Лекція №1
Первісна і невизначений інтеграл

Зворотна операція до диференціювання називається **інтегруванням**.

Def I **Первісної** функції $f(x)$ на інтервалі (a,b) називається функція $F(x)$ така, що $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a,b)$.

Зауваження. Інтервал (a,b) може бути нескінченним.

Приклади 1) $\cos x \to \sin x$

2) $1 \to x$

3) $0 \to C$

Первісна визначається неоднозначно.

Теорема

Якщо $F_1(x)$ і $F_2(x)$ - первісні функції $f(x)$ на інтервалі (a,b), то $F_1(x) - F_2(x) = C$.

Доведення.

$\Phi(x) = F_1(x) - F_2(x) \quad \Rightarrow \quad \Phi'(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b) \quad \Rightarrow \quad \Phi(x) \equiv const$, что є наслідком теореми Лагранжа.

Теорема доведена.

Def II

Множина усіх первісних функції $f(x)$ на інтервалі (a,b) називається **невизначеним інтегралом** і позначається $\int f(x)dx = F(x) + C \quad \forall C$.

Приклад: $\int \cos dx = \sin x + C$.

Основні властивості невизначених інтегралів:

1° $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$ чи $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$ (з визначення).

2° $\int F'(x)dx = F(x) + C$.

3° $\int \left(f(x) + g(x)\right)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$ - лінійність невизначених інтегралів.

4° $\int k \cdot f(x)\,dx = k\int f(x)dx$ - лінійність невизначених інтегралів.

Таблиця невизначених інтегралів:

1. $\int 0\,dx = C$
2. $\int 1\,dx = x + C$
3. $\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C; \quad \alpha \neq -1, \quad x > 0$
4. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C; \quad x \neq 0$
5. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C; \qquad \int e^x dx = e^x + C$
6. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$
7. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tg\, x + C; \qquad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctg\, x + C; \qquad x \neq k\pi$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C); \qquad x \in (-1;1)$

11. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arc\,tg\, x + C = -arc\,ctg\, x + C$

12. $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1-x} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x} = \frac{1}{2}\ln|1+x| - \frac{1}{2}\ln|1-x| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + C$ (перевірка - безпосереднім диференціюванням)

14. $\int sh\, x\, dx = ch\, x + C$

15. $\int ch\, x\, dx = sh\, x + C$

16. $\int \frac{dx}{ch^2 x} = th\, x + C$

17. $\int \frac{dx}{sh^2 x} = -\,cth\, x + C$

Зауваження.
Пізніше доведемо, що у неперервної на відрізку функції завжди існує первісна (і невизначений інтеграл).
Але первісна елементарної функції може бути **неелементарної.**
Наприклад: $\int e^{-x^2} dx$; $\int \frac{\sin x}{x} dx$; $\int \cos\left(x^2\right) dx$ і т.п.

<u>Приклади обчислення</u>

1° $\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)^2 dx = \int \left(x + \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}\right) dx = \frac{x^2}{2} + 2\cdot 2x^{1/2} - x^{-1} + C$

2° $\int tg^2 x\, dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} = tg\, x - x + C$.

<u>Заміна змінної</u>

З формули $F\left(\varphi(x)\right)' = F'(\varphi)\cdot\varphi'(x)$ випливає формула заміни змінної (чи підстановки):
$\int f\left(\varphi(x)\right)\cdot\varphi'(x)\, dx = F\left(\varphi(x)\right) + C$, де $F(x)$ - первісна функції $f(x)$.

Наслідок: $\int f(ax+b)\, dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C; \qquad a \neq 0$.

<u>Приклади</u>: 1° $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d\frac{x}{a}}{\left(x/a\right)^2+1} = \frac{1}{a}\, arctg\,\frac{x}{a} + C$

2° $\int \frac{arctg\, x}{1+x^2} = arctg^2 x + C$

3° $\int tg\, x\, dx = -\int \frac{d\cos x}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C$.

Інтегрування частинами

З формули похідної добутку функцій випливає:

$$\int f(x)\cdot g'(x)\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)\,dx \ .$$

Приклади:

1º $\int x\cdot e^x dx = x\cdot e^x - \int e^x dx = x\cdot e^x - e^x + C$.

2º $\int \ln x\,dx = x\ln x - \int \frac{1}{x}\cdot x\ dx = x\ln x - x + C$.

3º $\int arctg\ x\,dx = x\cdot arctg\ x - \int \frac{x}{1+x^2}dx = x\cdot arctg\ x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C$.

Лекція № 2 Інтегрування раціональних функцій

Мова йтиме про інтегрування раціональних функцій, тобто про відношення двох багаточленів. Якщо ступінь чисельника більше ступені знаменника, то можна виділити цілу частину й далі можна вважати раціональну функцію правильної.

Скористаємося теоремою з алгебри, що затверджує, що правильний дріб можна розкласти на найпростіші дроби:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{r_i}\frac{A_{ij}}{(x-a_i)^j} + \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{s_i}\frac{B_{ij}x + C_{ij}}{\left(x^2+p_i x+q_i\right)^j}$$

Тому нам досить проінтегрувати наступні типи дробів:

I $\quad \int \frac{A}{x-a}\,dx = A\ln|x-a| + C$

II $\quad \int \frac{A}{(x-a)^n}\,dx = \frac{-A}{(n-1)\,(x-a)^{n-1}} + C; \qquad n>1$

III $\quad \int \frac{Bx+D}{x^2+px+q}\,dx = \int \frac{B\left(x+\frac{p}{2}\right)+D_1}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q_1^2}\,dx = \left|x+\frac{p}{2}=t\right| =$

$$= B\int\frac{t\,dt}{t^2+q_1^2} + D_1\int\frac{dt}{t^2+q_1^2} = \frac{B}{2}\ln\left(t^2+q_1^2\right) + \frac{D_1}{q_1}arctg\,\frac{t}{q_1} + C =$$

$$= \frac{B}{2}\ln\left(x^2+px+q\right) + \frac{D_1}{q_1}arctg\,\frac{x+p/2}{q_1} + C$$

IV $\int \frac{Bx+D}{\left(x^2+px+q\right)^s}\,dx = \left|x+\frac{p}{2}=t\right| = B\int\frac{t\,dt}{\left(t^2+q_1^2\right)^s} + D_1\int\frac{dt}{\left(t^2+q_1^2\right)^s} = \frac{B}{2}\cdot\frac{\left(t^2+q_1^2\right)^{1-s}}{1-s} + D_1\cdot I_s$,

де $I_s = \int\frac{dt}{\left(t^2+q_1^2\right)^s}$.

Одержимо рекурентну формулу для I_s за допомогою інтегрування вроздріб:

$$I_s = \int\frac{dt}{\left(t^2+q_1^2\right)^s} = \frac{t}{\left(t^2+q_1^2\right)^s} + \int\frac{s\cdot 2t^2}{\left(t^2+q_1^2\right)^{s+1}}\,dt = \frac{t}{\left(t^2+q_1^2\right)^s} + 2s\left(I_s - q_1^2\cdot I_{s+1}\right).$$

Звідси $I_{s+1} = \frac{1}{2s\,q_1^2}\left(I_s\cdot(2s-1) + \frac{t}{\left(t^2+q_1^2\right)^s}\right)$.

Висновок. Усяка раціональна функція інтегрується в елементарних функціях (раціональна, логарифмічна й $arctg$).

Приклад 1

$$\int \frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}dx = \int \frac{A_1^{\backslash x^3-1}}{x-1}dx + \int \frac{A_2^{\backslash x^2+x+1}}{(x-1)^2}dx + \int \frac{(Bx+C)^{\backslash (x-1)^2}}{x^2+x+1}dx$$

$$\left.\begin{array}{ll} x^3 & A_1 + B = 2 \\ x^2 & A_2 + C - 2B = 4 \\ x & A_2 + B - 2C = 1 \\ 1 & A_1 + A_2 + C = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad A_1 = 2; \quad A_2 = 3; \quad B = 0; \quad C = 1.$$

A_2 і $З$ можна знайти простіше:

$$A_2 = \left.\frac{2x^3+4x^2+x+2}{x^2+x+1}\right|_{x=1} = \frac{9}{3} = 3;$$

$$C: \quad при \quad x = 0 \quad 2 = -A_1 + A_2 + C.$$

<u>Метод Остроградського</u> (виділення раціональної частини)

$$\int \underbrace{\frac{P_1(x)}{(x-a_1)^{r_1}\ldots(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}}}_{правильная \quad дробь} dx =$$

$$= \frac{P_2(x)}{(x-a_1)^{r_1-1}\ldots(x^2+p_1x+q_1)^{s_1-1}} + \int \frac{A_1}{x-a_1}dx + \ldots + \int \frac{B_1x+C_1}{x^2+p_1x+q_1}dx$$

Приклад 2 $\int \frac{x(x-2)}{(x-1)^2(x^2+1)^2}dx = \frac{Ax^2+Bx+C}{(x-1)(x^2+1)} + \int \frac{K}{x-1}dx + \int \frac{Dx+F}{x^2+1}dx.$

$$\frac{x(x-2)}{(x-1)^2(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{(2Ax+B)(x-1)(x^2+1) + (Ax^2+Bx+1)(x^2+1-2x^2+2x)}{(x-1)^2(x^2+1)^2} +$$

$$+ \frac{K^{\backslash (x-1)(x^2+1)^2}}{x-1} + \frac{\left(Dx+F\right)^{\backslash (x+1)(x-1)^2}}{x^2+1}$$

Інші способи:

$$\int \frac{dx}{x^4(x^3+1)^2} = \int \frac{x^2dx}{x^4(x^3+1)^2} = \left|x^3 = t\right| = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t^2(t+1)^2} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{C}{t+1} + \frac{D}{\left(t+1\right)^2}.$$

B і D знаходимо безпосередньо: $B = 1/3; \quad D = 1/3$.

$$A = \left.\frac{d}{dt}\left(\frac{t^2p}{Q}\right)\right|_{t=0} = \left.\frac{d}{dt}(t+1)^{-2}\right|_0 = -\frac{2}{3}$$

$$C=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t^2}\right)\Bigg|_{t=-1}=\frac{2}{3}$$

У результаті одержимо: $\int\frac{dx}{x^4(x^3+1)^2}=\frac{1}{3}(-2\ln|t|+2\ln|t+1|-t^{-1}-(t+1)^{-1})$.

Лекція № 3
Інтеграл Рімана

Нехай $\prod$ - розбиття відрізка $[a,b]$: $a=x_0<x_1<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$.

Діаметром розбиття називається число $d\left(\prod\right)=\max\limits_{1\le i\le n}\Delta x_i$.

Нехай $\xi_i\in\left[x_{i-1},x_i\right]$ $i=\overline{1,n}$.

Тоді говорять, що задано розбиття з відзначеними точками - $\prod_\xi$.

Def Нехай функція $f(x)$ задана на відрізку $[a,b]$.
Тоді **інтегральною сумою Рімана** називається вираження:

$$\sigma_f\left(\prod_\xi\right)=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)(x_i-x_{i-1}) .$$

Якщо $\exists\lim\limits_{d(\prod)\to 0}\sigma_f\left(\prod_\xi\right)=I$, тобто $\forall\,\varepsilon>0\quad\exists\delta_\varepsilon>0\quad\forall\prod_\xi:\ d\left(\prod\right)<\delta\ \Rightarrow\ \left|\sigma_f\left(\prod_\xi\right)-I\right|<\varepsilon$,
то I називається **інтегралом Рімана** або **визначеним інтегралом**.

Якщо функція $f(x)$ интегрируема на відрізку $[a,b]$, то це позначається так: $f(x)\in R[a,b]$.

Приклад $\int\limits_a^b C\,dx=C(b-a)$, тому що $\sigma_f\left(\prod_\xi\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}C\cdot\Delta x_i=C(b-a)$.

Теорема (необхідна умова інтегровності)
Якщо $\exists\int\limits_a^b f(x)\,dx$, то функція $f(x)$ обмежена.

Доведення:
Припустимо противне.
Але тоді для будь-яких $\prod$ існує відрізок $\left[x_{k-1};x_k\right]$, на якому функція $f(x)$ не обмежена.
Виходить, можна вибрати таку точку $\xi_k\in\left[x_{k-1};x_k\right]$, щоб $\left|f(\xi_k)\right|>C$, а значить і $\left|\sigma_f\left(\prod_\xi\right)\right|>C_1$,
що суперечить існуванню границі $\sigma_f\left(\prod_\xi\right)$.

Зауваження. Умова обмеженості функції не є достатньої.
Це показує приклад функції Діріхле: вона не є інтегрованої, тому що:
якщо $\forall\,\xi_k\in Q$, то $\sigma_f\left(\prod_\xi\right)=\sum 1\cdot\Delta x_i=b-a$;
а якщо $\forall\,\xi_k\notin Q$, то $\sigma_f\left(\prod_\xi\right)=0$.

Суми Дарбу

Def Нехай функція $f(x)$ обмежена на відрізку $[a,b]$ і $\prod$ - розбиття цього відрізка.
Тоді **верхньою сумою Дарбу** називається вираження:

$$S_f(\Pi)=\sum_{i=1}^{n} M_i\,\Delta x_i\ ,\quad \text{де}\quad M_i=\sup_{x\in[x_{i-1};\,x_i]} f(x)\,;$$

а **нижньою сумою Дарбу** називається вираження:

$$s_f(\Pi)=\sum_{i=1}^{n} m_i\,\Delta\,x_i\ ,\quad \text{де}\quad m_i=\inf_{[x_{i-1};\,x_i]} f(x)\,.$$

Властивості сум Дарбу:

1) $\forall\,\Pi_\xi \qquad s_f(\Pi)\le\sigma_f(\Pi_\xi)\le S_f(\Pi)$ (очевидно);
2) $\forall\,\varepsilon>0,\ \ \forall\Pi\ \ \exists\{\xi_k\},\{\xi'_k\}\ :\ \ \sigma_f(\Pi_\xi)<s_f(\Pi)+\varepsilon\ \ \wedge\ \ \sigma_f(\Pi_{\xi'})>S_f(\Pi)-\varepsilon\,.$
   Це випливає з визначення $\sup$ і $\inf$.
3) Якщо Π' - здрібнювання Π, тобто $\{x'_k\}\supset\{x_i\}$, то $s_f(\Pi)\le s_f(\Pi')\le S_f(\Pi')\le S_f(\Pi)$.
   Доведемо це.
   Досить розглянути випадок, коли додається одна точка $x'_k\in(x_{k-1};\,x_k)$.
   Позначимо $M'_k=\sup\limits_{[x_{k-1};\,x'_k]} f(x)$ і $M''_k=\sup\limits_{[x'_k;\,x_k]} f(x)$.
   Тоді $M'_k(x'_k-x_{k-1})+M''_k(x_k-x'_k)\le M_k\cdot(x_k-x_{k-1})$, відкіля і випливає потрібна нерівність для **верхньої** суми Дарбу.
   Аналогічно доводиться нерівність для **нижньої** суми Дарбу.

4) $\forall\,\Pi_1$ і $\Pi_2\quad\Rightarrow\quad s_f(\Pi_1)\le S_f(\Pi_2)$.
   <u>Доведення:</u>
   Позначимо $\Pi'=\Pi_1\cup\Pi_2$ - це продовження обох розбивок.
   Тоді $s_f(\Pi_1)\le s_f(\Pi')\le S_f(\Pi')\le S_f(\Pi_2)$, що і було потрібно довести.

<u>**Def**</u> Назвемо **нижнім інтегралом Дарбу** вираження $I_*=\sup\limits_{\Pi} s_f(\Pi)$,

а **верхнім інтегралом Дарбу** вираження $I^*=\inf\limits_{\Pi} S_f(\Pi)$.

Очевидно, що $I_*\le I^*$.

<u>**Лема Дарбу**</u> $\quad I_*=\lim\limits_{d(\Pi)\to 0} s_f(\Pi)\ \ \wedge\ \ I^*=\lim\limits_{d(\Pi)\to 0} S_f(\Pi)$.

Доведемо друге твердження.
$\forall\,\varepsilon>0\ \ \exists\Pi_0\ :\ \ S_f(\Pi_0)-I^*<\varepsilon/2$.

Тоді $\forall\,\Pi\ :\ \ d(\Pi)<\delta=\dfrac{\varepsilon}{6MN}$,

де N - число відрізків у розбивці Π_0, а $M=\sup\limits_{[a;\,b]}|f(x)|$.

Справедливі наступні нерівності:

$I^*\le S_f(\Pi')\le S_f(\Pi)$, де $\Pi'=\Pi_0\cup\Pi_1$ і

$$S_f(\Pi)-S_f(\Pi')=\sum_{j\,:\,x'_j\in(x_{k-1};\,x_k)}\left(-M'_j(x'_j-x_{k-1})-M''_j(x_k-x'_j)+M_k\,\Delta x_k\right)\le 3M\delta N<\frac{\varepsilon}{2}\ .$$

Тоді $S_f(\Pi)-I^*<S_f(\Pi)-S_f(\Pi')+S_f(\Pi')-I^*<\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$, тобто $\lim\limits_{d(\Pi)\to 0} S_f(\Pi)=I^*$.

Аналогічно доводиться перше твердження.

Лекція № 4
Критерії интегровности, класи інтегровних функцій

Теорема **(критерій інтегровности Дарбу)**

$$f(x)\in R[a;b] \quad \Leftrightarrow \quad f(x)=\underline{0}(1) \quad \wedge \quad I^* = I_*$$

Доведення:

Необхідність: З визначення интегровности випливає, що

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall\Pi: d\left(\Pi\right)<\delta \quad \Rightarrow \quad \left|\sigma_f\left(\Pi_\xi\right)-I\right|<\varepsilon \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow \quad \left|S_f\left(\Pi\right)-I\right|\le\varepsilon \quad \wedge \quad \left|s_f\left(\Pi\right)-I\right|\le\varepsilon$, а значить

$\left|S_f\left(\Pi\right)-s_f\left(\Pi\right)\right|\le 2\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \left|I^*-I_*\right|\le 2\varepsilon$, тобто $I^*=I_*$.

Достатність: Тому що $s_f\left(\Pi\right)\le\sigma_f\left(\Pi_\xi\right)\le S_f\left(\Pi\right)$, то, спрямовуючи діаметр розбиття до нуля і користаючись лемою Дарбу, одержимо, що $\sigma_f\left(\Pi\right)\underset{d(\Pi)\to 0}{\to} I^*=I_*$.

Теорема доведена.

Аналогічно доводиться наступна теорема.

Теорема **(критерій Рімана)**

$$f(x)\in R[a;b] \quad \Leftrightarrow \quad f(x)=\underline{0}(1) \quad \wedge \quad \lim_{d(\Pi)\to 0}\sum_{k=1}^{n}\left(M_k-m_k\right)\Delta x_k=0 \ .$$

З цих критеріїв випливають достатні умови интегровности:

Теорема 1

Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, то вона интегрована на цьому відрізку.

Доведення

По теоремі Кантора функція $f(x)$ рівномірно неперервна на відрізку $[a;b]$, тобто

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x_1,x_2\in[a;b]: \left|x_1-x_2\right|<\delta \quad \Rightarrow \quad \left|f(x_1)-f(x_2)\right|<\varepsilon \ .$$

Якщо взяти розбиття Π з діаметром $d\left(\Pi\right)<\delta$, то, скориставшись 2-ий теоремою Вейерштрасса, одержимо:

$$S_f\left(\Pi\right)-s_f\left(\Pi\right)=\sum_k\left(M_k-m_k\right)\Delta x_k=\sum_k\left(f\left(\xi_k\right)-f\left(\eta_k\right)\right)\Delta x_k<\varepsilon\left(b-a\right) \ .$$

Виходить, за критерієм Рімана, функція $f(x)$ інтегровна.

Теорема доведена.

Теорема 2

Якщо функція монотонна й обмежена, то вона інтегровна.

Доведення:

Скористаємося критерієм Рімана:

$$S_f\left(\Pi\right)-s_f\left(\Pi\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(M_k-m_k\right)\Delta x_k=\sum_{k=1}^{n}\left|f(x_k)-f(x_{k-1})\right|\Delta x_k\le\left|f(b)-f(a)\right|d\left(\Pi\right) \ ,$$

відкіля і випливає интегровність.

Теорема доведена.

Властивості інтегралів Рімана

1) **Лінійність:**

$f(x),\, g(x)\in R[a;b] \quad\Rightarrow$

$$\Rightarrow\quad \lambda f(x)+\mu g(x)\in R[a;b] \quad\wedge\quad \int_a^b \left(\lambda f(x)+\mu g(x)\right)dx=\lambda\int_a^b f(x)dx+\mu\int_a^b g(x)dx\,.$$

Доведення: Это випливає з лінійності суми і лінійності границі.

2) $f(x),\, g(x)\in R[a;b] \quad\Rightarrow\quad f(x)\cdot g(x)\in R[a;b]$.

Доведення:

Тому що $f(x)=\left(f(x)+M\right)-M$ й аналогічно представляємо $g(x)$, то можна вважати, что обидві функції позитивні. Але для позитивних функцій имеем:

$$\sup\ :\ M_{fg}\le M_f\cdot M_g \quad \text{и.}\inf\ :\ m_{fg}\ge m_f\cdot m_g$$

Тому $M_{fg}-m_{fg}\le M_f\cdot M_g-m_f\cdot m_g\le M_f\left(M_g-m_g\right)+m_g\left(M_f-m_f\right)$.

Скористаємося тепер критерієм Рімана для добутку $f(x)\cdot g(x)$:

$S_{fg}\left(\Pi\right)-s_{fg}\left(\Pi\right)=\sum\left(M_{fg}^k-m_{fg}^k\right)\Delta x_k\le$

$\le\sum M_f^{(k)}\left(M_g^{(k)}-m_g^{(k)}\right)\Delta x_k+\sum m_g^k\left(M_f^{(k)}-m_f^{(k)}\right)\Delta x_k\le M_f\varepsilon+M_g\varepsilon$,

де $M_f=\sup\limits_{[a;b]} f(x);\quad M_g=\sup\limits_{[a;b]} g(x)$.

Теорема доведена.

3) **Аддитивность:** $f(x)\in R[a;b] \quad\Leftrightarrow\quad \forall c\in(a;b)$

$$f(x)\in R[a;c] \quad\wedge\quad f(x)\in R[c;b] \quad\wedge\quad \int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx\,.$$

Доведення:

Нехай Π_1 - розбиття відрізка $[a;c]$ і Π_2 - розбиття відрізка $[c;b]$,

а $\Pi=\Pi_1\cup\Pi_2$ - розбиття відрізка $[a;b]$.

Тоді $S_f\left(\Pi\right)=S_f\left(\Pi_1\right)+S_f\left(\Pi_2\right)$ і $s_f\left(\Pi\right)=s_f\left(\Pi_1\right)+s_f\left(\Pi_2\right)$

$\Rightarrow\quad S_f\left(\Pi\right)-s_f\left(\Pi\right)=S_f\left(\Pi_1\right)-s_f\left(\Pi_1\right)+S_f\left(\Pi_2\right)-s_f\left(\Pi_2\right) \quad\Rightarrow$

$\Rightarrow\quad S_f\left(\Pi_k\right)-s_f\left(\Pi_k\right)\le S_f\left(\Pi\right)-s_f\left(\Pi\right)<\varepsilon$ при $d\left(\Pi\right)<\delta_\varepsilon \quad (k=1,2)$, тобто

з интегровності на відрізку $[a;b]$ випливає интегровність на відрізках $[a;c]$ і $[c;b]$.

Верно і зворотне твердження, тому що для усіх Π можна міркувати в такий спосіб: якщо додати точку c і позначити отриманє розбиття через Π', то:

$S_f\left(\Pi'\right)-s_f\left(\Pi'\right)=S_f\left(\Pi_1\right)-s_f\left(\Pi_1\right)+S_f\left(\Pi_2\right)-s_f\left(\Pi_2\right)<2\varepsilon$, а

$S_f\left(\Pi\right)-S_f\left(\Pi'\right)=M_k\Delta x_k-M_k'(c-x_{k-1})-M_k''(x_k-c)<3M\delta<\varepsilon$.

Тут k - номер, при якому $c\in[x_{k-1};x_k]$, а $M=\sup\limits_{[a;b]}\left|f(x)\right|$.

Аналогічна нерівність виконується для нижніх сум Дарбу, а виходить,

$S_f\left(\Pi\right)-s_f\left(\Pi\right)<2\varepsilon+2\varepsilon=4\varepsilon$, тобто функція $f(x)$ интегрована на відрізку $[a;b]$,

а рівність інтегралів випливає з $\sigma_f\left(\Pi\right)=\sigma_f\left(\Pi_1\right)+\sigma_f\left(\Pi_2\right)$.

4) Якщо $f(x) \le g(x)$ й обидві функції интегровани, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx \le \int\limits_a^b g(x)\,dx$ (це очевидно).

Наслідок. $0 \le f(x) \in R[a;b] \;\Rightarrow\; \int\limits_a^b f(x)\,dx \ge 0$.

5) Якщо $f(x) \in C[a;b] \;\wedge\; f(x) \ge 0 \;\wedge\; \int\limits_a^b f(x)\,dx = 0 \;\Rightarrow\; f(x) \equiv 0$.

<u>Доведення</u>:

Припустимо противне, тобто $\exists U_\delta(x_0):\;\; \forall x \in U_\delta(x_0) \;\Rightarrow\; f(x) > \dfrac{f(x)}{2}$.

Звідси випливає: $\int\limits_a^b f(x)\,dx \ge \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\,dx > \dfrac{f(x_0)}{2} \cdot 2\delta > 0$, что суперечить умові.

Теорема доведена.

6) Якщо $f(x) \in R[a;b] \;\Rightarrow\; |f(x)| \in R[a;b] \;\wedge\; \int\limits_a^b |f(x)|\,dx \ge \left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right|$.

<u>Доведення</u>:

Интегрованість $|f(x)|$ випливає з нерівності $M_{|f|} - m_{|f|} \le M_f - m_f$.

А необхідна нерівність випливає з властивості 4) і нерівності:

$-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$, тому що $-\int\limits_a^b |f(x)|\,dx \le \int\limits_a^b f(x)\,dx \le \int\limits_a^b |f(x)|\,dx$,

а, отже, $\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \le \int\limits_a^b |f(x)|\,dx$.

Теорема доведена.

<u>**Теорема про середнє значення інтеграла**</u>

Якщо $f(x) \in R[a;b]$, то $m(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$, де $m = \inf\limits_{[a;b]} f(x)$; $M = \sup\limits_{[a;b]} f(x)$.

Якщо $f(x) \in C[a;b]$, то $\exists \xi \in [a;b]:\;\; \int\limits_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)$.

<u>Доведення</u>:

Інтегруючи нерівність $m \le f(x) \le M$, одержимо першу нерівність, а застосовуючи теорему про проміжне значення, одержимо друге твердження.

Теорема доведена.

Лекція № 5

<u>Інтеграл зі змінною верхньою межею.</u>

<u>Формула Ньютона – Лейбниця</u>

Нехай $f(x) \in R[a;b]$.

Тоді $\exists\; F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt \quad \forall x \in [a;b]$ в силу адитивності інтеграла.

<u>**Теорема**</u>

$F(x) \in C[a;b]$ і якщо функція $f(x)$ безперервна в точці x_0, те $\exists\, F'(x_0) = f(x_0)$.

<u>Доведення</u>:

$$\left| F(x)-F(x_0) \right| = \left| \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \right| \le C\,|x-x_0| < \varepsilon \quad \text{при} \quad |x-x_0| < \delta_\varepsilon \quad \left(C = \sup_{[a;b]} |f| \right).$$

Розглянемо $\left| \dfrac{\Delta F}{\Delta x} - f(x_0) \right| = \left| \dfrac{1}{\Delta x} \int_{x_0}^{x} \left(f(t) - f(x_0) \right) dt \right| < \dfrac{\varepsilon\,|\Delta x|}{|\Delta x|} = \varepsilon$ при $|x-x_0| < \delta_\varepsilon$

(з безперервності функції $f(x)$ в точці x_0).

Наслідок.
Будь-яка неперервна функція на інтервалі має первісну на цьому інтервалі.

<u>Теорема</u> (формула Ньютона – Лейбниця)

Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ й $\Phi(x)$ - її первісна, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a).$$

<u>Доведення</u>:

Із загального виду первісної й попереднього наслідку $\Rightarrow$ $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt + C$,

причому $C = \Phi(a)$.
Підставляючи в цю рівність $x = b$, одержимо:

$$\Phi(b) = \int_a^b f(t)\,dt + \Phi(a) \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Зауваження. Це **основна формула інтегрального числення**.

<u>Def</u> $F(x)$ називається **узагальненої первісної** функції $f(x)$, якщо $F(x)$ неперервна й

$$\exists\, F'(x) = f(x) \qquad \forall\, x \in [a;b] \setminus \bigcup_{k=1}^{N} c_k.$$

Так, якщо функція $f(x)$ обмежена й має кінцеве число розривів, то в неї існує узагальнена первісна $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.

<u>Лема</u>. Узагальнена первісна визначається з точністю до $const$.

Це випливає з того, що різниця двох узагальнені первісні є неперервною кусочно-постійною функцією.
<u>Теорема</u> (узагальнена формула Ньютона - Лейбниця)
Якщо функція $f(x)$ обмежена й має кінцеве число розривів, те $\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a)$,

де $\Phi(x)$ - узагальнена первісна функції $f(x)$.
<u>Доведення</u>: те ж саме.

<u>Приклад</u> $\int_{-1}^{2} \operatorname{sgn} x\,dx = |2| - |-1| = 1.$

<u>Теорема</u> (заміна змінної в визначеному інтегралі)

Нехай $f(x) \in C[a;b] \;\wedge\; g(t) \in C^1[\alpha;\beta]$, причому $g(\alpha) = a,\; g(\beta) = b$ й $g[\alpha;\beta] = [a;b]$.

Тоді $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f(g(t))\,g'(t)\,dt$.

Доведення:

Якщо $F(x)$ - первісна функції $f(x)$, то $\Phi(t) = F(g(t))$ - первісна $f(g(t))\,g'(t)$.

Тому $\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$,

а. $\int\limits_\alpha^\beta f(g(t))\,g'(t)\,dt = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = F(g(\beta)) - F(g(\alpha)) = F(b) - F(a)$

Теорема доведена.

Зауваження.

На функції $f(x)$ й $g(x)$ можна послабити вимогу, уважаючи $f(x)$ - кусочно-неперервної, а $g(x)$ - кусочно-гладкої функціями (доказ - див. у Зорича).

Приклад $\int\limits_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \left| x = a\sin t \right| = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} a^2 \cos^2 t\,dt = a^2 \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{\pi a^2}{2}$.

Теорема (інтегрування частинами у визначеному інтегралі)

Нехай функції $f(x)$ й $g(x)$ $\in C^1[a;b]$.

Тоді $\int\limits_a^b f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b f'(x)g(x)\,dx$.

Доведення:

Для доказу проінтегруємо рівність $\frac{d}{dx}\left(f\,g\right) = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$ і одержимо необхідну формулу.

Зауваження. Функції $f(x)$ й $g(x)$ можна вважати кусочно-гладкими.

Приклад $I_n = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n t\,dt = (n-1)\,I_{n-2} - (n-1)\,I_n \quad \Rightarrow$

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} = \ldots = \frac{(n-1)!!}{n!!} \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & n - \text{÷åò}. \\ 1 & n - \text{í å÷åò}. \end{cases}$$

Приклад (обчислення границі інтегральних сум за допомогою інтегралу)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+k/n}\right)}_{\text{интегральная сумма}} = \int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x)\Big|_0^1 = \ln 2.$$

Лекція № 6

Деякі топологічні поняття на площині.

Def

Околом точки на площині називається відкрите коло з центром у цій точці:

$$U_\delta(M)=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\quad (x-a)^2+(y-b)^2<\delta^2\right\}.$$

Точка M називається **внутрішньою** точкою множини $G\subset\mathbb{R}^2$, якщо $\exists U_\delta(M)\subset G$.

Сукупність внутрішніх точок множини G називається **внутрішністю** множини G і $\overset{o}{G}$ чи позначається $\operatorname{int} G$.

Точка M називається **зовнішньою** точкою G, якщо $\exists U_\delta(M)\subset\mathbb{R}^2\setminus G$.
Сукупність зовнішніх точок G називається **зовнішністю** множини G і позначається $Ent\,G$.

Точка M називається **межевою** точкою множини G, якщо
$\forall U_\delta(M)\quad \exists M_1\in G\cap U_\delta(M)\quad\wedge\quad \exists M_2\in\left(\mathbb{R}^2\setminus G\right)\cap U_\delta(M)$, тобто в будь-якому околі точки M є як точки з множиною G, так і точки, що не належать множині G.

Сукупність межевих точок називається **межею** множини G і позначається ∂G.

Очевидно, що $\left(\operatorname{int} G\right)\cup\left(Ent\,G\right)\cup\left(\partial G\right)=\mathbb{R}^2$ і всі ці множини не перетинаються.

Квадровані множини. Обчислення площі.

У школі була визначена площа багатокутників $\sigma(P)$, що задовольняє наступним умовам:

1) **адитивности**, тобто якщо $\overset{0}{P_1}\bigcap\overset{0}{P_2}=\Phi$, то $\sigma(P_1\bigcup P_2)=\sigma(P_1)+\sigma(P_2)$.
2) площі рівних (конгруентних) багатокутників рівні.
3) площа квадрата зі стороною, рівної 1, дорівнює 1.

Нехай:
F – довільна обмежена множина на площині або фігура;
P – вписаний багатокутник;
Q - описаний багатокутник.
Тоді можемо записати: $P\subset F\subset Q$.
Тому що $\sigma(P)\le\sigma(Q)$, то $\exists\sup\limits_{P\subset F}\sigma(P)=\sigma_*(F)$ - **внутрішня площа** (або міра) множини F і

$\exists\inf\limits_{Q\supset F}\sigma(Q)=\sigma^*(F)$ - **зовнішня площа** (або міра) множини *F.*

<u>Def</u> Множина *F* називається **квадровною** (або **вимірної по Жордану**), якщо

$$\sigma_*(F)=\sigma^*(F).$$

Це загальне значення називається <u>площею </u>множини<u> *F*</u> і позначається $\sigma(F)$.

Зауваження.
Для багатокутника це визначення збігається зі старим, тому що можна взяти $P=Q=F$.

<u>Приклад обмеженої **неквадровної** множини.</u>
Нехай $F=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\quad x,y\in[0;1]\bigcap\mathbb{Q}\right\}$.
Тоді як <u>вписаний</u> багатокутник можна взяти тільки точку з раціональними координатами і $\sigma_*(F)=0$, а будь-який <u>описаний </u> багатокутник буде містити одиничний квадрат, і тому $\sigma^*(F)=1$.

<u>Критерій квадровністи</u>
Обмежена непорожня множина F є квадровною тоді і тільки тоді, коли ії межа має міру 0: $\sigma(\partial F)=0$, тобто $\forall\varepsilon>0\quad\exists P$ - багатокутник: $\partial F\subset P\quad\wedge\quad\sigma(P)<\varepsilon$.
<u>Доведення.</u> **Необхідність.**
Якщо множина F – квадрована, то $\exists P_1, Q_1$ - багатокутники:

$$P_1\subset F\subset Q_1:\quad \sigma(P_1)>\sigma(F)-\frac{\varepsilon}{2}\quad\wedge\quad \sigma(Q_1)<\sigma(F)+\frac{\varepsilon}{2}\quad\Rightarrow\quad \sigma(Q_1)-\sigma(P_1)<\varepsilon .$$

Але $Q_1\setminus P_1$ - є узагальненим багатокутником, що містить межу F.
Виходить, $\forall\varepsilon>0\quad\exists P=(Q_1\setminus P_1)\subset\partial F$ і $\sigma(P)<\varepsilon$.
Достатність. Верно і зворотне, что видно з малюнка.
Теорема доведена.

<u>Властивості площі.</u>

1) Якщо F_1 і F_2 - квадруеми множини, то $F_1\bigcup F_2$ і $F_1\bigcap F_2$ - також квадруеми множини і $\sigma(F_1\bigcup F_2)=\sigma(F_1)+\sigma(F_2)-\sigma(F_1\bigcap F_2)$.

<u>Доведення</u> Тому що $\partial(F_1\bigcup F_2)\subset(\partial F_1)\bigcup(\partial F_2)$ і $\partial(F_1\bigcap F_2)\subset(\partial F_1)\bigcup(\partial F_2)$, то по визначенню квадруемості - <u>об'єднання</u> і <u>перетинання</u> є квадруемимі.
Представимо об'єднання цих двох множин у наступному вигляді:

$$F_1\bigcup F_2=F_1'\bigcup F_2'\bigcup(F_1\bigcap F_2)\ ,\ \text{де}\ F_i'=F_i\setminus(F_1\bigcap F_2),\quad i=1,2 .$$

Усі ці множини попарно не перетинаються, тому спочатку доведемо для них властивість аддитивности площі.

Тому що в кожну квадруемую фігуру можна вписати багатокутник, площа якого як угодно мало відрізняється від площі $\sigma(F)$, то:
$\exists P_i\subset F_i':\quad \sigma(F_i')-\sigma(P_i)<\varepsilon\quad(i=1,2)$ і
$\exists P_3\subset F_1\bigcap F_2:\quad \sigma(F_1\bigcap F_2)-\sigma(P_3)<\varepsilon$.
Тоді $\sigma(F_1\bigcup F_2)-\sigma(P_1\bigcup P_2\bigcup P_3)<3\varepsilon\quad\Rightarrow$

$$\sigma(F_1\bigcup F_2)=\sigma(F_1')+\sigma(F_2')+\sigma(F_1\bigcup F_2)=\sigma(F_1)-\sigma(F_1\bigcap F_2)+\sigma(F_2)-\sigma(F_1\bigcap F_2)+\sigma(F_1\bigcap F_2)=$$
$=\sigma(F_1)+\sigma(F_2)-\sigma(F_1\bigcap F_2)$, что і було потрібно довести.

<u>Теорема 1.</u> Якщо функція $f(x)\in C[a;b]$ і $f(x)\ge 0$, то криволінійна трапеція $G=\left\{\,(x,y):\quad x\in[a;b],\quad y\in[0;\,f(x)]\,\right\}$ є квадруемой множиною і ії площа

$$\sigma(G)=\int_a^b f(x)\,dx\ .$$

<u>Доведення</u> Візьмемо будь-яке розбіття відрізка Π.
Тоді **верхня сума Дарбу** $S_f(\Pi)=\sum_{i=1}^{n}M_i\,\Delta x_i=\sigma(Q)$,
де Q – описаний багатокутник,
а **нижня сума Дарбу** $s_f(\Pi)=\sum_{i=1}^{n}m_i\,\Delta x_i=\sigma(P)$,
де P – вписаний багатокутник.
Тому що за критерієм Рімана $\forall\varepsilon>0\quad\exists\Pi:\quad S_f(\Pi)-s_f(\Pi)<\varepsilon$,
то $\sigma(Q)-\sigma(P)<\varepsilon$. Тоді за критерієм квадруемості
криволінійна трапеція квадрована і ії площа дорівнює $\int_a^b f(x)\,dx$.

Зауваження.
Клас фігур, що представляється у вигляді об'єднання або різниці криволінійних трапецій, досить широкий. Так, множина $G=\left\{ (x,y)\in \mathbb{R}^2 : \quad f(x)\le y\le g(x); \quad x\in[a;b] \right\}$ має площу, рівну $\sigma(G)=\int\limits_a^b \left(g(x)-f(x) \right) dx$.

<u>Теорема 2</u>
Площа криволінійного сектора $F=\left\{ (\varphi;r)\in \mathbb{R}^2 : \quad 0\le r\le r(\varphi); \quad \varphi\in[\alpha;\beta] \right\}$, де $r(\varphi)\in C[\alpha;\beta]$, дорівнює $\sigma(F)=\frac{1}{2}\int\limits_a^b r^2(\varphi)\,d\varphi$.

<u>Доведення:</u>
Верхня сума Дарбу для нашого інтеграла збігається с площею описаних секторів.
Нижня сума Дарбу збігається з площею вписаних секторів.
Оскільки обидві суми Дарбу мають загальну границю, співпадаючу з нашим інтегралом, то і площа криволінійного сектора дорівнює цьому інтегралу.

<u>Приклад</u> $r=\sqrt{\cos 2\varphi}$ - лемніската Бернуллі.

Знайдемо площу фігури, обмежену лемнискатой: $\sigma = 2\cdot\frac{1}{2}\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos 2\varphi\,d\varphi = 1$.