Теорія міри і інтеграла
Тема 2: Системи множин і міри
Лекція 5
Міри – базові означення та властивості

Володимир Кадець

ХНУ ім. В.Н.Каразіна

Харків, 2020

Зміст лекції

Нехай Ω – множина із заданою на ній сім'єю підмножин Φ. Функція множини $\mu\colon \Phi \to \mathbb{R}$ називається скінченно-адитивною мірою, якщо вона задовольняє такі вимоги:

1. $\mu(A) \geqslant 0$ для будь-якого $A \in \Phi$;
2. Якщо $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \Phi$ – попарно не перетинні множини, й $\bigsqcup\limits_{k=1}^{n} A_k \in \Phi$, то $\mu\left(\bigsqcup\limits_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mu(A_k)$.

Найпростіший приклад: Ω – скінченна множина, $\Phi = 2^{\Omega}$, $\mu(A) := |A|$ (так звана лічильна міра).

Нехай $\emptyset \in \Phi$. Тоді за другою умовою

$$\mu(\emptyset) + \mu(\emptyset) = \mu(\emptyset \sqcup \emptyset) = \mu(\emptyset),$$

тобто $\mu(\emptyset) = 0$. При цьому можуть бути і непорожні множини нульової міри.

Якщо Φ – це алгебра множин, то умову 2 можна переформулювати простіше:

2′. Для будь-якої пари неперетинних множин $A_1, A_2 \in \Phi$ міра їх об'єднання дорівнює сумі мір: $\mu(A_1 \sqcup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2)$.

Властивості скінченно-адитивних мір на алгебрі множин:
Нехай μ – скінченно-адитивна міра на алгебрі $\mathbb{A} \subset 2^{\Omega}$. Тоді:

a) Якщо $A_1, A_2 \in \mathbb{A}$, то $\mu(A_1 \backslash A_2) = \mu(A_1) - \mu(A_1 \cap A_2)$.
Якщо при цьому $A_2 \subset A_1$, то $\mu(A_1 \backslash A_2) = \mu(A_1) - \mu(A_2)$.

b) Якщо $A_1, A_2 \in \mathbb{A}$, і $A_2 \subset A_1$, то $\mu(A_2) \leqslant \mu(A_1)$.
Зокрема, якщо $\mu(A_1) = 0$, то і $\mu(A_2) = 0$.

c) Якщо $\mu(A_2) = 0$, то $\mu(A_1 \backslash A_2) = \mu(A_1)$.

d) $\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2) - \mu(A_1 \cap A_2) \leqslant \mu(A_1) + \mu(A_2)$.

e) $\mu\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k\right) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \mu(A_k)$ для будь-яких $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathbb{A}$.

a) Якщо $A_1, A_2 \in \mathbb{A}$, то $\mu(A_1 \setminus A_2) = \mu(A_1) - \mu(A_1 \cap A_2)$.
Якщо при цьому $A_2 \subset A_1$, то $\mu(A_1 \setminus A_2) = \mu(A_1) - \mu(A_2)$.

Доведення. $A_1 = (A_1 \setminus A_2) \sqcup (A_1 \cap A_2)$. Отже,

$$\mu(A_1) = \mu(A_1 \setminus A_2) + \mu(A_1 \cap A_2).$$

b) Якщо $A_1, A_2 \in \mathbb{A}$, і $A_2 \subset A_1$, то $\mu(A_2) \leqslant \mu(A_1)$.
Зокрема, якщо $\mu(A_1) = 0$, то і $\mu(A_2) = 0$.

Доведення. Це наслідок пункту a):

$$\mu(A_1) - \mu(A_2) = \mu(A_1 \setminus A_2) \geqslant 0.$$

c) Якщо $\mu(A_2) = 0$, то $\mu(A_1 \setminus A_2) = \mu(A_1)$.

Доведення. Якщо $\mu(A_2) = 0$, то і $\mu(A_2 \cap A_1) = 0$. Залишається застосувати пункт a).

d) $\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2) - \mu(A_1 \cap A_2) \leqslant \mu(A_1) + \mu(A_2)$.
Доведення.
Запишемо $A_1 \cup A_2$ як об'єднання трьох неперетинних множин: $A_1 \cup A_2 = (A_1 \backslash A_2) \sqcup (A_2 \backslash A_1) \sqcup (A_2 \cap A_1)$. Маємо:

$$\begin{aligned}\mu(A_1 \cup A_2) &= \mu(A_1 \backslash A_2) + \mu(A_2 \backslash A_1) + \mu(A_1 \cap A_2)\\ &= (\mu(A_1 \backslash A_2) + \mu(A_1 \cap A_2)) + (\mu(A_2 \backslash A_1) + \mu(A_1 \cap A_2))\\ &- \mu(A_1 \cap A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2) - \mu(A_1 \cap A_2).\end{aligned}$$

e) $\mu\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k\right) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \mu(A_k)$ для будь-яких $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathbb{A}$.
Доведення. Виводиться індукцією за n з d).

Найбільш вивченими і корисними в застосуваннях скінченно-адитивними мірами є зліченно-адитивні міри, тобто міри, які підпорядковуються, разом з аксіомами скінченної адитивності, такій аксіомі зліченної адитивності:

якщо $A_n \in \Phi$, $n = 1, 2, \ldots$ і $\bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in \Phi$, то

$$\mu\left(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu\left(A_k\right).$$

Зліченно-адитивні міри називають ще σ-адитивними.
Для міри, заданої на σ-алгебрі, перевірка зліченної адитивності дещо спрощується: якщо $A_n \in \Sigma$, $n = 1, 2, \ldots$, то автоматично і $\bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \Sigma$.

Приклад скінченно-адитивної, але не зліченно-адитивної міри на алгебрі множин

Розглянемо $\Omega = \mathbb{N}$, а в якості $\mathbb{A}$ візьмемо алгебру скінченних та ко-скінченних множин. Означимо $\mu(A) = 0$ для скінченних множин та $\mu(A) = 1$ для ко-скінченних множин.

Приклад зліченно-адитивної міри на σ-алгебрі множин

Розглянемо $\Omega = \mathbb{N}$, з $\mathbb{A} = 2^{\mathbb{N}}$. Означимо $\mu(\{k\}) = 2^{-k}$, та відповідно $\mu(A) = \sum_{k \in A} 2^{-k}$.

Питання. Чи існують скінченно-адитивні, але не зліченно-адитивні міри на σ-алгебрі множин $\mathbb{A} = 2^{\mathbb{N}}$?

Властивості зліченно-адитивних мір:
Нехай μ – зліченно-адитивна міра, задана на σ-алгебрі Σ підмножин множини Ω. Тоді:

1. Якщо $A_n \in \Sigma$, $n = 1, 2, \ldots,$ – зростаючий ланцюжок множин (тобто $A_1 \subset A_2 \subset \ \ldots \ \subset A_n \subset \ \ldots$), то $\mu\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim\limits_{k\to\infty} \mu(A_k)$;
2. Якщо $A_n \in \Sigma$, $n = 1, 2, \ldots,$ – спадний ланцюжок множин (тобто $A_1 \supset A_2 \supset \ \ldots \ \supset A_n \supset \ \ldots$), то $\mu\left(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim\limits_{k\to\infty} \mu(A_k)$.

Одну частину можна вивести з іншої переходом до доповнень. Доведемо, наприклад, перше з тверджень. Отож нехай $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots$. Приймемо $A_\infty := \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Розглянемо множини $B_n = A_{n+1} \setminus A_n$. Послідовність множин $A_1, B_1, B_2, B_3, \ldots$ диз'юнктна (тобто множини попарно не перетинаються),

$$A_1 \sqcup \left(\bigsqcup_{k=1}^{n} B_k \right) = A_{n+1}, \quad A_1 \sqcup \left(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} B_k \right) = A_\infty .$$

Скористаємося умовою зліченної адитивності й означенням суми ряду:

$$\mu\left(A_\infty\right) = \mu\left(A_1\right) + \sum_{j=1}^{\infty} \mu\left(B_j\right) = \lim_{k\to\infty} \left(\mu\left(A_1\right) + \sum_{j=1}^{k} \mu\left(B_j\right) \right)$$

$$= \lim_{k\to\infty} \mu\left(A_k\right). \qquad \square$$

Ще два надзвичайно простих, проте не менш корисних факти. Нехай μ – зліченно-адитивна міра, визначена на σ-алгебрі Σ підмножин множини Ω, $A_n \in \Sigma$, $n = 1, 2, \ldots$. Тоді:

Факт 1. $\mu\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu\left(A_k\right)$. Зокрема, якщо всі $\mu(A_k)$ дорівнюють 0, то і $\mu\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k\right) = 0$.

Доведення. Оскільки множини $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ утворюють зростаючий за n ланцюжок множин ми можемо в нерівності

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mu\left(A_k\right),$$

доведеній для скінченно-адитивних мір, перейти до границі при $n \to +\infty$.

Факт 2. Якщо $\mu\left(A_i \cap A_j\right) = 0$ для будь-яких $i, j \in \mathbb{N}$, $i \neq j$, то

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu\left(A_k\right).$$

Доведення. Розглянемо множини $D = \bigcup\limits_{i,j\in\mathbb{N}} \left(A_i \cap A_j\right)$ і $A_k' = A_k \backslash D$. Допоміжні множини A_k' вже не перетинаються між собою. Оскільки $\mu(D) = 0$, то $\mu(A_k') = \mu(A_k)$ і

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \mu\left(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k'\right).$$

Залишається скористатись зліченною адитивністю.

Вправи

5.1 Якщо зліченно-адитивна міра μ задана на σ-алгебрі, то $\mu(A_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ для будь-якої диз'юнктної послідовності множин $A_n \in \Sigma$, $n = 1, 2, \ldots$

5.2 Нехай μ – скінченно-адитивна міра, задана на σ-алгебрі Σ підмножин множини Ω і для будь-якого зростаючого ланцюжка множин виконується співвідношення $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mu\left(A_k\right)$. Тоді μ зліченно-адитивна.

5.3 Нехай (b_m) – послідовність додатних чисел з $\sum_{m=1}^{\infty} b_m < \infty$. На множині $\mathbb{N}$ всіх натуральних чисел розглянемо σ-алгебру $2^{\mathbb{N}}$. Означимо для будь-якого $A \in 2^{\mathbb{N}}$ міру $\mu\left(A\right)$ рівністю $\mu\left(A\right) = \sum_{m\in A} b_m$. Перевірте, що μ – це зліченно-адитивна міра. Доведіть, що таким чином описано загальний вигляд зліченно-адитивної міри на $2^{\mathbb{N}}$.