

**План лекцій з курсу “Диференціальна геометрія многовидів”
(змішана форма навчання)**

№ з/п	Назва теми	Зміст
1	Гладкі многовиди та відображення	Многовид, відображення переходу, гладкий многовид, гладка структура. Гладке відображення, діфеоморфізм. Приклади. Добутки і відкриті підмножини гладких многовидів як гладкі многовиди.
2	Дотичний простір	Дотичні вектори і дотичний простір гладкого многовиду. Гладкі функції Урисона. Дотичний вектор і регулярність кривої. Диференціал і ранг гладкого відображення. Критичні точки. Субмерсії, занурення та вкладення. Теореми про занурення і вкладення. Підмноговиди.
3	Дотичне розшарування і векторні поля	Дотичне розшарування. Векторні поля і їхні властивості. Векторне поле як диференціювання. Дужка Лі і її властивості. Інтегрування векторних полів.
4	Тензори і тензорні поля	Тензори. Тензори в точці гладкого многовиду. Тензорні поля. Приклади. Інтерпретація тензорних полів як відображень від векторних полів.
5	Диференціальні форми	Форми на многовиді, симетричні і зовнішні форми. Кодиференціал. Диференціал зовнішньої форми. Внутрішній добуток. Векторний аналіз на многовидах.
6	Інтегрування	Орієнтовність гладких многовидів. Розбиття одиниці. Кубовні множини. Інтегрування форм на орієнтовних многовидах.
7	Теорема Стокса	Області з регулярною межею. Теорема Стокса і її наслідки. Многовиди з межею і теорема Стокса для них.
8	Ріманові многовиди	Ріманова метрика, ріманів многовид. Перша фундаментальна форма. Приклади. Довжина кривої на рімановому многовиді і її властивості. Кут між кривими. Форма об'єму і об'єм області. Ізометрії і локальні ізометрії. Конформні відображення.

9	Внутрішні метрики	Функціонал довжини на топологічному просторі. Внутрішня метрика. Найкоротші. Внутрішня метрика, що породжена рімановою метрикою. Фінслерова метрика. Геодезичні на рімановому многовиді. Лагранжіан і варіаційна задача на многовиді. Рівняння Ейлера-Лагранжа. Геодезичні і найкоротші.
10	Повнота	Повнота ріманового многовиду. Довжина кривої в метричному просторі. Теорема Арцела-Асколі для кривих. Обмежена компактність. Достатні умови існування найкоротших. Теорема Хопфа-Рінова-Кон-Фоссена. Геодезична повнота. Випадок ріманового многовиду.
11	Зв'язність і кривина ріманового многовиду	Афінна зв'язність. Коваріантне диференціювання форм. Ріманова зв'язність (Леві-Чівіта). Формула Кошуля. Геодезичні афінної зв'язності та їхні властивості. Оператор кривини, тензор Рімана, секційна кривина, геометричний сенс. Кривина Річчі та скалярна кривина. Ейнштейнові многовиди.
12	Простори постійної кривини	Многовиди постійної секційної кривини. Критерії і приклади. Теорема Шура. Теореми Рімана і Картана-Кіллінга. Теорема Мостова про жорсткість.
13	Варіаційна теорія геодезичних	Друга варіація довжини геодезичної. Теорема Майерса. Теорема Сінга. Поля Якобі та спряжені точки. Поля Якобі на многовидах постійної секційної кривини. Теорема Якобі та індексна форма геодезичної.
14	Ріманова геометрія "в цілому"	Експоненціальне відображення. Простори Адамара та теорема Картана-Адамара. Теорема Прейсмана. Теорема про сферу. Теорема про душу.
15	Теореми порівняння та метричні простори обмеженої кривини	Теореми Рауха. Теорема порівняння трикутників Топоногова. Простори обмеженої знизу і зверху кривини (Картана-Александрова-Топоногова). Критерії. Теореми про глобалізацію. Узагальнення теорема Картана-Адамара та інших теорем ріманової геометрії.