Теорія міри і інтеграла
Тема 2: Системи множин і міри
Лекція 4
Алгебри та σ-алгебри множин

Володимир Кадець

ХНУ ім. В.Н.Каразіна

Харків, 2020

Зміст лекції

Нехай $\mathbb{A}$ – деяка сім'я підмножин фіксованої множини Ω. Сім'я $\mathbb{A}$ називається алгеброю множин на Ω, якщо вона задовольняє такі аксіоми:

1. $\Omega \in \mathbb{A}$.
2. Якщо $A \in \mathbb{A}$, то й $\Omega \backslash A \in \mathbb{A}$.
3. Якщо $A_1, A_2 \in \mathbb{A}$, то й $A_1 \cap A_2 \in \mathbb{A}$.

Найпростішим прикладом алгебри є сім'я 2^Ω всіх підмножин множини Ω. Інші, менш тривіальні приклади наведемо трохи пізніше.

Наслідки з аксіом:

- $\emptyset \in \mathbb{A}$;
- якщо $A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{A}$, то $\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k \in \mathbb{A}$;
- якщо $A_1, A_2 \in \mathbb{A}$, то $A_1 \cup A_2 \in \mathbb{A}$;
- якщо $A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{A}$, то й $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k \in \mathbb{A}$;
- якщо $A_1, A_2 \in \mathbb{A}$, то $A_1 \setminus A_2 \in \mathbb{A}$, і $A_1 \triangle A_2 \in \mathbb{A}$.

Введемо одне корисне позначення. Нехай множини $A_1, A_2, \ldots$ диз'юнктні (попарно не перетинаються). Тоді їх об'єднання позначатимемо значком диз'юнктного об'єднання: $\bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Якщо ми вживаємо знак $\sqcup$ диз'юнктного об'єднання, це означає, що ми вимагаємо диз'юнктність множин, які входять в об'єднання. Наприклад, запис $C = A \sqcup B$ потрібно розуміти так: A і B диз'юнктні й $A \cup B = C$.

Теорема 1. Для будь-якої послідовності $A_1, A_2, \ldots$ елементів алгебри $\mathbb{A}$ існують такі $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \ldots \in \mathbb{A}$, що $\tilde{A}_k \subset A_k$ при всіх k, $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \bigsqcup_{k=1}^{n} \tilde{A}_k$ для всіх n і $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} \tilde{A}_k$.

Теорема 2. Нехай $\Phi \subset 2^{\Omega}$. Тоді серед усіх алгебр множин, які містять Φ як підсім'ю, існує найменша за включенням.

Доведення. Означимо $\mathbb{A}$ як перетин всіх алгебр на Ω, які містять Φ. Іншими словами, множина D належить до $\mathbb{A}$ тоді і тільки тоді, коли D належить до всіх алгебр множин, що містять Φ як підсім'ю. Очевидно, будь-яка алгебра множин, яка містить Φ, містить і $\mathbb{A}$. Водночас для сім'ї множин $\mathbb{A}$ легко перевіряються аксіоми алгебри множин:
1. Ω належить до всіх алгебр, які містять Φ, отже, $\Omega \in \mathbb{A}$.
2. Якщо $D \in \mathbb{A}$, то D належить до всіх алгебр, які містять Φ. Отже, $\Omega \backslash D$ належить до всіх алгебр, що містять Φ, і $\Omega \backslash D \in \mathbb{A}$.
3. Якщо $D_1, D_2 \in \mathbb{A}$, то обидві множини лежать у всіх алгебрах, які містять Φ. Отже, $D_1 \cap D_2$ належить до всіх алгебр, які містять Φ, і $D_1 \cap D_2 \in \mathbb{A}$. $\square$

Найменша алгебра $\mathbb{A} = \mathbb{A}(\Phi)$, яка містить Φ, називається алгеброю, породженою сім'єю Φ. У цьому випадку говорять також, що Φ породжує алгебру $\mathbb{A}$.

Приклади. Опис скінченних алгебр.

Сім'я Σ підмножин множини Ω називається σ-алгеброю, якщо вона є алгеброю і стійка щодо операції зліченного об'єднання: для будь-якої послідовності $A_n \in \Sigma$ маємо $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in \Sigma$.

Переходом до доповнень відразу отримуємо, що σ-алгебра стійка і щодо операції зліченного перетину (формули де Моргана).

Із Теореми 1 випливає, що якщо сім'я Σ утворює алгебру множин, то перевірку того, що Σ – це σ-алгебра, достатньо здійснити не для всіх зліченних об'єднань, а лише для зліченних об'єднань попарно неперетинних множин.

Приклад алгебри, яка не є σ-алгеброю: алгебра скінченних та ко-скінченних підмножин відрізка $[0, 1]$.

Перевірка коректності наступного означення здійснюється у такий самий спосіб, як доведення теореми 2 .

Нехай Φ – сім'я підмножин множини Ω. Найменша σ-алгебра $\Sigma = \Sigma(\Phi)$, яка містить Φ, називається σ-алгеброю, породженою сім'єю Φ.

$\Sigma(\Phi)$ – це перетин усіх σ-алгебр на Ω, які містять Φ.

Перефразуємо означення у вигляді такого твердження:

Твердження 1. Якщо деяка σ-алгебра Σ_0 містить сім'ю Φ, то Σ_0 містить і всю $\Sigma(\Phi)$.

Приклад: σ-алгебра, що породжена одноточковими підмножинами відрізка $[0, 1]$.

Нехай Ω – топологічний простір. σ-Алгебра $\mathfrak{B}$, породжена сім'єю всіх відкритих підмножин Ω, називається σ-алгеброю борелевих множин на Ω. Елементи σ-алгебри $\mathfrak{B}$ називаються борелевими множинами (E. Borel). На жаль, у загальному випадку для σ-алгебри, породженої сім'єю множин, і, зокрема, для системи борелевих підмножин топологічного простору, нема доброго конструктивного опису. Тим не менше, певне уявлення про борелеві множини можна скласти, виходячи з таких міркувань.

Сім'я $\mathfrak{B}$ містить усі відкриті підмножини простору Ω. Оскільки $\mathfrak{B}$ – алгебра, $\mathfrak{B}$ містить і доповнення до відкритих множин, тобто всі замкнені множини. Як σ-алгебра, $\mathfrak{B}$ містить зліченні об'єднання замкнених множин, тобто множини класу F_σ. Також $\mathfrak{B}$ містить множини класу G_δ. Зліченні об'єднання множин класу G_δ називаються множинами класу $\mathsf{G}_{\delta\sigma}$; зліченні перетини множин класу F_σ називаються множинами класу $\mathsf{F}_{\sigma\delta}$; зліченні об'єднання множин класу $\mathsf{F}_{\sigma\delta}$ утворюють клас $\mathsf{F}_{\sigma\delta\sigma}$ і так далі до нескінченності. Всі ці класи множин містяться в σ-алгебрі $\mathfrak{B}$.

Чи цим вичерпуються борелеві множини? Ні! Щоб отримати всі борелеві множини, треба означити класи $\mathsf{G}_{\delta\sigma\delta\ldots}$ і $\mathsf{F}_{\sigma\delta\sigma\ldots}$ не тільки для випадку, коли індекс $\sigma\delta\sigma\ldots$ – скінченна послідовність, але і для будь-яких зліченних ординалів. Тут ми торкаємося одного питання теорії міри, де потрібне знання порядкових чисел і трансфінітної індукції.

Важливість вивчення борелевих множин обумовлена тим, що множини, які природно виникають у задачах аналізу, – множини точок неперервності, точок гладкості, точок збіжності і т. д., – як правило, є борелевими множинами, причому не дуже далеких борелевих класів. Наступне корисне твердження показує, що одна і та сама σ-алгебра може породжуватись різними системами множин.

Теорема 3. Сукупність множин вигляду $(a, +\infty)$, $a \in \mathbb{R}$ породжує σ-алгебру $\mathfrak{B}$ борелевих множин на осі.

Доведення. Позначимо σ-алгебру, породжену сім'єю множин $(a, +\infty)$, $a \in \mathbb{R}$, через B_1. Нам потрібно довести, що $\mathrm{B}_1 = \mathfrak{B}$. Оскільки $\mathfrak{B}$ містить всі відкриті множини, $\mathfrak{B}$, зокрема, містить і множини вигляду $(a, +\infty)$. За твердженням 1 це означає, що $B_1 \subset \mathfrak{B}$. Згідно із твердженням 1, для доведення оберненого включення достатньо показати, що всі відкриті множини лежать у B_1. Нехай $b \in \mathbb{R}$ – довільне число. Замкнена піввісь $[b, +\infty)$ зображається у вигляді зліченного перетину множин вигляду $(a, +\infty)$: $[b, +\infty) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (b - \frac{1}{n}, +\infty)$. Отже, $[b, +\infty) \in B_1$. Також у B_1 лежать усі відкриті відрізки: $(a, b) = (a, +\infty) \setminus [b, +\infty)$. Оскільки кожна відкрита множина на осі є об'єднанням не більш ніж зліченного числа відкритих відрізків, усі відкриті множини є елементами σ-алгебри B_1. □