Теорія міри і інтеграла
Тема 1: метричні та псевдометричні простори
Лекція 2
Повні простори. Теорема Бера

Володимир Кадець

ХНУ ім. В.Н.Каразіна

Харків, 2020

Зміст лекції

Послідовність (x_n) елементів метричного простору X називається **фундаментальною**, якщо $\rho(x_n, x_m) \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$. Детальніше: послідовність (x_n) фундаментальна, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує такий номер N, починаючи з якого всі попарні відстані між елементами x_n стають меншими за ε. Фундаментальні послідовності називають ще **послідовностями Коші**.

Якщо послідовність $x_n \in X$ має границю $x \in X$, то вона фундаментальна:

$$\rho(x_n, x_m) \leqslant \rho(x_n, x) + \rho(x, x_m) \to 0, \quad n, m \to \infty.$$

Метричний простір X називається **повним**, якщо будь-яка фундаментальна послідовність в X має границю. Як відомо з курсу аналізу, простори $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, а також будь-який скінченновимірний евклідовий простір повні.

Корисні факти (пропоную у якості вправ):

2.1 Замкнений підпростір повного метричного простору є повним.

2.2 Повний підпростір Y будь-якого метричного простору X замкнений (N.B.! Тут важливо, що X – метричний, а не псевдометричний простір).

2.3 Нехай послідовність Коші (x_n) у метричному просторі X містить збіжну підпослідовність. Тоді й сама послідовність (x_n) збіжна.

2.4 Метричний простір X повний тоді і тільки тоді, коли будь-яка послідовність (x_n) з $\sum_{n=1}^{\infty} \rho(x_n, x_{n+1}) < \infty$ збігається.

Обговорити приклади неповних метричних просторів. Поповнення: про це можна прочитати в пункті 1.3.5 підручника.

Нехай A – непорожня підмножина метричного простору X. Діаметром множини A називається величина

$$\operatorname{diam}(A) = \sup_{x,y\in A} \rho(x,y).$$

Теорема 1 (принцип вкладених множин). Нехай A_k, $k \in \mathbb{N}$ – непорожні замкнені підмножини повного метричного простору X, що утворюють спадну послідовність:

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots,$$

і нехай $\operatorname{diam} A_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Тоді $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ не порожній і складається з однієї точки.

Доведення

Виділимо в кожному з A_n по точці a_n. Нехай N – деяке натуральне число, $k, j > N$. Тоді $a_k, a_j \in A_N$. Тому

$$\rho\left(a_j, a_k\right) \leqslant \operatorname{diam} A_N \xrightarrow[N\to\infty]{} 0,$$

тобто a_n утворюють фундаментальну послідовність. Позначимо $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = a$. Для будь-якого N і будь-якого $k > N$ точка a_k лежить в A_N. Отже, й $a = \lim\limits_{k\to\infty} a_k$ також лежить в A_N. Ми показали, що $a \in A_N$ для будь-якого N, тобто перетин множин A_n не порожній. Зазначимо, що $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \subset A_N$ при будь-якому N, отже, $\operatorname{diam} \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \leqslant \operatorname{diam} A_N \xrightarrow[N\to\infty]{} 0.$

Множина нульового діаметра не може містити більше однієї точки. $\square$

Обговорення теореми. Важливість всіх умов

Множина $A \subset X$ називається щільною в множині $B \subset X$, якщо $\overline{A} \supset B$.

Множина $A \subset X$ називається щільною, якщо вона щільна в усьому просторі X. Множина $A \subset X$ буде щільною тоді і тільки тоді, коли вона перетинається з усіма непорожніми відкритими підмножинами простору X.

Топологічний простір X називається сепарабельним, якщо в X є злічення щільна підмножина.

Стандартні метричні простори $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$, $C[a, b]$ сепарабельні.

Якщо топологічний простір X містить незлічений набір неперетинних відкритих множин, то X несепарабельний. Зокрема, $\mathbb{R}$ в дискретній метриці – це несепарабельний простір.

Вправи

2.5 Нехай X, Y – топологічні простори, $f\colon X \to Y$ – неперервна функція, A – щільна підмножина в X. Тоді $f(A)$ щільна в $f(X)$.

2.6 Нехай A, B, C – підмножини топологічного простору X, A щільна в B, а B щільна в C. Тоді A щільна в C.

2.7 Підпростір сепарабельного МЕТРИЧНОГО простору сам буде сепарабельним.

2.8 Розглянемо таку топологію τ на $\mathbb{R}$: для кожного $x \in \mathbb{R}$ за базу околів візьмемо сім'ю всіх множин вигляду

$$\{x\} \cup ((x-a, x+a) \cap \mathbb{Q}), a > 0.$$

Доведіть, що $(\mathbb{R}, \tau)$ сепарабельний, проте містить несепарабельний підпростір.

Підмножина A топологічного простору X називається ніде не щільною, якщо вона не щільна в жодній непорожній відкритій множині в X. Іншими словами, підмножина A ніде не щільна, якщо ЇЇ ЗАМИКАННЯ не містить жодної відкритої множини. Для випадку метричного простору означення можна переформулювати так: підмножина A ніде не щільна, якщо $\forall x_0 \in X$, $r_0 > 0$ $\exists x_1 \in X$, $r_1 > 0$, такі що $\overline{B}(x_1, r_1) \subset \overline{B}(x_0, r_0)$ та $\overline{B}(x_1, r_1) \cap \overline{A} = \emptyset$.

Типові приклади ніде не щільних множин: канторова множина на відрізку, спрямна крива на площині.

Потрібно звернути увагу, що, говорячи про ніде не щільну множину, необхідно зазначати, як підмножину якого простору її розглядають. Скажімо, відрізок буде ніде не щільною множиною на площині, але не на прямій; $A = \{1\}$ ніде не щільна на осі, проте у множині натуральних чисел та сама A буде відкритою.

Теорема Бера (R. Baire). Повний метричний простір X не можна покрити зліченним числом своїх ніде не щільних підмножин.

Доведення Нехай $A_1, A_2, \ldots$ – ніде не щільні підмножини в X. Нам потрібно довести, що $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \neq X$. Оскільки A_1 ніде не щільна в X, існує замкнена куля $B_1 = \overline{B}(x_1, r_1)$ з $0 < r_1 < 1/2$, яка не перетинає A_1. У свою чергу, A_2 ніде не щільна, отже, існує куля $B_2 = \overline{B}(x_2, r_2)$, $0 < r_1 < 1/4$, яка міститься в B_1 і не перетинається з A_2. Продовжуючи це міркування, отримаємо спадну послідовність замкнених куль B_n, з радіусами, що прямують до нуля, причому кожна B_n не перетинається з відповідним A_n. Згідно з принципом вкладених множин, у множин B_n є спільна точка. Позначимо цю точку x. Оскільки $x \in B_n$ при будь-якому n, а B_n не перетинаються з A_n, отримуємо, що x не належить до жодного з A_n. $\square$

У зв'язку з доведеною теоремою Бер ввів таку термінологію. Підмножина A топологічного простору X називається множиною першої категорії в X, якщо A можна зобразити як зліченне об'єднання ніде не щільних в X підмножин. Підмножина в X, яка не є множиною першої категорії, називається множиною другої категорії в X. У цих термінах теорема Бера стверджує, що повний метричний простір – множина другої категорії в собі.

Вправи

2.9 Перевірте, що доповнення до щільної відкритої множини – це ніде не щільна множина.

2.10 Проаналізуйте доведення теореми Бера, і доведіть такий факт: якщо $A_1, A_2, \ldots$ – ніде не щільні підмножини повного метричного простору X, то $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ не містить жодної замкненої кулі простору X.

2.11 Покажіть, що будь-яка відкрита підмножина повного метричного простору X – це множина другої категорії в X.

2.12 Доведіть, що для неповного метричного простору твердження теореми Бера може не виконуватися.

2.13 Підмножина множини першої категорії знову має першу категорію; скінченне або зліченне об'єднання множин першої категорії – множина першої категорії.

2.14 Нехай нескінченно диференційовна функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ має таку властивість: $\forall t \in \mathbb{R}$ існує такий номер $n = n(t)$, що $f^{(n)}(t) = 0$. Використовуючи множини $A_n = \{ \ t \in \mathbb{R} : f^{(n)}(t) = 0 \ \}$ і теорему Бера, легко довести, що на деякому відрізку $[a, b]$ функція f – поліном. Завдання – довести, що функція f – поліном на всій осі. (Ernest Corominas and Ferran Sunyer i Balaguer, 1954, см. Ralph P. Boas, Jr., A primer of real functions, Chapter 1, Section 10).