Теорія міри і інтеграла
Тема 1: метричні та псевдометричні простори

Лекція 3
Застосування теореми Бера. Класи G_δ та $F\sigma$

Володимир Кадець

ХНУ ім. В.Н.Каразіна

Харків, 2020

Зміст лекції

Підмножина A топологічного простору X називається ніде не щільною, якщо ЇЇ ЗАМИКАННЯ має порожню внутрішність. Підмножина A топологічного простору X називається множиною першої категорії в X, якщо A можна зобразити як злічене об'єднання ніде не щільних в X підмножин. Підмножина в X, яка не є множиною першої категорії, називається множиною другої категорії в X.

Теорема Бера Нехай X – повний метричний простір. Тоді X – множина другої категорії в X.

Приклад 1. Межа замкненої множини – це ніде не щільна множина.

Приклад 2. Межа відкритої множини – це ніде не щільна множина.

Приклад 3. Доповнення до щільної відкритої множини – це ніде не щільна множина.

Властивості. Підмножина множини першої категорії знову має першу категорію; скінченне або зліченне об'єднання множин першої категорії – множина першої категорії.

Застосування. Одноточкова підмножина $A = \{x\}$ хаусдорфова топологічного простору X є ніде не щільною тоді і тільки тоді, коли x – не ізольована точка в X. Звідси і з теореми Бера легко вивести такий важливий факт: будь-який повний метричний простір без ізольованих точок незлічений.

Поточкова границя послідовності неперервних функцій на відрізку може бути розривною функцією: приклад на "дошці". Але чи може така границя бути УСЮДИ розривною функцією?

Теорема. Нехай X, Y – метричні простори, $f_n : X \to Y$ – неперервні функції, $f : X \to Y$ і $\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t)$ для всіх $t \in X$. Тоді множина D точок розриву функції – це множина першої категорії.

Доведення. Почнемо з корисного означення: коливанням функції f в точці $t \in X$ називається $\omega(t)$ – супремум таких чисел $r \geqslant 0$, для яких існують послідовності $t_n, \tau_n \in X$ такі, що $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = \lim\limits_{n\to\infty} \tau_n = t$ та $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \rho(f(t_n), f(\tau_n)) \geqslant r$.

$$\omega(t) = \inf\{\mathrm{diam}(f(B_X(t, r)))\colon r > 0\}.$$

Продовження доведення

Точка t буде точкою розриву функції тоді і тільки тоді, коли $\omega(t) > 0$. Означимо $E_n = \{t \in X : \omega(t) \geqslant \frac{1}{n}\}$. Тоді $D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Нам достатньо довести, що E_n – множини першої категорії. Зафіксуємо n і для кожного $m \in \mathbb{N}$ розглянемо множини

$$A_n(m) = \left\{ t \in X : \forall k > m \ \ \rho(f_m(t), f_k(t)) \leqslant \frac{1}{5n} \right\}.$$

З поточкової збіжності функцій f_k випливає, що $X = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} A_n(m)$. Тому,

$$E_n = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} (E_n \cap A_n(m)).$$

Ми доведемо, що кожна з множин $E_n \cap A_n(m)$ є ніде не щільною, і цим буде доведена уся теорема.

Продовження продовження ☺

З неперервності функцій f_k випливає, що множина $A_n(m)$ замкнена. Тому межа цієї множини ніде не щільна. Щоб довести, що $E_n \cap A_n(m)$ є ніде не щільною, нам достатньо перевірити, що $E_n \cap A_n(m)$ цілком лежить на межі множини $A_n(m)$. Іншими словами, нам треба перевірити, що E_n не містить жодної внутрішньої точки множини $A_n(m)$.
Нехай $t \in A_n(m)$ – внутрішня точка. Оберемо таке $r > 0$, що $B_X(t, r) \subset A_n(m)$ і $\operatorname{diam}(f_m(A_n(m))) \leqslant \frac{1}{5n}$. Розглянемо $s, \tau \in B_X(t, r)$. Маємо

$$\begin{aligned}\rho(f(s), f(\tau)) &\leqslant \rho(f(s), f_m(s)) + \rho(f_m(s), f_m(\tau)) \\ &\quad + \rho(f_m(\tau), f(\tau)) \leqslant \frac{1}{5n} + \frac{1}{5n} + \frac{1}{5n} = \frac{3}{5n}.\end{aligned}$$

Тому $\omega(t) \leqslant \frac{3}{5n} < \frac{1}{n}$, тобто $t \notin E_n$. □

Підмножина A топологічного простору X називається множиною класу G_δ, якщо її можна зобразити у вигляді зліченного перетину відкритих множин, тобто існують відкриті множини $U_n \subset X$ такі, що $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$.

Приклади G_δ-множин в $\mathbb{R}$. (на “дошці”)

Властивості (пропоную у якості вправ)

3.1 Кожна відкрита множина – це множина класу G_δ.
3.2 Кожна замкнена множина в МЕТРИЧНОМУ ПРОСТОРІ – це множина класу G_δ.
3.3 Об'єднання двох множин класу G_δ – це множина класу G_δ.
3.4 Перетин скінченної або зліченної кількості множин класу G_δ – це множина класу G_δ.
3.5 Доповнення до щільної множини класу G_δ – це множина першої категорії.
3.6 В повному метричному просторі перетин скінченної або зліченної кількості щільних множин класу G_δ – це щільна множина класу G_δ, зокрема цей перетин не порожній.
3.7 Множина $\mathbb{Q}$ всіх раціональних чисел на осі $\mathbb{R}$ не є множиною класу G_δ.

Підмножина B топологічного простору X називається множиною класу F_σ, якщо її можна зобразити у вигляді зліченного об'єднання замкнених множин, тобто існують замкнені множини $V_n \subset X$ такі, що $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$.

Властивості та вправи

3.8 Підмножина $A \subset X$ належить до класу F_σ тоді і тільки тоді, коли її доповнення $X \setminus A$ належить до класу G_δ.

3.9 Кожна замкнена множина – це множина класу F_σ.

3.10 Кожна відкрита множина в МЕТРИЧНОМУ ПРОСТОРІ – це множина класу F_σ.

3.11 Перетин двох множин класу F_σ – це множина класу F_σ.

3.12 Об'єднання скінченної або зліченної кількості множин класу F_σ – це множина класу F_σ.

3.13 Множина $\mathbb{Q}$ всіх раціональних чисел на осі $\mathbb{R}$ – це множина класу F_σ.

3.14 Множина $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ всіх ірраціональних чисел на осі $\mathbb{R}$ не є множиною класу F_σ.

3.15 Навести приклад множини на осі $\mathbb{R}$, яка не є ані множиною класу F_σ, ані G_δ.