Теорія міри та інтеграла
Тема 1: метричні та псевдометричні простори
Лекція 1

Володимир Кадець

ХНУ ім. В.Н.Каразіна

Харків, 2020

Зміст лекції

Інформація про курс

– Назва дисципліни: Теорія міри та інтеграла.
– Лектор: Кадець Володимир Михайлович.
– Тривалість курсу: один семестр, наприкінці іспит.

Основна література:

Кадець В.М. Курс функціонального аналізу та теорії міри. Підручник. – Львів, 2012. – 590 с.

Допоміжна література:

Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. – М.: Наука, 1974. – 480 с.

Мотивація

Переваги та недоліки інтеграла Рімана. Приклад: функція Діріхле не інтегровна за Ріманом, але вона є границею обмеженої послідовності інтегровних функцій.
(Подробиці на “дошці”).

Нехай X – непорожня множина. Функція двох змінних $\rho\colon X \times X \to \mathbb{R}^+$ називається псевдометрикою на множині X, якщо вона має такі властивості:

1. $\rho(x, x) = 0$;
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (симетричність);
3. $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$ (нерівність трикутника).

Перераховані вище властивості називаються аксіомами псевдометрики. Для величини $\rho(x, y)$ використовують ще термін відстань (або дистанція) між елементами x і y.

Псевдометрику називають метрикою, якщо вона задовольняє додаткову аксіому невиродженості

4. якщо $\rho(x, y) = 0$, то $x = y$.

Множина із введеною на ній (псевдо)метрикою називається (псевдо)метричним простором.

Оцінка знизу довжини сторони трикутника:

$$\rho(x, z) \geqslant |\rho(x, y) - \rho(z, y)|\,.$$

Цю оцінку часто використовують у формі

$$|\rho(x, y) - \rho(z, y)| \leqslant \rho(x, z).$$

Нерівність многокутника:

$$\rho(x_1, x_n) \leqslant \rho(x_1, x_2) + \rho(x_2, x_3) + \ldots + \rho(x_{n-1}, x_n).$$

Найвідоміший приклад – це множина $\mathbb{R}$ всіх дійсних чисел з метрикою $\rho(x, y) = |x - y|$.

Ще один відомий приклад – це множина $\mathbb{R}^n$ всіх рядків дійсних чисел довжини n (інша назва – дійсних векторів з n координатами) з метрикою

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^2},$$

де x_k, y_k – це координати елементів x, y.

Підмножина простору X, наділена (псевдо)метрикою з X, називається підпростором (псевдо)метричного простору.

Таким чином, розглядаючи підпростори в $\mathbb{R}$ або $\mathbb{R}^n$, отримуємо величезну кількість інших прикладів.

В математичному аналізі мав розглядатися ще один приклад – простір $C(K)$ всіх неперевних дійснозначних функцій з метрикою

$$\rho(x, y) = \max_{t \in K} |x(t) - y(t)|.$$

У випадку $K = [a, b]$ відповідний простір $C(K)$ позначається $C[a, b]$.

На будь-якій множині X можна розглянути дискретну метрику: $\rho(x, x) = 0$, а якщо $x \neq y$ $\rho(x, y) = 1$.

Множина X з дискретною метрикою називається дискретним метричним простором.

Псевдометрики, які не є метриками

Обговорити

Нехай X – метричний простір, $x_0 \in X$, $r > 0$. Символами $B_X(x_0, r)$, $S_X(x_0, r)$ та $\overline{B}_X(x_0, r)$ позначаються відповідно відкрита куля, сфера та замкнена куля радіуса r з центром в x_0:

$$B_X(x_0, r) = \{x \in X : \rho(x, x_0) < r\},$$
$$S_X(x_0, r) = \{x \in X : \rho(x, x_0) = r\},$$
$$\overline{B}_X(x_0, r) = \{x \in X : \rho(x, x_0) \leqslant r\}.$$

Якщо зрозуміло, про який простір йде мова, позначення скорочують до $B(x_0, r)$, $S(x_0, r)$ та $\overline{B}(x_0, r)$.

Приклади

Обговорити

Вправи

1.1 Нехай $r_1 < r_2$, $x_0 \in X$. Тоді $\overline{B}(x_0, r_1) \subset \overline{B}(x_0, r_2)$. Чи повинне це вкладення бути строгим?

1.2 Довести, що якщо $\overline{B}(x_1, r_1) \cap \overline{B}(x_2, r_2) \neq \emptyset$, то $\rho(x_1, x_2) \leqslant r_1 + r_2$. Чи має місце зворотнє твердження?

1.3 На прикладі метричного простору, який складається з трьох точок $\{0, 1, 2\}$ з природною метрикою, доведіть, що замкнена куля більшого радіуса може строго міститися у замкненій кулі меншого радіуса (звичайно, центри куль при цьому збігатись не повинні). Яким може бути співвідношення радіусів у строго вкладених замкнених куль в метричному просторі?

Топологія (псевдо)метричного простору X задається за допомогою бази околів кожної точки. Таку базу формують кулі довільного радіусу з центрами в даній точці.

Докладніше: нехай $A \subset X$, $x \in A$. Елемент x називається внутрішньою точкою множини A, якщо існує таке $r > 0$, що $B(x, r) \subset A$. Внутрішністю множини A називається множина $\overset{o}{A}$ всіх внутрішніх точок множини A. Підмножина A простору X називається відкритою, якщо $\overset{o}{A} = A$; іншими словами, якщо разом з будь-якою своєю точкою множина A містить деяку кулю з центром у цій точці.

Послідовність (x_n) елементів (псевдо)метричного простору X збігається до елемента $x \in X$, якщо $\rho(x_n, x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Так само, як і в аналізі, для збіжності використовуються позначення $x_n \to 0$, $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, або $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

Теорема. Нехай $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ та $\lim_{n\to\infty} y_n = y$. Тоді $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = \rho(x, y)$.

Вправи.

1.4 У метричному просторі в збіжної послідовності лише одна границя: якщо $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ та $\lim_{n\to\infty} x_n = y$, то $x = y$.

1.5 Доведіть, що якщо у псевдометричному просторі в кожної збіжної послідовності лише одна границя, то цей простір – метричний.

Оскільки псевдометричний простір є водночас і топологічним, у псевдометричних просторах визначені всі основні топологічні поняття. Особливістю ж псевдометричних просторів є можливість еквівалентного означення топологічних понять через збіжність послідовностей.

Нехай A – підмножина псевдометричного простору X. Точка $x \in X$ називається точкою замикання множини A, якщо існує послідовність елементів $x_n \in A$, збіжна до x. Замиканням підмножини A називається множина $\overline{A}$ всіх точок замикання множини A. Підмножина A простору X називається замкненою, якщо $\overline{A} = A$; іншими словами, якщо містить усі свої точки замикання. Підмножина $A \subset X$ буде відкритою, якщо її доповнення замкнене.

Важливе зауваження

Топологічні властивості множини залежать від того, в якому просторі ми цю множину розглядаємо. Скажімо, множина $A = [0, 1)$ в просторі $X_1 = [0, \infty)$ зі звичайною топологією буде відкритою, в просторі $X_2 = (-\infty, 1)$ буде замкненою, а в просторі $X_3 = (-\infty, \infty)$ не буде ні відкритою, ні замкненою.

Нехай X, Y – (псевдо)метричні простори. Функція $f\colon X \to Y$ називається неперервною, якщо вона переводить збіжні послідовності у збіжні:

$$\forall (x_n), x \in X \ (x_n \to x) \Rightarrow (f(x_n) \to f(x)) .$$

Функція $f\colon X \to Y$ задовольняє умову Ліпшиця з константою $C > 0$ якщо для довільних $x, y \in X$ має місце нерівність

$$\rho(f(x), f(y)) \leqslant C\rho(x, y).$$

Теорема. З умови Ліпшиця випливає неперервність.

Відстанню від точки $x \in X$ до непорожньої підмножини $A \subset X$ називається число

$$\rho(x, A) = \inf_{a \in A} \rho(x, a).$$

Зазначимо, що $x \in \overline{A}$ тоді і тільки тоді, коли $\rho(x, A) = 0$.
Теорема. Функція $f(x) = \rho(x, A)$ задовольняє умову Ліпшиця з константою 1.
Доведення. За нерівністю трикутника

$$f(x) = \inf_{a \in A} \rho(x, a) \leqslant \inf_{a \in A} \rho(y, a) + \rho(x, y) = f(y) + \rho(x, y).$$

Тобто, $f(x) - f(y) \leqslant \rho(x, y)$. З огляду на рівноправність точок x і y так само маємо $f(y) - f(x) \leqslant \rho(x, y)$. Таким чином, для будь-яких $x, y \in X$

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \rho(x, y).$$