

Домашня работа 2.

1. Для модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза

$$q_t - q_{xxx} + 6q^2q_x = 0$$

пара Лакса имеет вид

$$\begin{aligned}\psi_x &= ik\sigma_3\psi + \begin{pmatrix} 0 & q \\ q & 0 \end{pmatrix} \psi, \\ \psi_t &= -4ik^3\sigma_3\psi + \tilde{Q}\psi\end{aligned}$$

Как выглядит “таблица знаков” (signature table)?

2. Привести пару Лакса

$$\begin{aligned}\psi_{xx} &= \frac{1}{4}\psi + \lambda(m + \omega)\psi, \\ \psi_t &= \left(\frac{1}{2\lambda} - u\right)\psi_x + \frac{1}{2}u_x\psi,\end{aligned}$$

для уравнения Камассы-Хольма

$$u_t - u_{txx} + 2u_x + 3uu_x = 2u_xu_{xx} + uu_{xxx}, \quad m - u - u_{xx}$$

к стандартному виду (системы дифференциальных уравнений первого порядка).

3. Как выглядит “таблица знаков” (signature table) для задачи Римана-Гильберта, соответствующей уравнению Камассы-Хольма?
4. Для уравнения короткого импульса (Short Pulse Equation)

$$u_{xt} = u + \frac{1}{6}(u^3)_{xx}$$

пара Лакса имеет вид:

$$\begin{aligned}\Phi_x &= U\Phi \\ \Phi_t &= V\Phi,\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}U &= \begin{pmatrix} \lambda & \lambda u_x \\ \lambda u_x & -\lambda \end{pmatrix}, \\ V &= \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{2}u^2 + \frac{1}{4\lambda} & \frac{\lambda}{2}u^2u_x - \frac{1}{2}u \\ \frac{\lambda}{2}u^2u_x + \frac{1}{2}u & -\frac{\lambda}{2}u^2 - \frac{1}{4\lambda} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Привести ее к стандартному виду. Как выглядит таблица знаков?