-1} \cdot F'_y(x, y) = (f'(x))^{-1} E = (f'(x))^{-1}$$

Теорема доведена.

Зауваження. Теорема носить локальний характер.

З того, що $\det f^{-1}(x) \neq 0 \quad \forall x \in D \not\Rightarrow f: D \rightarrow D_1$ - дифеоморфізм, тому що відображення f взагалі може не бути бієкцією.

Наслідок. Якщо $f \in C^k(U(x_0))$, то $f^{-1} \in C^k(U(y_0))$

Полярні й сферичні координати

$$1. x = r \cos \varphi \quad \varphi \in (\alpha; \beta)$$

$$y = r \sin \varphi \quad r \geq 0$$

При яких **полярних координатах** φ і r це відображення буде дифеоморфізмом?

Знайдемо якобіан:

$$J = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\varphi \\ y'_r & y'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r \neq 0 \quad \text{при } r \neq 0.$$

Для бієкції необхідно, щоб $\beta - \alpha < 2\pi \quad \varphi \in (\alpha; \beta) = (0; 2\pi)$

Тоді одержуємо площину без осі OX .

При таких відображенні $(0; 2\pi) \times (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}_x^+$

Бієкція відповідає (r, φ) з геометричного змісту (x, y) .

Якщо побрати $\varphi \in [0; 2\pi)$, то $[0; 2\pi) \times [0; +\infty) \leftrightarrow \mathbb{R}^2$.

Поберемо $0 < \beta - \alpha < 2\pi; \quad a < r < b$, тоді прямокутник перейде в сектор:

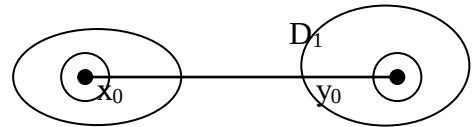


Рис. 1

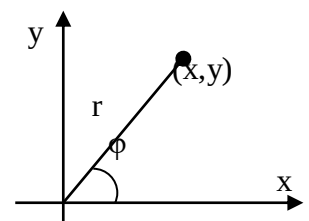
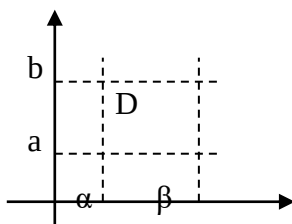
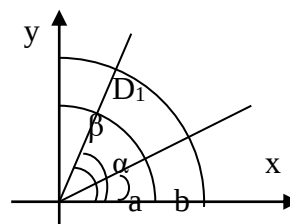


Рис. 2



f - дифеоморфізм
 $\det J \neq 0$
 буде переходити в:

Рис. 3



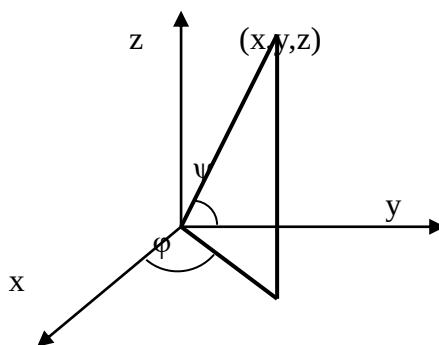
2. Розглянемо тепер **сферичні координати** з погляду поняття дифеоморфізму.

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \cos \psi \\ y = r \sin \varphi \cos \psi \\ z = r \sin \psi \end{cases}$$

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$$

$$r \geq 0$$



Знайдемо якобіан:

$$J = \begin{vmatrix} \cos \varphi \cos \psi & -r \sin \varphi \cos \psi & -r \cos \varphi \sin \psi \\ \sin \varphi \cos \psi & r \cos \varphi \cos \psi & -r \sin \varphi \sin \psi \\ \sin \psi & 0 & r \cos \psi \end{vmatrix} =$$

$$= \sin \psi \underbrace{(r^2 \sin^2 \varphi \cos \psi \sin \psi + r^2 \cos^2 \varphi \cos \psi \sin \psi)}_{= r^2 \cos \psi \sin \psi} + r^2 \cos \varphi \underbrace{(\cos^2 \varphi \cos^2 \psi + \sin^2 \varphi + \cos^2 \psi)}_{= \cos^2 \psi} =$$

$$= r^2 \cos \psi \geq 0$$

$J = 0$: або при $r = 0$ (початок координат),

або при $\psi = \pm \frac{\pi}{2}$ (північний і південний полюси сфери).

Лекція № 14

Залежні функції. Теорема про ранг.

Означення.

$\{f_k(x)\}_{k=1}^m$ - множина функцій $f_k \in C^1(D)$ $D \subset \mathbb{R}^n$.

$f_m(x)$ - залежить від інших функцій, якщо $\exists \Phi(y_1, \dots, y_{m-1}) \in C^1(G)$ $G \subset \mathbb{R}^{m-1}$.

$f_m(x) = \Phi(f_1, \dots, f_{m-1}) \quad \forall x \in D$.

$\{f_k(x)\}_{k=1}^m$ - залежні функції, якщо $\exists f_j$, яка залежить від інших функцій.

Отже, $\exists F \neq 0$: $F(f_1(x), \dots, f_m(x)) \equiv 0$.

Означення.

Якщо функції не є залежними, то вони називаються **незалежними**, тобто функції називаються незалежними, якщо виконується умова:

$$F(f_1(x), \dots, f_m(x)) \equiv 0 \Rightarrow F \equiv 0 \quad (F \in C^1(G) \quad G \subset \mathbb{R}^n).$$

Приклад

$$\begin{cases} f_1 = x_1 + \dots + x_n \\ f_2 = x_1^2 + \dots + x_n^2 \\ f_3 = \sum_{i \neq j} x_i x_j \end{cases}$$

$f_1^2 = f_2 + 2f_3 \Rightarrow$ ці функції залежні.

$\{f_1, f_2\}$ - незалежні при $n \geq 2$.

Теорема (Достатня умова незалежності)

Нехай маємо набір функцій: $\{f_k(x)\}_{k=1}^m \subset C^1(D)$.

Якщо $\text{grad } f_k$ - лінійно незалежні $\forall x \in D$, то $\{f_k(x)\}$ - незалежні.

Доведення:

Припустимо, що це не так, тобто $\{f_k(x)\}_{k=1}^m$ - залежні $\Rightarrow \exists F(f_1, \dots, f_m) = 0$.

Диференціюємо (беремо j похідну) і одержуємо:

$$\forall j=1, n \quad \sum_{i=1}^m \frac{\partial F}{\partial y_i} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = 0 \quad (\text{похідні лінійно залежні}).$$

Отже: $\sum_{i=1}^m \frac{\partial F}{\partial y_i} \text{grad } f_i = 0$, тобто $\{\text{grad } f_i\}$ - лінійно залежні.

Одержали протиріччя.

Теорема доведена.

Зауваження. Ця умова не є необхідною.

Приклад

$$\begin{cases} f_1 = x_1 + \dots + x_n \\ f_2 = x_1^2 + \dots + x_n^2 \end{cases} \quad n \geq 2$$

Розглянемо градієнти: $\text{grad } f_1 = (1, 1, \dots, 1)$

$$\text{grad } f_2 = (2x_1, \dots, 2x_n) \quad x_1 = x_2 = \dots = x_n$$

На цій прямій $\text{grad } f_i$ - лінійно залежні.

Аналог: лінійна незалежність із алгебри $y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j, \quad i=1, m$

Матриця: $A = (a_{ij}), \quad \text{rang } A = r \Leftrightarrow \exists \{f_i\}_{i=1}^r$ - лінійно незалежні, інші функції лінійно залежать від них.

Теорема про ранг

$$f_k(x) \in C^1(D), \quad k=1, m$$

$$\text{rang} \left(\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} \right)_{i=1, m}^{j=1, n} = r \quad \forall x \in U(x_0)$$

Тоді $\exists \{f_{k_l}\} \quad l=1, r$ - незалежні в околиці $U_\delta(x_0)$.

А інші функції $\forall f_i(x), \quad i \neq k_l$ - залежні від $\{f_{k_l}\}_{l=1}^r$ в околиці $U_\delta(x_0)$.

Доведення:

Розглянемо матрицю:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_r} & \dots & \frac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_r(x_0)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_r(x_0)}{\partial x_r} & \dots & \frac{\partial f_r(x_0)}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m(x_0)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m(x_0)}{\partial x_r} & \dots & \frac{\partial f_m(x_0)}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

$$M_r(x_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_r} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_r(x_0)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_r(x_0)}{\partial x_r} \end{vmatrix} \quad \text{- головний мінор.}$$

Якщо $M_r(x_0) \neq 0 \Rightarrow M_r(x) \neq 0 \quad \forall x \in U_\delta(x_0)$.

Незалежність функцій $\{f_k(x)\}_{k=1}^r$ в околі $U_\delta(x_0)$ випливає з Достатньої умови.

Розглянемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \dots, x_r, \dots, x_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_r = f_r(x_1, \dots, x_r, \dots, x_n) \end{cases} \quad (*)$$

По теоремі про неявне відображення (у деяком околі $U_0(x_0)$):

$$\exists \begin{cases} x_1 = \varphi_1(y_1, \dots, y_r, x_{r+1}, \dots, x_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ x_r = \varphi_r(y_1, \dots, y_r, x_{r+1}, \dots, x_n) \end{cases} \in C^1(U_0) \quad \text{неперервно диференційовні в } U_0, \text{ при цьому } U_0$$

може бути підмножиною $U_0(x_0)$.

Поберемо натуральне число $l > r$ й запишемо для нього рівняння системи (*):

$$\begin{aligned} y_l &= f_l(x_1, \dots, x_r, \dots, x_n) = \\ &= f_l(\varphi_1(y_1, \dots, y_r, x_{r+1}, \dots, x_n), \dots, \varphi_r(y_1, \dots, y_r, x_{r+1}, \dots, x_n)) = \\ &= \Phi_l(y_1, \dots, y_r, x_{r+1}, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Покажемо, що Φ_l не залежить від $(x_{r+1}, \dots, x_n)$.

$$\text{Нехай } j > r, \text{ тоді можемо записати: } \frac{\partial \Phi_l}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^r \frac{\partial f_l}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial f_l}{\partial x_j}.$$

Продиференціюємо систему (*).

$$\text{Розглянемо} \quad s \leq r \quad \frac{\partial \Phi_s}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_s}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial f_s}{\partial x_j}.$$

Складемо систему:

$$\left. \begin{array}{l} j > r \\ s \leq r \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \frac{\partial \Phi_l}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_l}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial f_l}{\partial x_j} \\ \frac{\partial \Phi_s}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_s}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial f_s}{\partial x_j} \end{array} \right\} \quad (**)$$

Визначник системи:

$$0 \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_r} & \frac{\partial f_1}{\partial x_j} \\ \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_r(x_0)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_r(x_0)}{\partial x_r} & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_l}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_l}{\partial x_r} & \frac{\partial f_l}{\partial x_j} \end{vmatrix}, \text{ де } \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_r} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_r(x_0)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_r(x_0)}{\partial x_r} \end{vmatrix} - \text{головний мінор.}$$

Розкриємо визначник по останньому стовпцю:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_j} \Delta_1 + \dots + \frac{\partial f_r}{\partial x_j} \Delta_r + \frac{\partial f_l}{\partial x_j} M_r = 0 \quad (M_r \neq 0)$$

Перетворимо систему (**):

$$\left. \begin{array}{l} j > r \\ j > r \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \frac{\partial \Phi_l}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^r \frac{\partial f_l}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial f_l}{\partial x_j} \cdot M_r \\ \frac{\partial \Phi_s}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^r \frac{\partial f_s}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial f_s}{\partial x_j} \cdot \Delta_s \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\partial \Phi_l}{\partial x_j} \cdot M_r = \sum_{i=1}^r 0 \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} + 0 = 0$$

Тому що $M_r \neq 0$, те $\frac{\partial \Phi_l}{\partial x_j} = 0 \quad \forall l > r, \quad \forall j > r$.

Отже: $y_l = \Phi_l(y_1, \dots, y_r)$, тобто $f_l(x) = \Phi_l(f_1(x), \dots, f_r(x))$.

Теорема доведена.

Лекція № 15

Умовний екстремум

Нехай дана скалярна функція (а не відображення): $y = f(x)$; $f(x) \in C^1(D)$, $D \subset \mathbb{R}^n$.

І нехай маємо m рівнянь (m зв'язків), що задають поверхню S розмірності $n-m$:

$$S: \begin{cases} g_1(x) = 0 \\ \dots \dots g_k(x) \in C^1(D) \wedge \text{rang } g'(x) = m \quad (m < n). \\ g_m(x) = 0 \end{cases}$$

Означення. У точці $x_0 \in S$ функція $f(x)$ має:

- умовний максимум (max), якщо $\forall x \in U_\delta(x_0) \cap S \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$;
- умовний мінімум (min), якщо $\forall x \in U_\delta(x_0) \cap S \Rightarrow f(x) \geq f(x_0)$.

Приклад

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

$$S: x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - x$$

Підставимо отримане у вихідне рівняння:

$$f(x, y) = x^2 + (1 - x)^2$$

$$\frac{d}{dx}(x^2 + (1 - x)^2) = 2x - 2(1 - x) = 4x - 2 = 0; \quad x = \frac{1}{2}$$

$$f(x, y) = x^2 + (1 - x)^2 \rightarrow \min$$

$$y = 1 - x = \frac{1}{2}.$$

Тому що ми визначили, що задана функція – це парабола з позитивним коефіцієнтом, тобто гілки параболи спрямовані нагору, те можемо констатувати, що в отриманій стаціонарній точці

$x = \frac{1}{2}$ функція має мінімум.

Виходить, задана функція $f(x, y) = x^2 + y^2$ має умовний мінімум у точці $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Теорема (Необхідна умова умовного екстремума)

Якщо в точці x_0 функція $f(x)$ має умовний екстремум і $\text{grad } f(x_0) \neq 0$, те $TS_{x_0} \subset TN_{x_0}$, де

TN_{x_0} - дотична гіперплощина до гіперповерхні $f(x) = f(x_0)$;

TS_{x_0} - дотичний простір поверхні S .

Доказ

Беремо будь-яку криву K , що лежить на поверхні S .

$K: x = x(t) \quad t \in I \quad x(t_0) = x_0 \quad K \subset S$, тобто $g(x(t)) \equiv 0$.

$\sim 837 \quad g(x(t)) \equiv 0$ по t :

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \cdot \frac{dx_i}{dt} = 0 \Rightarrow \tau \in TS_{x_0},$$

т.е. дотичний вектор τ належить дотичному простору TS_{x_0} .

Розглянемо функцію $y = f(x(t)) \Rightarrow$ (по малій теоремі Ферма) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} f(x(t)) \Big|_{t=t_0} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i} \cdot \frac{dx_i(t_0)}{dt} = 0 \Rightarrow \tau \in TN_{x_0}, \text{ тобто } TS_{x_0} \subset TN_{x_0}.$$

Одержали необхідну умову в геометричному виді, що й було потрібно довести.

Перетворимо до алгебраїчного виду:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \cdot \frac{dx_i}{dt} = 0 \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i} \cdot \frac{dx_i(t_0)}{dt} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \cdot \xi_i = 0; & j = 1, m \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i} \cdot \xi_i = 0 \end{cases}$$

Тому що система має ненульовий розв'язок, те:

$$\text{grad } f(x_0) = \sum_{j=1}^m \lambda_j \text{grad } g_j(x_0) \quad (1)$$

Означення.

Введемо поняття **функції Лагранжа**:

$$L(x) = f(x) - \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x), \text{ де } \lambda_j - \text{коефіцієнти Лагранжа.}$$

Теорема (Необхідна умова умовного екстремума в аналітичному виді)

Якщо в точці x_0 - умовний екстремум і $\text{grad } f(x_0) \neq 0$, то:

$$\exists \lambda_j : |\lambda_j| \neq 0 : \frac{\partial L(x_0)}{\partial x_i} = 0; \quad i = 1, n$$

т.е. маємо $n + m$ рівнянь щодо $n + m$ невідомих.

Доказ

$$\text{Із системи (1) випливає: } \frac{\partial L(x)}{\partial x_i} = 0, \text{ де } L(x, \lambda) = \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x); \quad \frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial \lambda_j} = g_j(x) = 0.$$

Що й було потрібно довести.

Приклад 1

$$\begin{cases} f(x, y) = x^2 + y^2; \\ x + y = 1 \end{cases}; \quad \text{стаціонарна точка } \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right)$$

Поверхня $S: x + y = 1$

$$TS_{\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)} = \{(\xi_1 + \xi_2 = 1)\} -$$

дотичний простір.

$$TN_{\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)} = TS_{\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)}$$

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} -$$

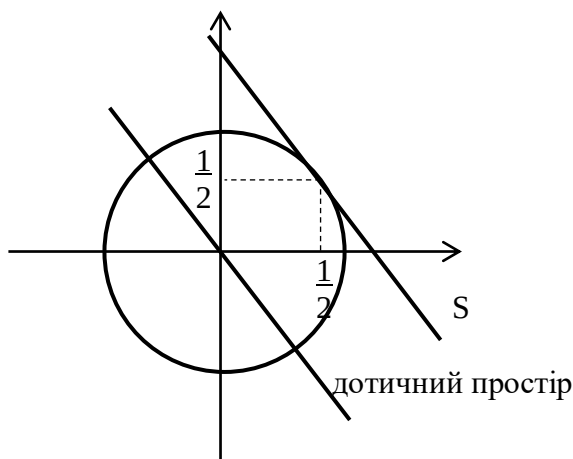
лінія рівня N .

Застосуємо функцію Лагранжа:

$$L = x^2 + y^2 - \lambda(x + y - 1)$$

Стаціонарні точки:

$$\left. \begin{aligned} L'_x &= 2x - \lambda = 0 \\ L'_y &= 2y - \lambda = 0 \\ x + y &= 1 \end{aligned} \right\} \quad x = y = \frac{1}{2}.$$

**Приклад 2: Задача про найкоротшу відстань від точки до поверхні.**

$$S: g(x, y, z) = 0$$

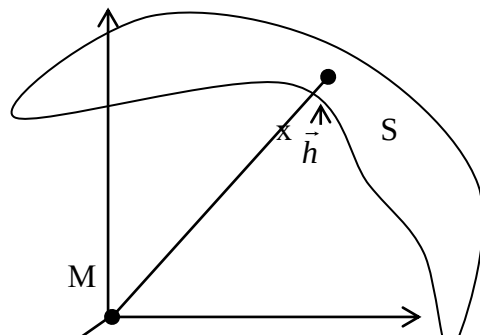
$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow \min$$

Знайдемо $\min$ функції $f(x, y, z)$ на поверхні S (уважаємо, що початок координат перебуває у фіксованій точці).

Складемо функцію Лагранжа:

$$L(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda g(x, y, z)$$

Диференціюємо:



- 2) Вирішуємо задачу на умовний екстремум.

$$L = x^2 + y^2 - 2y + z^2 + 4z - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 9)$$

Диференціюємо:

$$\begin{cases} L'_x = 2x - 2\lambda x = 0 \\ L'_y = 2y - 2 - \lambda y = 0 \\ L'_z = 2z + 4 - 2\lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(1-\lambda) = 0 \\ y = \frac{1}{1-\lambda} \\ z = \frac{-2}{1-\lambda} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0, & x_2 = 0 \\ y_1 = \frac{3}{\sqrt{5}}, & y_2 = \frac{-3}{\sqrt{5}} \\ z_1 = \frac{-6}{\sqrt{5}}, & z_2 = \frac{6}{\sqrt{5}} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{1-\lambda} = \pm \frac{3}{\sqrt{5}}$$

3) Визначаємо значення f в підозрілих точках:

$$f(0; 1; -2) = -5 \quad -\min$$

$$f\left(0; \frac{3}{\sqrt{5}}; -\frac{6}{\sqrt{5}}\right) = 9 - \frac{6}{\sqrt{5}} - \frac{24}{\sqrt{5}} = 9 - 6\sqrt{5}$$

$$\text{Отже:} \quad \begin{aligned} \min &: -5 \\ \max &: 9 + 6\sqrt{5} \end{aligned}$$

$$f\left(0; -\frac{3}{\sqrt{5}}; \frac{6}{\sqrt{5}}\right) = 9 + 6\sqrt{5} \quad -\max$$

Геометричний зміст цієї задачі полягає в знаходженні найближчої й самої далекої точок даної кулі від точки з координатами $(0; 1; -2)$.

Розглянемо **більш загальний випадок знаходження** $\max$ й $\min$ на компактi.

Будемо вважати, що:

$$\begin{aligned} f(x) &\in C^1(D), \quad D \subset \mathbb{R}^n \\ K &: \begin{cases} g_1(x) \leq 0 \\ \dots \dots \\ g_m(x) \geq 0 \end{cases} \quad g_i \in C^1(D), \quad i = 1, m \end{aligned}$$

Нехай $m = 2$, тоді:

$$K: \begin{cases} g_1(x) \leq 0 \\ g_2(x) \geq 0 \end{cases} \quad g_1, g_2 \in C^1(D)$$

Складемо алгоритм:

- 1) **Визначаємо стаціонарні точки** $f(x)$ й перевіряємо їхню приналежність компактi K .
- 2) За допомогою функції Лагранжа $L_1 = f(x) - \lambda g_1(x)$ **знаходимо умовний екстремум** на межі ∂G_1 й перевіряємо виконання умови $g_2(x'_i) \geq 0$ для відповідних стаціонарних точок. Потім за допомогою функції $L_2 = f(x) - \lambda g_2(x)$ знаходимо умовний екстремум на межі ∂G_2 й перевіряємо виконання умови $g_1(x''_j) \leq 0$ для відповідних стаціонарних точок.
- 3) Знаходимо умовний екстремум на перетинанні меж $\partial G_1 \cap \partial G_2$ за допомогою функції $L_3 = f(x) - \lambda_1 g_1(x) - \lambda_2 g_2(x)$.
- 4) Вибираємо $\max$ й $\min$ значення заданої функції $f(x)$

Приклад 2 $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2y + z^2 + 4z$

$$K: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leq 9 \\ x + y + z \geq 0 \end{cases}$$

- 1) Стаціонарна точка $(0; 1; -2) \notin K$, тому що не виконується друга умова.
- 2) Вирішуємо задачу на умовний екстремум:

$$L_1 = x^2 + y^2 - 2y + z^2 + 4z - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 9).$$

За аналогією із Прикладом 1 після диференціювання одержуємо стаціонарні точки:

$$\left(0; -\frac{3}{\sqrt{5}}; \frac{6}{\sqrt{5}}\right) \in K; \quad \left(0; \frac{3}{\sqrt{5}}; -\frac{6}{\sqrt{5}}\right) \notin K.$$

$$L_2 = x^2 + y^2 - 2y + z^2 + 4z - \lambda(x + y + z) \Rightarrow \left(\frac{1}{3}; \frac{4}{3}; -\frac{5}{3}\right) \in K.$$

- 3) Знаходимо умовний екстремум на окружності $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$

$$L = f(x, y, z) - \lambda_1(x^2 + y^2 + z^2 - 9) - \lambda_2(x + y + z)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 2x - 2\lambda_1 x - \lambda_2 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 2y - 2 - 2\lambda_1 y - \lambda_2 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} &= 2(z + 2) - 2\lambda_1 z - \lambda_2 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{1 - \lambda_1} \\ y_1 = \frac{2}{1 - \lambda_1} \\ z_1 = \frac{-3}{1 - \lambda_2} \end{cases}$$

$$x_1 = -\frac{3}{\sqrt{14}}; \quad y_1 = -\frac{6}{\sqrt{14}}; \quad z_1 = \frac{9}{\sqrt{14}}$$

$$x_2 = \frac{3}{\sqrt{14}}; \quad y_2 = \frac{6}{\sqrt{14}}; \quad z_2 = -\frac{9}{\sqrt{14}}$$

- 4) Порівнюючи значення функції в цих точках вибираємо max та min :

$$\max_K f(x, y, z) = f\left(-\frac{3}{\sqrt{14}}; -\frac{6}{\sqrt{14}}; \frac{9}{\sqrt{14}}\right) = 9 + 2\sqrt{42}$$

$$\min_K f(x, y, z) = f\left(\frac{1}{3}; \frac{4}{3}; -\frac{5}{3}\right) = \frac{1}{9} + \frac{16}{9} - \frac{8}{3} + \frac{25}{9} - \frac{20}{3} = -\frac{14}{3}$$