Факультет математики і інформатики ХНУ ім. В.Н.Каразіна

В. М. Кадець

Елементи теорії банахових алгебр

Матеріали для студентів курсу
"Додаткові розділи функціонального аналізу"
що навчаються дистанційно під час карантину

Цей текст є компіляцією матеріалу, що розпорошений по різним розділам базового підручнику з функціонального аналізу [Kad], а також матеріалу про банахові алгебри з підручнику [Rud] спрощеного та переробленого для уніфікації позначень. Саме до класичної книжки Рудіна [Rud], дуже вдалої за підбором матеріалу, ми відсилаємо читача, що зацікавлений у поглибленому вивченні предмету.

Система позначень в цьому тексті та ж сама, що й в [Kad], тому тут ми її не наводимо.

Харків, квітень–травень 2020

Зміст

Розділ 1. Елементи спектральної теорії **1**
1.1. Банахові алгебри: аксіоматика і приклади 1
1.2. Оборотність в банахових алгебрах 3
1.3. Спектр 5
1.4. Резольвента і непорожність спектра 6

Розділ 2. Фактор-простори та фактор-алгебри **11**
2.1. Фактор-простір лінійного простору 11
2.2. Ін'єктивізація лінійного оператора 12
2.3. Гіперпідпростори і гіперплощини 12
2.4. Фактор-простори нормованого простору 14
2.5. Фактор-простори банахового простору 16
2.6. Ідеали 17
2.7. Фактор-алгебри 18

Розділ 3. Комутативні банахові алгебри **19**
3.1. Максимальні ідеали 19
3.2. Комплексні гомоморфізми та оборотність 20
3.3. Застосування до рядів Фур'є 22

Розділ 4. Перетворення Гельфанда **25**
4.1. Топологія поточкової збіжності 25
4.2. Слабка із зірочкою топологія. Теорема Алаоглу 30
4.3. Компакт Гельфанда банахової алгебри 31

Розділ 5. Теорема Стоуна–Вейерштраса про підалгебри в $C(K)$ **35**
5.2. Теорема Крейна–Мільмана 38
5.3. Теорема Стоуна-Вейєрштрасса 41

Література **44**

Розділ 1. Елементи спектральної теорії

1.1. Банахові алгебри: аксіоматика і приклади

Комплексний банахів простір $\mathbf{A}$ з визначеною на ньому додатковою операцією множення елементів називається *банаховою алгеброю*, якщо множення задовольняє такі аксіоми:

- $a(bc) = (ab)c$ для будь-яких $a, b, c \in \mathbf{A}$ (асоціативність);
- $a(\lambda b) = (\lambda a)b = \lambda(ab)$ для будь-яких $a, b \in \mathbf{A}$ і будь-якого скаляра λ;
- $a(b + c) = ab + ac$ і $(a + b)c = ac + bc$ (розподільний закон);
- $\|ab\| \leqslant \|a\| \cdot \|b\|$ для будь-яких $a, b \in \mathbf{A}$ (мультиплікативна нерівність трикутника);
- існує такий елемент $e \in \mathbf{A}$ (цей елемент називається одиничним елементом алгебри $\mathbf{A}$), що множення на e не змінює елемента: $ea = ae = a$ для будь-якого $a \in \mathbf{A}$;
- $\|e\| = 1$.

Природно визначається поняття *підалгебри* (замкнений лінійний підпростір $X \subset \mathbf{A}$, стійкий щодо операції множення, і який містить елемент e) й ізоморфізму банахових алгебр (до означення ізоморфізму банахових просторів додається умова $T(ab) = T(a)T(b)$, а з неї і бієктивності випливає, що одиничний елемент переводиться в одиничний, а обернений – в обернений).

Наведемо кілька прикладів. Перевірку аксіом банахової алгебри в цих прикладах залишаємо читачеві як вправу.

Приклади

1. Простір $C(K)$ наділений звичайним множенням функцій. Одиничним елементом тут є функція, яка тотожно дорівнює одиниці.

2. Простір $L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ зі звичайним множенням.

3. Простір ℓ_∞ з покоординатним множенням.

4. Простір ℓ_1, де як множення розглядається згортка послідовностей. Нагадаємо, що для $x, y \in \ell_1$, $x = (x_0, x_1, ...)$, $y = (y_0, y_1, ...)$ згорткою $x * y$ називається вектор $((x * y)_0, (x * y)_1, ..., (x * y)_n, ...)$, координати якого обчислюються за правилом $(x * y)_n = \sum_{k=0}^{n} x_k y_{n-k}$. Одиничним елементом є вектор $e = (1, 0, 0, ...)$.

5. Простір Вінера W, що складається з тих функцій $f \in C[0, 2\pi]$, коефіцієнти Фур'є яких задовольняють умову $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}_n| < \infty$. На цьому просторі розглядається звичайне множення, а норма задається формулою $\|f\| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|\hat{f}_n\right|$.

6. Алгебра $L(X)$ неперервних лінійних операторів у банаховому просторі X. Роль множення тут відіграє композиція операторів, а одиничним елементом є одиничний оператор.

7. Групова алгебра компактної топологічної групи G. Нехай μ – міра Гаара для G. Груповою алгеброю називається банаховий простір $L_1(G, \mu)$ з операцією згортки $*$ у якості множення:

$$(f * g)(t) = \int_G f(\tau) g(\tau^{-1} t) d\tau.$$

У прикладах 1–5 множення комутативне: $ab = ba$ для довільних елементів $a, b \in \mathbf{A}$. Проте в аксіоми алгебри комутативність множення не включена. Більше того, комутативності немає у найважливішому для застосувань прикладі – алгебрі операторів $L(X)$.

Так само, як і для чисел, для елементів банахової алгебри має місце теорема про границю добутку.

Теорема. *Множення в банаховій алгебрі неперервне як функція двох змінних. Іншими словами, якщо $a_n \to a$, $b_n \to b$ $(n \to \infty)$, то $a_n b_n \to ab$ $(n \to \infty)$.*

Доведення.

$$\|a_n b_n - ab\| \leqslant \|a_n b_n - a_n b\| + \|a_n b - ab\| \leqslant$$
$$\leqslant \|a_n\| \cdot \|b_n - b\| + \|a_n - a\| \cdot \|b\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \qquad \square$$

Вправи

1. У кожній банаховій алгебрі є тільки один одиничний елемент.

2. Простори $L_2[0, 1]$ і $L_1[0, 1]$ не утворюють банахових алгебр щодо операції множення функцій.

3. Простори ℓ_2 і ℓ_1 не утворюють банахових алгебр щодо операції покоординатного множення векторів.

4. Простір W, описаний у прикладі 5, як банахів простір ізоморфний простору ℓ_1. Як потрібно задати операцію множення на ℓ_1, щоб ℓ_1, наділений цією операцією, був ізоморфний W і як банахова алгебра?

5. Для кожного $a \in \mathbf{A}$ означимо оператор $T_a \colon \mathbf{A} \to \mathbf{A}$ формулою $T_a(b) = ab$. Перевірити, що T_a – неперервний лінійний оператор і $\|T_a\| = \|a\|$.

6. Кожна банахова алгебра $\mathbf{A}$ ізоморфна деякій підалгебрі алгебри $L(\mathbf{A})$. Тобто алгебра операторів – це в деякому сенсі універсальний приклад банахової алгебри.

7. Наведіть приклад двох операторів в $\mathbb{R}^2$, що не комутують.

1.2. Оборотність в банахових алгебрах

Елемент a банахової алгебри $\mathbf{A}$ називається *оборотним*, якщо існує такий елемент $a^{-1} \in \mathbf{A}$, який називається *оберненим елементом*, що $a^{-1}a = aa^{-1} = e$.

Якщо обернений елемент існує, то він єдиний. Справді, якщо крім a^{-1} деякий елемент $b \in \mathbf{A}$ також буде оберненим до a, то

$$b = be = baa^{-1} = ea^{-1} = a^{-1}.$$

Зазначимо, що якщо елементи $a, b \in \mathbf{A}$ оборотні, то їх добуток оборотний, і $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

Лема 1.2.1. *Якщо для елементів $a, b \in \mathbf{A}$ обидва їхні добутки ab і ba оборотні, то й самі елементи a і b оборотні. Зокрема, якщо елементи $a, b \in \mathbf{A}$ комутують і їхній добуток ab оборотний, то a і b оборотні.*

Доведення. З огляду на симетрію умови достатньо перевірити оборотність елемента a. Покажемо, що елемент $g = b(ab)^{-1}$ є оборотним до a. По-перше, $ag = ab(ab)^{-1} = e$. З іншого боку,

$$ga = b(ab)^{-1}a = b(ab)^{-1}aba(ba)^{-1} = ba(ba)^{-1} = e. \qquad \square$$

Лема 1.2.2 (про мале збурення одиничного елемента)**.** *Нехай елемент a банахової алгебри $\mathbf{A}$ задовольняє умову $\|a\| < 1$. Тоді елемент $e - a$ оборотний, причому виконується така формула обернення:*

$$(e - a)^{-1} = e + a + a^2 + ... + a^n + ...$$

Доведення. Доведемо формулу обернення. Оскільки $\|a^n\| \leqslant \|a\|^n$, то ряд $e + a + a^2 + ... + a^n + ...$ мажорується збіжною геометричною прогресією і, отже, збіжний до деякого елемента $b \in \mathbf{A}$. Нам залишилось перевірити, що $b(e-a) = (e-a)b = e$. Обидві потрібні рівності отримуються простим розкриттям дужок:

$$(e + a + a^2 + ...)\,(e - a) = (e + a + a^2 + ...) - (a + a^2 + ...) = e;$$

$$(e - a)\,(e + a + a^2 + ...) = (e + a + a^2 + ...) - (a + a^2 + ...) = e. \qquad \square$$

Формула обернення – це природний аналог формули суми геометричної прогресії. Водночас при використанні подібних аналогій потрібно бути обережним: на відміну від чисел елементи алгебри можуть не комутувати. Можливі й інші ускладнення, пов'язані з необоротністю, неможливістю виразити норму добутку через норми співмножників і т. д.

Теорема 1.2.3 (Теорема про мале збурення оборотного елемента)**.** *Нехай $a, b \in \mathbf{A}$, а оборотний і $\|b\| < \frac{1}{\|a^{-1}\|}$. Тоді елемент $a - b$ також оборотний. Іншими словами, якщо a оборотний, то ціла куля радіуса $r = \frac{1}{\|a^{-1}\|}$ з центром в a складається з оборотних елементів.*

Доведення. Запишемо елемент $a - b$ у вигляді добутку: $a - b = a(e - a^{-1}b)$. Перший співмножник оборотний за умовою, а другий задовольняє вимоги леми 2:

$$\left\|a^{-1}b\right\| \leqslant \left\|a^{-1}\right\| \cdot \|b\| < 1.$$

Тому другий співмножник також оборотний, що дає нам потрібну оборотність елемента $a - b$. □

Наслідок. *Множина усіх оборотних елементів банахової алгебри **A** відкрита в **A**, а необоротних, відповідно, замкнена.*

Теорема 1.2.4. *Нехай $a \in \mathbf{A}$ – оборотний елемент і $a_n \to a$ $(n \to \infty)$. Тоді $a_n^{-1} \to a^{-1}$ $(n \to \infty)$. Іншими словами, операція переходу до оберненого елемента неперервна в своїй області визначення.*

Доведення. Множенням на a^{-1} задача зводиться до випадку $a = e$. Отож нехай $a_n \to e$ $(n \to \infty)$. Введемо позначення $e - a_n = b_n$. Зафіксуємо номер N, починаючи з якого $\|b_n\| < \frac{1}{2}$. Для $n > N$ маємо:

$$\left\|a_n^{-1} - e\right\| = \left\|(e - b_n)^{-1} - e\right\| = \left\|(e + b_n + b_n^2 + ...) - e\right\| = \left\|b_n + b_n^2 + ...\right\| \leqslant$$

$$\leqslant \|b_n\| \cdot \left\|e + b_n + b_n^2 + ...\right\| \leqslant \|b_n\| \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ...\right) = 2\|b_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \qquad \square$$

Вправи

1. Якщо тільки ряд $e + a + a^2 + ... + a^n + ...$ збігається, має місце формула обернення: $(e - a)^{-1} = e + a + a^2 + ... + a^n + ...$

2. На прикладі оператора в $\mathbb{C}^2$ з матрицею вигляду $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ M & 0 \end{pmatrix}$ покажіть, що у двовимірному евклідовому просторі $\mathbb{C}^2$ існують оператори T з як завгодно великими нормами, для яких, тим не менше, ряд $I + T + T^2 + ...$ збігається. Цим буде показано, що на відміну від скалярного випадку формулу обернення можна застосувати і для деяких елементів з великими нормами.

3. В $L(\ell_2)$ множина всіх необоротних операторів має непорожню внутрішність.

4. В $L(\ell_2)$ множина всіх необоротних операторів незамкнена в сенсі поточкової збіжності.

5. Якщо простір X скінченновимірний, то множина всіх необоротних операторів має порожню внутрішність в $L(X)$.

6. Множина $A(\mathbb{T})$ тих неперервних функцій на одиничному колі $\mathbb{T}$ в комплексній площині, що продовжуються до неперервних аналітичних у внутрішності кола функцій – це підалгебра банахової алгебри $C(\mathbb{T})$ всіх неперервних функцій на $\mathbb{T}$.

7. Наведіть приклад функції $f \in A(\mathbb{T})$, для якої $\frac{1}{f} \in C(\mathbb{T}) \setminus A(\mathbb{T})$.

Цим буде показано, що елемент може бути необоротним в підалгебрі, але при цьому в ширшій алгебрі вже бути оборотним.

8. Наведіть приклад функції $f \in C[0,1]$, яка не оборотна не тільки в $C[0,1]$, але й у жодній ширшій алгебрі.

9. Нехай $a \in \mathbf{A}$ і оператор T_a з вправи 5 п. 1.1 необмежений знизу. Тоді елемент a необоротний не тільки в $\mathbf{A}$, але й в будь-якій ширшій банаховій алгебрі.

10. Спираючись на попередню вправу покажіть, що якщо елемент $f \in C[0,1]$ необоротний в $C[0,1]$, то він необоротний і в будь-якій ширшій банаховій алгебрі.

11. Спираючись на теорему про мале збурення оборотного елемента, доведіть, що якщо a_n – оборотні елементи, $a_n \to a$ $n \to \infty)$ і $\sup_n \|a_n^{-1}\| < \infty$, то a також оборотний.

Елемент $a \in \mathbf{A}$ називається *оборотним справа*, якщо існує елемент $b \in \mathbf{A}$ (який називається *правим оберненим*), для якого $ab = e$. Аналогічно, $a \in \mathbf{A}$ називається *оборотним зліва*, якщо існує елемент $d \in \mathbf{A}$ (який називається *лівим оберненим*), для якого $da = e$.

12. Якщо елемент $a \in \mathbf{A}$ оборотний і зліва, і справа, то він оборотний, і його правий обернений і лівий обернений збігаються з a^{-1}.

13. На прикладі оператора $S_r \in L(\ell_2)$ зсуву вправо $S_r(x_1, x_2, ...) = (0, x_1, x_2, ...)$ покажіть, що оператор може бути оборотним зліва, але необоротним справа і що лівий обернений не обов'язково єдиний.

14. На прикладі оператора $S_l \in L(\ell_2)$ зсуву вліво $S_l(x_1, x_2, ...) = (x_2, x_3, ...)$ покажіть, що оператор може бути оборотним справа, але необоротним зліва, і що правий обернений не обов'язково єдиний.

1.3. Спектр

Означення. Комплексне число λ називається *точкою спектра* елемента $a \in \mathbf{A}$, якщо елемент $a - \lambda e$ необоротний. Множина таких чисел називається *спектром* елемента a і позначається $\sigma(a)$. Комплексне число, яке не належить до спектра елемента a, називається *регулярною точкою* елемента a.

Теорема 1.3.1. *Спектр будь-якого елемента $a \in \mathbf{A}$ має такі властивості:*

- *$\sigma(a)$ замкнений в $\mathbf{A}$;*
- *спектр елемента a обмежений і лежить в замкненому крузі з центром в 0 і радіусом $\|a\|$.*

Доведення. Замкненість. Нехай $\lambda_n \in \sigma(a)$, $\lambda_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda$. Тоді елементи $a - \lambda_n e$ необоротні, і їхня границя $a - \lambda e$ також необоротна з огляду на замкненість множини необоротних елементів банахової алгебри (наслідок з теореми 1 п. 1.2). Тобто $\lambda \in \sigma(a)$, і замкненість спектра доведено.

Обмеженість. Нехай $|\lambda| > \|a\|$. Тоді $a - \lambda e = -\lambda(e - \frac{1}{\lambda}a)$, а елемент $e - \frac{1}{\lambda}a$ оборотний за лемою про мале збурення одиничного елемента. Отже, всі комплексні числа, більші за модулем за норму елемента a, – це регулярні точки, відповідно, всі точки спектра не перевищують $\|a\|$ за модулем. □

Вправи

1. Доведіть, що спектр будь-якого елемента $f \in C[0,1]$ збігається з множиною значень функції f.

2. Дайте опис спектра елемента алгебри $L_\infty[0,1]$.

Спектральним радіусом елемента a називається величина

$$r(a) = \varlimsup_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n}.$$

Доведіть, що:

3. $\sigma(a) \subset r(a)D \subset \|a\|\, D$, де D – замкнений круг одиничного радіусу з центром в нулі у комплексній площині (для цього уточніть лему про мале збурення одиничного елемента).

4. У формулі для спектрального радіуса верхню границю можна замінити просто границею.

5. $r(a)$ – це мінімальний радіус круга з центром в нулі, в якому лежить спектр елемента a.

6. $\sigma(a + te) = \sigma(a) + t$; $\sigma(tA) = t\sigma(A)$.

1.4. Резольвента і непорожність спектра

Резольвентою елемента $a \in \mathbf{A}$ називається функція $R_a \colon \mathbb{C}\backslash\sigma(a) \to \mathbf{A}$, яка визначається формулою $R_a(\lambda) = (a - \lambda e)^{-1}$.

Властивості резольвенти: 1. Основна тотожність для резольвенти:

$$R_a(\lambda) - R_a(\mu) = (\lambda - \mu)R_a(\lambda)R_a(\mu).$$

Доведення.

$$(\lambda-\mu)(a-\lambda e)^{-1}(a-\mu e)^{-1} =$$
$$= (a-\lambda e)^{-1}\left((a-\mu e)-(a-\lambda e)\right)(a-\mu e)^{-1} = (a-\lambda e)^{-1}-(a-\mu e)^{-1}. \quad \square$$

2. Комутативність: $R_a(\lambda)R_a(\mu) = R_a(\mu)R_a(\lambda)$ – очевидним чином випливає з попередньої властивості.

3. Неперервність у кожній точці λ області визначення. Випливає з неперервності операцій додавання, множення і переходу до оберненого елемента (з приводу останнього – див. теорему 2 п. 1.2).

4. Резольвента прямує до нуля на нескінченності.

Доведення. Прямування $\lambda \to \infty$ коректне, бо спектр – обмежена множина; у доведенні ми будемо вважати $|\lambda| > 2||a||$. Перепишемо вираз для резольвенти:

$$R_a(\lambda) = -\lambda^{-1}\left(e-\frac{a}{\lambda}\right)^{-1}.$$

Оскільки $|\lambda| > 2||a||$, то $\|\lambda^{-1}a\| < \frac{1}{2}$, і ми можемо застосувати до $e-\lambda^{-1}a$ формулу обернення:

$$R_a(\lambda) = -\lambda^{-1}(e+\lambda^{-1}a+\lambda^{-2}a^2+\ldots).$$

Переходячи до норм і використовуючи нерівність трикутника, одержимо:

$$||\,R_a(\lambda)\,|| < \frac{1}{|\lambda|}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots\right) = \frac{2}{|\lambda|}.$$

Останній вираз, вочевидь, прямує до 0 при $\lambda \to \infty$. $\square$

Означення. Нехай D – відкрита множина на комплексній площині, E – банахів простір. Функція $F\colon D \to E$ називається *диференційовною в точці* $\lambda_0 \in D$, якщо існує

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}\frac{F(\lambda)-F(\lambda_0)}{\lambda-\lambda_0}.$$

Ця границя, як і в скалярному випадку, називається похідною функції F в точці λ_0 і позначається $F'(\lambda_0)$. Функція називається *аналітичною* в області D, якщо вона диференційовна в кожній точці області.

Твердження. *Резольвента аналітична в своїй області визначення.*

Доведення. Скористаємось основною тотожністю для резольвенти і обчислимо потрібну границю:

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}\frac{R_a(\lambda)-R(\lambda_0)}{\lambda-\lambda_0} = \lim_{\lambda\to\lambda_0}R_a(\lambda)R_a(\lambda_0) = (R_a(\lambda_0))^2. \quad \square$$

Теорема 1.4.1 (Теорема Ліувілля для цілих функцій зі значеннями в банаховому просторі)**.** *Якщо функція* $F\colon \mathbb{C} \to E$ *аналітична і обмежена, то вона стала.*

Доведення. Нехай $F(z_1) \neq F(z_2)$ для деяких точок $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. За теоремою Гана–Банаха, існує такий функціонал $f \in E^*$, що $f(F(z_1)) \neq f(F(z_2))$. Розглянемо допоміжну функцію $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $g(z) = f(F(z))$. На підставі неперервності функціонал f можна переставляти зі знаком границі, тому функція g аналітична. Крім того,

$$\sup_{z\in\mathbb{C}} |g(z)| \leqslant \|f\| \cdot \sup_{z\in\mathbb{C}} \|F(z)\| < \infty,$$

тому, згідно з теоремою Ліувілля для скалярних функцій, g – стала, тобто $g(z_1) = g(z_2)$. Одержана суперечність доводить теорему. □

Тепер ми готові довести теорему, для якої нам потрібне поняття резольвенти.

Теорема 1.4.2. *Спектр будь-якого елемента банахової алгебри непорожній.*

Доведення. Будемо міркувати методом від супротивного. Нехай спектр елемента $a \in \mathbf{A}$ порожній. Тоді областю визначення резольвенти R_a є вся комплексна площина. Оскільки резольвента неперервна і прямує до 0 на ∞, то вона обмежена у всій площині. А оскільки вона аналітична в $\mathbb{C}$, то ми потрапляємо в умови теореми Ліувілля. Тому $R_a = \text{const}$. Але $\lim\limits_{\lambda\to\infty} R_a(\lambda) = 0$, тому $R_a(\lambda) \equiv 0$, що суперечить означенню резольвенти: її значеннями можуть бути тільки оборотні елементи алгебри. □

Зауваження. Застосування теореми Ліувілля є не випадковим. Аналогічна теорема про непорожність спектра квадратної матриці спиралась на існування кореня рівняння $\det(\mathrm{A} - \lambda I) = 0$, яке випливає з основної теореми алгебри; а цю теорему найпростіше доводити з використанням теореми Ліувілля.

Теорема 1.4.3 (Теорема Гельфанда–Мазура)**.** *Нехай банахова алгебра* $\mathbf{A}$ *має таку властивість: всі її ненульові елементи оборотні. Тоді кожен елемент* $a \in \mathbf{A}$ *має вигляд* $a = \lambda e$ *з деяким* $\lambda \in \mathbb{C}$. *Іншими словами, з точністю до ізоморфізму, єдина банахова алгебра, яка є полем – це поле комплексних чисел.*

Доведення. Нехай $a \in \mathbf{A}$, тоді, згідно з теоремою про непорожність спектра, існує $\lambda \in \mathbb{C}$ таке, що $a - \lambda e$ – це необоротний елемент алгебри. Тоді $a - \lambda e = 0$, тобто $a = \lambda e$. □

Вправи

1. Обчислити спектр і резольвенту одиничного елемента.

2. Нехай елемент $a \in \mathbf{A}$ задовольняє рівняння $a^2 = a$ (такі елементи називаються *ідемпотентами*). Використовуючи формулу обернення, обчислити резольвенту цього елемента. Яким може бути спектр ідемпотента?

3. Нехай елемент $a \in \mathbf{A}$ задовольняє рівняння $a^n = 0$ (такі елементи називаються *нільпотентними*). Використовуючи формулу обернення, обчислити резольвенту цього елемента.

4. Нехай $\lambda \in \sigma(a)$, λ_n – регулярні точки елемента a і $\lambda_n \to \lambda$ $(n \to \infty)$. Тоді $\|R_a(\lambda_n)\| \to \infty$ $(n \to \infty)$.

5. Нехай $\sigma(a) = \{0\}$ для всіх $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ виконується нерівність $\|R_a(\lambda)\| \leqslant \frac{C}{|\lambda|}$, де $C > 0$ – деяка стала. Довести, що $a = 0$.

Розділ 2. Фактор-простори та фактор-алгебри

2.1. Фактор-простір лінійного простору

Нехай A_1, A_2 – підмножини лінійного простору X, λ_1, λ_2 – скаляри. Через $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2$ позначимо множину всіх елементів вигляду $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2$, де $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2$.

Нехай X – лінійний простір, X_1 – підпростір в X. Введемо таке відношення еквівалентності на X: $x \sim y$, якщо $x - y \in X_1$. Класом еквівалентності елемента x є множина

$$[x] = x + X_1 = \{x + y : \ y \in X_1\}.$$

Множина таких класів еквівалентності, наділена операціями, описаними в на початку параграфу, називається *фактор-простором* простору X за підпростором X_1 і позначається X/X_1. Зазначимо найпростіші властивості лінійних операцій на фактор-просторі, з яких випливає, зокрема коректність означення та те, що фактор-простір є лінійним простором.

1. Клас еквівалентності нуля – нульовий елемент фактор-простору.

2. $\lambda_1[x_1] + \lambda_2[x_2] = [\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2]$.

Доведемо властивість 2:

$$\lambda_1[x_1] + \lambda_2[x_2] = \lambda_1(x_1 + X_1) + \lambda_2(x_2 + X_1) = \\ \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + (\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_1) = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + X_1 = [\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2].$$

З фактор-простором тісно пов'язаний оператор q – *фактор-відображення* простору X на X/X_1 : $q(x) = [x]$. Лінійність оператора фактор-відображення випливає із властивості 2. Оператор фактор-відображення сюр'єктивний. Важливий приклад фактор-простору природно виникає в теорії інтегрування. Нехай (Ω, Σ, μ) – простір з мірою (скінченною або нескінченною). Через $L_0(\Omega, \Sigma, \mu)$ позначається фактор-простір простору X всіх вимірних скалярнозначних функцій на Ω по підпростору X_1 функцій, які мають нехтувані носії. У цьому прикладі відповідне відношення еквівалентності – це добре знайома читачеві рівність майже скрізь.

Вправи

1. Обґрунтуйте переходи у доведенні властивості 2 операцій над класами еквівалентності.
2. $0 \in A_1 - A_2$ тоді і тільки тоді, коли A_1 і A_2 перетинаються.
3. Якщо A_1 і A_2 – підпростори, то $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2$ також буде підпростором.
4. Якщо A_1 і A_2 – підпростори, то $\mathrm{Lin}\,(A_1 \cup A_2) = A_1 + A_2$.
5. Якщо A_1 і A_2 – підпростори і $A_1 \cap A_2 = \{0\}$, то будь-який елемент $x \in A_1 + A_2$ має **єдине** зображення у вигляді $x = a_1 + a_2$, де $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2$. У цьому випадку, щоб підкреслити єдиність зображення, використовують символ $\oplus$ прямої суми: замість $A_1 + A_2$ пишуть $A_1 \oplus A_2$.
6. Підмножина Y лінійного підпростору X є підпростором тоді і тільки тоді, коли $\lambda_1 Y + \lambda_2 Y \subset Y$ для будь-яких скалярів λ_1 і λ_2.

2.2. Ін'єктивізація лінійного оператора

Нехай X, Y – лінійні простори, $T\colon X \to Y$ – лінійний оператор, взагалі кажучи, не ін'єктивний. Ін'єктивізацією оператора T називається відображення $\tilde{T}\colon X/\mathrm{Ker}\,T \to Y$, яке ставить у відповідність класу еквівалентності $[x]$ елемента $x \in X$ елемент Tx: $\tilde{T}([x]) = Tx$.

Вправи

1. Перевірте коректність означення оператора $\tilde{T}$, а саме, якщо в елементів x_1 і x_2 збігаються класи еквівалентності, то $Tx_1 = Tx_2$. Іншими словами, $\tilde{T}([x])$ не залежить від вибору представника у класі еквівалентності $[x]$.
2. Перевірте лінійність та ін'єктивність оператора $\tilde{T}$.
3. Перевірте, що $T = \tilde{T} \circ q$, де $q\colon X \to X/\mathrm{Ker}\,T$ – оператор фактор-відображення. Отже, будь-який оператор можна розкласти в композицію сюр'єктивного й ін'єктивного операторів. Порівняйте з вправою **??** п. **??**.

Нехай X – лінійний простір, X_1 – підпростір в X, X' – простір всіх лінійних функціоналів на X. *Анулятором* в X' підпростору X_1 називається множина $X_1^{\perp}$ всіх $f \in X'$, для яких $\mathrm{Ker}\,f \supset X_1$. Для кожного функціонала g на X/X_1 означимо функціонал $Ug \in X'$ рівністю $Ug(x) = g\,([x])$. Іншими словами, Ug – це композиція функціонала g з фактор-відображенням.

4. U – це лінійний ін'єктивний оператор.
5. $U\left((X/X_1)'\right) = X_1^{\perp}$, тобто $X_1^{\perp}$ – це лінійний підпростір, ізоморфний $(X/X_1)'$.

2.3. Гіперпідпростори і гіперплощини

Підпростір Y лінійного простору X називається *гіперпідпростором*, якщо існує такий вектор $e \in X \backslash Y$, що $\mathrm{Lin}\{e, Y\} = X$.

Теорема 2.3.1. *Для підпростору Y лінійного простору X такі умови еквівалентні:*

1. *Y – гіперпідпростір в X.*

2. $\dim X/Y = 1$.

3. *Існує ненульовий лінійний функціонал f на X, для якого $\operatorname{Ker} f = Y$.*

Доведення. 1. $\Rightarrow$ 2. Нехай Y – гіперпідпростір в X, $e \in X \setminus Y$ – такий елемент, що $\operatorname{Lin}\{e, Y\} = X$. Розглянемо $[e] \in X/Y$ – клас еквівалентності елемента e. $[e] \neq 0$, адже $e \notin Y$. Водночас $\operatorname{Lin}[e] = X/Y$, тобто в X/Y існує базис з одного елемента.

2. $\Rightarrow$ 3. Оскільки $\dim X/Y = 1$, існує ізоморфізм $U\colon X/Y \to \mathbb{K}$ нашого фактор-простору і поля скалярів. Означимо функціонал $f = U \circ q$, де q – фактор-відображення простору X на X/Y. Для цього функціонала $\operatorname{Ker} f = Y$.

3. $\Rightarrow$ 1. Нехай f – функціонал з п. 3. Виберемо елемент $e \in X$, для якого $f(e) = 1$. Очевидно, $e \in X \setminus Y$. Доведемо, що $\operatorname{Lin}\{e, Y\} = X$. Для цього візьмемо довільний вектор $x \in X$ і зобразимо його у вигляді $x = f(x)e + (x - f(x)e)$. У цьому запису другий доданок $x - f(x)e$ лежить в $\operatorname{Ker} f = Y$, тобто ми зобразили елемент x у вигляді $ae + y$, де $a \in \mathbb{K}$, $y \in Y$. □

Підмножина A лінійного простору X називається *гіперплощиною*, якщо вона є зсунутим гіперпідпростором. Іншими словами, гіперплощина в X – це множина вигляду $x + Y$, де $x \in X$, а Y – гіперпідпростір в X.

Вправи

1. Нехай f – ненульовий лінійний функціонал у просторі X, a – довільне число. Доведіть, що *лінія рівня* $f_a = \{x \in X : f(x) = a\}$ функціонала f утворює гіперплощину в X.

2. Довести, що будь-яка гіперплощина в X є лінією рівня деякого ненульового лінійного функціонала.

3. Нехай Y – гіперпідпростір в X. Довести, що $\operatorname{Lin}\{e, Y\} = X$ для будь-якого вектора $e \in X \setminus Y$.

4. Нехай ядра двох лінійних функціоналів збігаються. Доведіть, що ці функціонали лінійно залежні.

5. Нехай Y – гіперплощина у дійсному просторі X. На $X \setminus Y$ введемо таке відношення еквівалентності: $x_1 \sim x_2$, якщо відрізок, що сполучає ці точки, не перетинає цю гіперплощину. Перевірте, що так введене відношення справді є відношенням еквівалентності. $X \setminus Y$ розпадається на два класи еквівалентності. Ці класи еквівалентності називаються *півпросторами, породженими гіперплощиною Y*.

6. Нехай гіперплощина – це лінія рівня f_a функціонала f у дійсному просторі X. Перевірте, що півпросторами, породженими гіперплощиною f_a, є множини $f_{<a} = \{x \in X : f(x) < a\}$ і $f_{>a} = \{x \in X : f(x) > a\}$.

7. Чому в двох попередніх вправах важлива дійсність простору?

Означення. Підпростір Y лінійного простору X має *ковимірність* n ($\mathrm{codim}_X Y = n$), якщо вимірність фактор-простору X/Y дорівнює n.

8. $\mathrm{codim}_X Y \leqslant n$ тоді і тільки тоді, коли існують n векторів $\{x_k\}_1^n \subset X$ таких, що $\mathrm{Lin}\{x_1, \ldots, x_n, Y\} = X$.

9. $\mathrm{codim}_X Y \leqslant n$ тоді і тільки тоді, коли Y має ненульовий перетин з будь-яким підпростором Z в X вимірності, яка більша або дорівнює $n + 1$.

10. $\mathrm{codim}_X Y = n$ тоді і тільки тоді, коли існує підпростір Z в X такий, що $\dim Z = n$, $Z \cap Y = \{0\}$, $Z + Y = X$.

11. Нехай $Y \subset Z$ – підпростір простору X. Тоді $\mathrm{codim}_X Y = \mathrm{codim}_Z Y + \mathrm{codim}_X Z$.

12. Для будь-яких підпросторів Y, Z простору X виконуються співвідношення:

$$\max\{\mathrm{codim}_X Y, \mathrm{codim}_X Z\} \leqslant \mathrm{codim}_X (Y \cap Z) \leqslant \mathrm{codim}_X Y + \mathrm{codim}_X Z.$$

13. $\mathrm{codim}_X Y = \dim Y^{\perp}$.

14. $\mathrm{codim}_X Y \leqslant n$ тоді і тільки тоді, коли на X існує такий набір з n лінійних функціоналів, що перетин їхніх ядер міститься в Y.

15. $\mathrm{codim}_X Y = n$ тоді і тільки тоді, коли на X існує такий лінійно незалежний набір з n лінійних функціоналів, що перетин їхніх ядер збігається з Y.

16. Нехай f, $\{f_k\}_{k=1}^n$ – лінійні функціонали на X і $\mathrm{Ker}\, f \supset \bigcap\limits_{k=1}^{n} \mathrm{Ker}\, f_k$. Тоді $f \in \mathrm{Lin}\,\{f_k\}_{k=1}^n$.

2.4. Фактор-простори нормованого простору

Нехай Y – замкнутий підпростір нормованого простору X, $x \in X$ – довільний елемент, $[x] = x + Y$ – відповідний елемент фактор-простору X/Y. Означимо таку величину:

$$\|[x]\| = \inf_{y \in Y} \|x + y\|.$$

Іншими словами, $\|[x]\|$ – це відстань в X від 0 до множини $x + Y$. Оскільки Y – підпростір і, відтак, $Y = -Y$, то таке означення еквівалентне початковому: $\|[x]\| = \inf\limits_{y \in Y} \|x - y\|$. Геометричний зміст цього означення: $\|[x]\|$ – це відстань в X від x до підпростору Y.

Теорема 2.4.1. *Введена вище величина $\|[x]\|$ задає норму на просторі X/Y.*

Доведення. Перевіримо аксіоми норми.

1. Нехай $\|[x]\| = 0$. Тоді $\inf_{y\in Y}\|x-y\| = 0$, і, отже, x – гранична точка підпростору Y. Оскільки Y замкнена, $x \in Y$ і $[x] = Y = [0]$.

2. Оскільки Y – підпростір, $\lambda Y = Y$ для будь-якого ненульового скаляра λ. Маємо:

$$\|[\lambda x]\| = \inf_{y\in Y}\|\lambda x + y\| = \inf_{y\in Y}\|\lambda x + \lambda y\| = |\lambda| \inf_{y\in Y}\|x+y\| = |\lambda|\cdot\|[x]\|.$$

3. Нехай $x_1, x_2 \in X$, $\varepsilon > 0$. Згідно з означенням інфімума існують такі $y_1, y_2 \in Y$, що $\|x_1 + y_1\| < \|[x_1]\| + \varepsilon$ і $\|x_2 + y_2\| < \|[x_2]\| + \varepsilon$. Отримуємо оцінку

$$\|[x_1 + x_2]\| = \inf_{y\in Y}\|x_1 + x_2 + y\| \leqslant \|x_1 + x_2 + y_1 + y_2\| \leqslant$$

$$\leqslant \|x_1 + y_1\| + \|x_2 + y_2\| \leqslant \|[x_1]\| + \|[x_2]\| + 2\varepsilon,$$

що з огляду на довільність ε означає потрібну нерівність трикутника. □

Надалі завжди будемо припускати, що фактор-простір нормованого простору наділений описаною вище нормою.

Приклад. Нехай (Ω, Σ, μ) – простір з мірою, X – простір всіх обмежених вимірних функцій на Ω, наділений нормою $\|f\| = \sup_{t\in\Omega}|f(t)|$, Y – підпростір в X, який складається з функцій, що дорівнюють нулю майже скрізь. Відповідний фактор-простір X/Y позначається $L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$.

Вправи

1. Доведіть таку формулу для норми в $L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$:

$$\|f\|_\infty = \inf_{A\in\Sigma, \mu(A)=0}\left\{\sup_{t\in\Omega\setminus A}|f(t)|\right\}.$$

2. Доведіть нерівність $|f| \overset{\text{м.с.}}{\leqslant} \|f\|_\infty$.

3. Доведіть, що $\|f\|_\infty$ дорівнює інфімуму множини тих сталих c, для яких $|f| \overset{\text{м.с.}}{\leqslant} c$.

4. У просторі $C[a,b]$ розглянемо підпростір Y, що складається з тотожно сталих функцій. Довести, що норма елемента $[f]$ фактор-простору $C[a,b]/Y$ обчислюється за формулою

$$\|[f]\| = \frac{1}{2}\big(\max\{f(t) : t \in [a,b]\} - \min\{f(t) : t \in [a,b]\}\big).$$

5. Простір ℓ_1 можна розглядати як лінійний підпростір в c_0, хоча нормованим підпростором в c_0 він не буде: норма, задана в ℓ_1, не збігається з нормою з c_0.

Довести, що ℓ_1 незамкнений і щільний в c_0. Довести, що ℓ_1 як підмножина в c_0 належить до класу F_σ.

6. Довести, що підпростір c_0 всіх збіжних до нуля послідовностей замкнений в ℓ_∞.

7. Показати, що норма елемента $[a]$ в фактор-просторі ℓ_∞/c_0 обчислюється за формулою $\|[a]\| = \varlimsup_{n\to\infty} |a_n|$, де a_n – це координати елементу $a \in \ell_\infty$. [1]

2.5. Фактор-простори банахового простору

Теорема 2.5.1. *Нехай X – банахів простір, Y – замкнений лінійний підпростір в X. Тоді фактор-простір X/Y – також банахів простір.*

Доведення. Нехай $x_n \in X$ такі, що норми відповідних класів еквівалентності утворюють абсолютно збіжний ряд: $\sum_n \|[x_n]\| < \infty$. Згідно з критерієм повноти, потрібно довести, що ряд $\sum_n [x_n]$ збігається до деякого елемента фактор-простору. Для цього в кожному класі $[x_n]$ виберемо по такому представнику y_n, що $\|y_n\| \leqslant \|[x_n]\| + \frac{1}{2^n}$. Тоді $\sum_n y_n$ – абсолютно збіжний ряд в X, що з огляду на повноту простору означає, що $\sum_n y_n$ збігається в X до деякого елемента x. Перевіримо, що $\sum [x_n] = [x]$. Справді,

$$\left\|[x] - \sum_{k=1}^{n}[x_k]\right\| = \left\|[x] - \sum_{k=1}^{n}[y_k]\right\| = \left\|\left[x - \sum_{k=1}^{n} y_k\right]\right\| \leqslant \left\|x - \sum_{k=1}^{n} y_k\right\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \quad \square$$

Вправи

1. Нехай X – нормований простір, X_1 – замкнений підпростір в X. Доведіть, що фактор-відображення q простору X на X/X_1 (див. п. 2.1) – це неперервний лінійний оператор. Обчисліть $\|q\|$. Доведіть, що $q(B_X) = B_{X/X_1}$.

2. Нехай X, Y – нормовані простори, $T\colon X \to Y$ – лінійний оператор. Перевірте, що ін'єктивізація $\tilde{T}$ оператора T (див. п. 6) – це неперервний лінійний оператор і $\|\tilde{T}\| = \|T\|$.

3. Нехай X – нормований простір, f – лінійний функціонал на X, $A = \{x \in X : f(x) = 1\}$. Доведіть, що $\rho(0, A) = \|f\|^{-1}$. Зокрема, якщо $\rho(0, A) \neq 0$, то функціонал f неперервний.

4. Нехай X – нормований простір, $x \in X$, $f \in X^*$, a – довільний скаляр, $A = \{x \in X : f(x) = a\}$. Тоді $\rho(x, A) = \frac{|f(x)-a|}{\|f\|}$. Зокрема, підставив $a = 0$ отримуємо, що

$$\rho(x, \ker f) = \frac{|f(x)|}{\|f\|}.$$

[1] У радянський час в одній з харківських газет стаття про перевиконання плану передовиками виробництва називалась «Норма – не предел! (рос.)». Останню вправу можна розглядати як контрприклад до цього твердження.

5. Для ненульового лінійного функціонала f, заданого на нормованому просторі X, такі умови еквівалентні:

– функціонал f неперервний;

– ядро функціонала f замкнене;

– ядро функціонала f не щільне в X.

2.6. Ідеали

Для підмножин $A, B \subset \mathbf{A}$ банахової алгебри $\mathbf{A}$ природно визначається добуток:

$$AB = \{ab\colon a \in A, b \in B\}.$$

Двостороннім ідеалом банахової алгебри $\mathbf{A}$ називають лінійний підпростір $\mathcal{I} \subset \mathbf{A}$, що не дорівнює усій алгебрі (тобто $\mathcal{I} \neq \mathbf{A}$) та задовольняє умови $\mathbf{A}\mathcal{I} \subset \mathcal{I}$ та $\mathcal{I}\mathbf{A} \subset \mathcal{I}$. Більш детально: для довільних $a \in \mathbf{A}$, $x \in \mathcal{I}$ виконані умови $ax \in \mathcal{I}$ та $xa \in \mathcal{I}$. Оскільки $e \in \mathbf{A}$, мають місце зворотні включення $\mathcal{I}\mathbf{A} \supset \mathcal{I}$ та $\mathbf{A}\mathcal{I} \supset \mathcal{I}$, тобто

$$\mathcal{I}\mathbf{A} = \mathcal{I} = \mathbf{A}\mathcal{I}.$$

У разі, якщо алгебра $\mathbf{A}$ є комутативною, двосторонні ідеали скорочено називають *ідеалами*. У комутативному випадку достатньо перевіряти лише якесь одне з включень $\mathbf{A}\mathcal{I} \subset \mathcal{I}$, $\mathcal{I}\mathbf{A} \subset \mathcal{I}$.

Приклади

1. Для довільної підмножини $M \neq \varnothing$ компакту K підмножина $\{x \in C(K)\colon x|_M = 0\}$ є ідеалом в $C(K)$.

2. Нехай (Ω, Σ, μ) – простір з мірою, $\mu(\Omega) \neq 0$, а X – алгебра всіх обмежених вимірних функцій на Ω, наділена нормою $\|f\| = \sup_{t\in\Omega} |f(t)|$. Підпростір Y обмежених функцій, що дорівнюють нулю майже скрізь, є ідеалом в X.

3. Підпростір c_0 всіх збіжних до нуля послідовностей є ідеалом в l_∞.

4. В $L(l_2)$ підмножина $K(l_2)$ всіх компактних операторів є двостороннім ідеалом.

Важлива властивість

Якщо $\mathbf{A}$ – банахова алгебра, $\mathcal{I} \subset \mathbf{A}$ – двосторонній ідеал в $\mathbf{A}$, то $\mathcal{I}$ не містить жодного оборотного елементу алгебри. Доведемо це. Нехай $\mathcal{I}$ містить якийсь оборотний елемент $u \in \mathcal{I}$. Розглянемо довільний елемент $a \in \mathbf{A}$. Оскільки $a = u(u^{-1}a)$, $u \in \mathcal{I}$, а добуток елементу з $\mathcal{I}$ на будь-який елемент з $\mathbf{A}$ міститься в $\mathcal{I}$, отримуємо, що $a \in \mathcal{I}$. Тобто $\mathcal{I} = \mathbf{A}$, що протирічить означенню ідеалу.

2.7. Фактор-алгебри

Нехай $\mathbf{A}$ – банахова алгебра, $\mathcal{I}$ – замкнений двосторонній ідеал в $\mathbf{A}$. Тоді на фактор-просторі $\mathbf{A}/\mathcal{I}$ (який, згідно до Теореми пункту 2.5 є банаховим простором) можна також означити операцію множення: класи еквівалентності – це підмножини, а що таке добуток підмножин алгебри, ми знаємо.

Відмітимо, що для довільних $a, b \in \mathbf{A}$ має місце рівність

$$[a][b] = [ab], \tag{2.7.1}$$

тобто операція множення дійсно є бінарною операцією на фактор-просторі $\mathbf{A}/\mathcal{I}$. Досить легко перевірити, що ця операція задовольняє аксіоми, що перелічені на початку розділу 1.1. Клас еквівалентності $[e]$ одиничного елемента e буде одиничним елементом в $\mathbf{A}/\mathcal{I}$. Тобто для перевірки того, що $\mathbf{A}/\mathcal{I}$ є банаховою алгеброю, залишається перевірити рівність

$$\|[e]\| = 1.$$

Зробимо це. По-перше,

$$\|[e]\| = \inf_{y\in\mathcal{I}} \|e + y\| \leqslant \|e\| = 1.$$

З іншого боку, відповідно до Леми 2 розділу 1.2, якщо елемент a банахової алгебри $\mathbf{A}$ задовольняє умову $\|a\| < 1$, то елемент $e - a$ оборотний. Оскільки ідеал $\mathcal{I}$ не містить оборотних елементів, маємо що $\|e - y\| \geqslant 1$ для усіх $y \in \mathcal{I}$ (бо інакше $y = e - (e - y)$ був би оборотним). Отже,

$$\|[e]\| = \inf_{y\in\mathcal{I}} \|e - y\| \geqslant 1.$$

Надалі, у зазначених умовах, будемо називати $\mathbf{A}/\mathcal{I}$ фактор-алгеброю.

Означення 2.7.1. Нехай $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ – банахові алгебри. Відображення $\varphi\colon \mathbf{A}_1 \to \mathbf{A}_2$ називається *гомоморфізмом*, якщо воно є лінійним оператором і "поважає" множення та одиничний елемент: $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ для будь-яких $x, y \in \mathbf{A}_1$, та $\varphi(e_1) = e_2$, де e_1, e_2 – одиничні елементи алгебр $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ відповідно.

Відмітимо, що з формули (2.7.1) випливає наступне твердження:

Твердження 2.7.2. *Якщо $\mathcal{I}$ – замкнений двосторонній ідеал банахової алгебри $\mathbf{A}$, то фактор-відображення $q\colon \mathbf{A} \to \mathbf{A}/\mathcal{I}$ – це гомоморфізм.*

Вправи

1. Перевірити рівність (2.7.1). Де в цій перевірці відіграло роль те, що $\mathcal{I}$ – ідеал.

2. Перевірити для $\mathbf{A}/\mathcal{I}$ виконання аксіом алгебри.

Розділ 3. Комутативні банахові алгебри

3.1. Максимальні ідеали

Нехай $\mathbf{A}$ – комутативна банахова алгебра, $\mathcal{I}$ – ідеал в $\mathbf{A}$. Ідеал $\mathcal{I}$ називається максимальним, якщо в $\mathbf{A}$ немає ідеалів, що строго містять в собі $\mathcal{I}$. Іншими словами, $\mathcal{I}$ – максимальний ідеал в $\mathbf{A}$, якщо для довільного ідеалу $\mathcal{J} \subset \mathbf{A}$ з умови $\mathcal{J} \supset \mathcal{I}$ випливає, що $\mathcal{J} = \mathcal{I}$.

Теорема 3.1.1. *Для кожного ідеалу $\mathcal{I}_0$ комутативної банахової алгебри $\mathbf{A}$ існує максимальний ідеал $\mathcal{I}_1$ такий, що $\mathcal{I}_0 \subset \mathcal{I}_1$.*

Доведення. Розглянемо множину Γ всіх ідеалів $\mathcal{I} \subset \mathbf{A}$. таких що $\mathcal{I}_0 \subset \mathcal{I}$. Введемо на Γ відношення порядку $\succ$ за правилом $\mathcal{I}_1 \succ \mathcal{I}_2$ якщо $\mathcal{I}_1 \supset \mathcal{I}_2$. Тоді Γ буде індуктивно впорядкованою множиною, і застосування Леми Цорна гарантує існування в Γ максимального елементу $\mathcal{I}_1$. Цей $\mathcal{I}_1$ і буде максимальним ідеалом, що ми шукаємо. □

Теорема 3.1.2. *Кожний максимальний ідеал $\mathcal{I}$ комутативної банахової алгебри $\mathbf{A}$ є замкненою множиною.*

Доведення. Розглянемо замикання $\overline{\mathcal{I}}$ ідеалу $\mathcal{I}$. З неперервності множення випливає, що $\overline{\mathcal{I}}$ – це також ідеал (перевірте!). Оскільки $\overline{\mathcal{I}} \supset \mathcal{I}$, а $\mathcal{I}$ – максимальний, отримуємо що $\overline{\mathcal{I}} = \mathcal{I}$. □

Теорема 3.1.3. *Нехай $\mathbf{A}$ – комутативна банахова алгебра, $x \in \mathbf{A}$ – необоротний елемент. Тоді множина $x\mathbf{A} = \{xa \colon a \in \mathbf{A}\}$ є ідеалом алгебри $\mathbf{A}$.*

Доведення. Для довільних $x_1, x_2 \in x\mathbf{A}$ існують такі $a_1, a_2 \in \mathbf{A}$, що $x_1 = xa_1$ і $x_2 = xa_2$. Тоді для довільних скалярів $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ маємо

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = x(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2) \in x\mathbf{A},$$

тобто $x\mathbf{A}$ – це лінійний підпростір. Далі, оскільки x – необоротний елемент, одиничний елемент не можна записати у вигляді $e = xa$, тобто $e \notin x\mathbf{A}$. Таким чином, ми довели, що $x\mathbf{A} \neq \mathbf{A}$. Нарешті, $\mathbf{AA} = \mathbf{A}$, тому $x\mathbf{AA} = x\mathbf{A}$. □

Теорема 3.1.4. *Нехай $\mathbf{A}$ – комутативна банахова алгебра, $x \in \mathbf{A}$. Тоді необоротність елемента x еквівалентна існуванню максимального ідеалу $\mathcal{I}$ такого, що $x \in \mathcal{I}$.*

Доведення. В ідеалі немає оборотних елементів, тому, якщо $x \in \mathcal{I}$, то x – необоротний. Навпаки, якщо x необоротний, то відповідно до попередньої теореми $x\mathbf{A}$ – це ідеал. Теорема 3.1.1 дає нам існування максимального ідеалу $\mathcal{I}$ такого, що $x\mathbf{A} \subset \mathcal{I}$. Оскільки $x \in x\mathbf{A}$, вочевидь $x \in \mathcal{I}$. □

Вправи

1. На прикладі $\mathbf{A} = C[0,1]$, $x \in C[0,1]$, $x(t) = t$ переконайтесь, що ідеал $x\mathbf{A}$ з Теореми 3.1.3 може бути незамкненою множиною. Тобто, теорема про замкненість максимальних ідеалів не розповсюджується на довільні ідеали.

2. Перевірте, що впорядкована множина Γ з доведення Теореми 3.1.1 й насправді буде індуктивно впорядкованою.

3. Проаналізуйте, які з результатів цього розділу зберігаються для некомутативних алгебр, з заміною слова "ідеал" на "двосторонній ідеал".

3.2. Комплексні гомоморфізми та оборотність

Означення 3.2.1. Нехай $\mathbf{A}$ – комутативна банахова алгебра. Відображення $\varphi\colon \mathbf{A} \to \mathbb{C}$ називається *комплексним гомоморфізмом*, якщо воно є гомоморфізмом алгебр $\mathbf{A}$ і $\mathbb{C}$. Іншими словами, φ є лінійним функціоналом і "поважає" множення та одиничний елемент: $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ для будь-яких $x, y \in \mathbf{A}$, та $\varphi(e) = 1$. Множина всіх комплексних гомоморфізмів алгебри $\mathbf{A}$ позначається $\Delta(\mathbf{A})$.

З означення випливає, що для оборотних елементів $\varphi(x^{-1}) = \frac{1}{\varphi(x)}$.

Теорема 3.2.2. *Нехай* $\mathbf{A}$ *– комутативна банахова алгебра,* $\varphi \in \Delta(\mathbf{A})$ *– комплексний гомоморфізм. Тоді* $\ker\varphi$ *є максимальним ідеалом в* $\mathbf{A}$.

Доведення. Ядро лінійного функціонала – це лінійний підпростір. $\varphi(e) = 1 \neq 0$, тобто $\ker\varphi \neq \mathbf{A}$. Далі, для довільних $a \in \mathbf{A}$, $x \in \ker\varphi$ маємо, що $\varphi(xa) = \varphi(x)\varphi(a) = 0$, тобто $xa \in \ker\varphi$. Цим доведено, що $\ker\varphi$ – це ідеал. Нарешті, $\ker\varphi$ – це гіперпідпростір, тобто єдиний лінійний підпростір, що містить $\ker\varphi$ і йому не дорівнює – це вся алгебра $\mathbf{A}$. □

Теорема 3.2.3. *Нехай* $\mathbf{A}$ *– комутативна банахова алгебра. Тоді для кожного максимального ідеалу* $\mathcal{I}$ *існує єдиний* $\varphi \in \Delta(\mathbf{A})$ *такий, що* $\ker\varphi = \mathcal{I}$. *При цьому* $\|\varphi\| = 1$.

Доведення. Розглянемо фактор-алгебру $\mathbf{A}/\mathcal{I}$ та відповідне фактор-відображення $q\colon \mathbf{A} \to \mathbf{A}/\mathcal{I}$. Відповідно до Твердження 2.7.2 q – це гомоморфізм алгебр $\mathbf{A}$ і $\mathbf{A}/\mathcal{I}$. Якщо ми доведемо, що $\mathbf{A}/\mathcal{I}$ ізоморфно $\mathbb{C}$, то, позначивши літерою g відповідний ізоморфізм $g\colon \mathbf{A}/\mathcal{I} \to \mathbb{C}$, у якості шуканого φ зможемо взяти

композицію $g \circ q$. Для ізоморфності $\mathbf{A}/\mathcal{I}$ з $\mathbb{C}$ достатньо довести, що в $\mathbf{A}/\mathcal{I}$ немає необоротних ненульових елементів (Теорема 1.4.3). Отже, припустимо, що існує необоротний $z \in \mathbf{A}/\mathcal{I} \setminus \{0\}$. Тоді, за Теоремою 3.1.4 існує ідеал $\mathcal{J}$ в $\mathbf{A}/\mathcal{I}$ такий, що $x \in \mathcal{J}$, тобто $\mathcal{J} \supset \{0\}$, $\mathcal{J} \neq \{0\}$. Тоді $q^{-1}(\mathcal{J})$ – це ідеал в $\mathbf{A}$, $q^{-1}(\mathcal{J}) \supset q^{-1}(\{0\}) = \mathcal{I}$, та $q^{-1}(\mathcal{J}) \neq= \mathcal{I}$, що протирічить максимальності ідеалу $\mathcal{I}$.

Для побудованого гомоморфізму φ маємо $\|\varphi\| = \|q\|$, а оскільки норма фактор-відображення дорівнює 1, отримуємо, що $\|\varphi\| = 1$.

Єдиність φ – це вже зовсім просто, бо інший гомоморфізм з тим самим ядром $\mathcal{I}$ співпадає з φ на і $\mathcal{I}$, і на елементі $e \notin \mathcal{I}$, тобто співпадає на $\mathrm{Lin}\{\mathcal{I}, e\} = \mathrm{Lin}\{\ker\varphi, e\} = \mathbf{A}$. □

Теорема 3.2.4. *Кожний комплексний гомоморфізм φ на комутативній банаховій алгебрі $\mathbf{A}$ є неперервним з $\|\varphi\| = 1$.*

Доведення. Розглянемо $\mathcal{I} = \ker\varphi$. За Теоремою 3.2.2 $\mathcal{I}$ – це максимальний ідеал, тобто він, за попередньою теоремою, є ядром лише одного комплексного гомоморфізму, і в цього єдиного гомоморфізму норма дорівнює 1. □

Комбінуючи попередні результати з Теоремою 3.1.4 отримуємо наступний корисний наслідок.

Теорема 3.2.5. *Нехай $\mathbf{A}$ – комутативна банахова алгебра. Елемент $x \in \mathbf{A}$ буде оборотним тоді і тільки тоді, коли $\varphi(x) \neq 0$ для всіх $\varphi \in \Delta(\mathbf{A})$.*

Як наслідок отримуємо зв'язок між спектром елемента та значеннями комплексних гомоморфізмів.

Теорема 3.2.6. *Нехай $\mathbf{A}$ – комутативна банахова алгебра, $\Delta(\mathbf{A})$ – множина всіх комплексних гомоморфізмів алгебри $\mathbf{A}$. Для елемента $a \in \mathbf{A}$ та числа $\lambda \in \mathbb{C}$ наступні твердження еквівалентні:*

(i) $\lambda \in \sigma(a)$;

(ii) існує такий $\varphi \in \Delta(\mathbf{A})$, що $\varphi(a) = \lambda$.

Доведення. Використаємо означення спектра і теорему 3.2.5.

$$(i) \Leftrightarrow (a - \lambda e \text{ необоротний }) \Leftrightarrow (\text{ існує } \varphi \in \Delta(\mathbf{A}) \text{ з } \varphi(a - \lambda e) = 0) \Leftrightarrow (ii). \quad \square$$

Щоб надати теорії більше "матеріальності", опишемо всі комплексні гомоморфізми алгебри $C(K)$.

Теорема 3.2.7. *Нехай K – компакт. Позначимо для кожного $t \in K$ символом δ_t функціонал "значення в точці" t, тобто $\delta_t(x) = x(t)$ для всіх $x \in C(K)$. Тоді всі δ_t – це комплексні гомоморфізми, і інших комплексних гомоморфізмів на $C(K)$ немає.* [1]

Доведення. Оскільки операції в $C(K)$ означені поточково, $\delta_t(xy) = (xy)(t) = x(t)y(t) = \delta_t(x)\delta_t(y)$ і $\delta_t(\mathbb{1}) = 1$. Тому перша частина твердження теореми не викликає труднощів, і залишається лише перевірити, що на $C(K)$ немає інших комплексних гомоморфізмів, крім функціоналів виду δ_t.

Отже, розглянемо довільний $\varphi \in \Delta(C(K))$ і позначимо $\mathcal{I} = \ker \varphi$. У разі, якщо існує $t \in K$ таке, що $\mathcal{I} \subset \ker \delta_t$, то з максимальності ідеалу $\mathcal{I}$ одразу випливає, що $\mathcal{I} = \ker \delta_t$ і $\varphi = \delta_t$. Тобто у цьому випадку твердження теореми справедливе. Тому залишається довести неможливість ситуації, коли $\mathcal{I} \not\subset \ker \delta_t$ для всіх $t \in K$.

В такому випадку для кожного $t \in K$ існує $x_t \in \mathcal{I}$ з $x_t(t) \neq 0$. Позначимо $U_t = \{\tau \in K : x_t(\tau) \neq 0\}$. Завдяки неперервності функцій x_t множини U_t відкриті, і

$$\bigcup_{t \in K} U_t \supset \bigcup_{t \in K} \{t\} = K,$$

тобто множини U_t разом утворюють відкрите покриття компакту K. Виберемо скінчене підпокриття $\{U_{t_k}\}_{k=1}^n$. Оскільки $x_{t_k} \in \mathcal{I}$, а $\mathcal{I}$ – ідеал, отримуємо, що $|x_{t_k}|^2 = x_{t_k}\overline{x_{t_k}} \in \mathcal{I}$ так само, як і $\sum_{k=1}^n |x_{t_k}|^2 \in \mathcal{I}$. Згадаємо, що кожна точка $\tau \in K$ попаде в якусь з множин U_{t_k}, відповідно якийсь з доданків $|x_{t_k}(\tau)|^2$ буде ненульовим, і вся сума $\sum_{k=1}^n |x_{t_k}(\tau)|^2$ буде ненульовою. Таким чином, елемент $\sum_{k=1}^n |x_{t_k}|^2 \in \mathcal{I}$ буде оборотним (як функція, що в жодній точці не дорівнює нулю), а такого бути не може, бо ідеал не містить оборотних елементів (§2.6). □

Вправи

1. Нехай $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ – банахові алгебри, $\varphi \colon \mathbf{A}_1 \to \mathbf{A}_2$ – гомоморфізм, $x \in A_1$ – оборотний елемент. Тоді $\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1}$. Зокрема,

2. Якщо $\mathbf{A}$ – комутативна банахова алгебра, $x \in \mathbf{A}$ оборотний елемент і $\varphi \in \Delta(\mathbf{A})$, то $\varphi(x^{-1}) = \frac{1}{\varphi(x)}$. (Цю властивість ми відмітили без доведення на початку параграфу).

3.3. Застосування до рядів Фур'є

Теорема 3.3.1 (Н.Вінер). *Нехай комплекснозначна функція f на відрізку $[0, 2\pi]$ розкладаються в ряд $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}_n e^{int}$ з $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}_n| < \infty$ та не*

[1] Англійська назва "evaluation functional" для δ_t мені здається більш вдалою. На жаль, не вмію перекласти її краще.

обертається в нуль в жодній точці відрізку $[0, 2\pi]$. *Тоді функція* $g = 1/f$ *також задовольняє умову*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\hat{g}_n| < \infty. \tag{3.3.1}$$

Доведення. Відмітимо, що зв'язок між коефіцієнтами Фур'є функцій f і $1/f$ опосередкований, тому доводити ці теорему Вінера прямими оцінками дуже складно. Елегантне доведення, що ми наводимо нижче, було знайдене І. Гельфандом.

Розглянемо алгебру Вінера W абсолютно збіжних рядів Фур'є з прикладу 5 пункту 1.1. Умови на f саме означають, що $f \in W$. Позначимо $e_n \in W$, $e_n(t) = e^{int}$. Ці елементи пов'язані співвідношеннями $e_n e_m = e_{nm}$, $e = e_0$ – це одиничний елемент алгебри W, $\|e_n\| = 1$. Нашим завданням буде довести оборотність в W елемента f за допомогою Теореми 3.2.5. Отже, нехай $\varphi \in \Delta(W)$. Позначимо $\alpha = \varphi(e_1)$. Теорема 3.2.4 каже, що $\|\varphi\| = 1$. Тому

$$|\alpha| = |\varphi(e_1)| \leqslant 1 \quad \text{та} \quad |\alpha|^{-1} = \left|\varphi(e_1)^{-1}\right| = |\varphi(e_{-1})| \leqslant 1,$$

тобто $|\alpha| = 1$. Оберемо таке число $\tau \in [0, 2\pi)$, що $\alpha = e^{i\tau}$. Тоді $\varphi(e_n) = e^{in\tau}$ для всіх $n \in \mathbb{Z}$. Оскільки $f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}_n e_n$ маємо, що

$$\varphi(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}_n \varphi(e_n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}_n e^{in\tau} = f(\tau) \neq 0.$$

Тобто, оборотність елемента $f \in W$ доведена. Елемент $f^{-1} \in W$ – це така функція, що $f^{-1}(t) f(t) = 1$ для всіх t, тобто $f^{-1} = 1/f$ і $g = 1/f \in W$. За визначенням простору W, умова (3.3.1) доведена. □

Розділ 4. Перетворення Гельфанда

4.1. Топологія поточкової збіжності

Нехай на множині X задано сім'ю відображень F, де відображення $f \in F$ діють відповідно в (можливо різні) топологічні простори $f(X)$. Для довільної точки $x \in X$, довільної скінченної сім'ї відображень $\{f_k\}_{k=1}^n \subset F$ і відкритих околів V_k точок $f_k(x)$ у просторі $f_k(X)$ визначимо множини

$$U_{n,\{f_k\}_{k=1}^n,\{V_k\}_{k=1}^n}(x) = \bigcap_{k=1}^n f_k^{-1}(V_k).$$

Нагадаємо факт з загальної топології, що якщо для кожної точки $x \in X$ задана непорожня сім'я підмножин U_x, яка має такі властивості:

– якщо $U \in U_x$, то $x \in U$;

– якщо $U_1, U_2 \in U_x$, то існує таке $U_3 \in U_x$, що $U_3 \subset U_1 \cap U_2$;

– якщо $U \in U_x$ і $y \in U$, то існує таке $V \in U_y$, що $V \subset U$,

то існує топологія τ на X, для якої сім'ї U_x є базами відкритих околів відповідних точок.

Тому на X існує топологія (можливо, невідокремлювана), для якої множини $U_{n,\{f_k\}_{k=1}^n,\{V_k\}_{k=1}^n}(x)$ утворюють базу околів точки x для всіх $x \in X$. Позначимо цю топологію символом $\sigma(X, F)$. Зокрема, околами точки $x \in X$ в топології $\sigma(X, F)$ будуть всі множини вигляду $f^{-1}(V)$, де $f \in F$, а V – окіл точки $f(x)$ у топологічному просторі $f(X)$. Отже, всі відображення сім'ї F неперервні в $\sigma(X, F)$.

Теорема 4.1.1. *$\sigma(X, F)$ – це найслабша з топологій на X, в яких неперервні всі відображення сім'ї F.*

Доведення. Нехай τ – деяка топологія, в якій всі відображення сім'ї F неперервні. Доведемо, що довільна множина вигляду $U_{n,\{f_k\}_{k=1}^n,\{V_k\}_{k=1}^n}(x)$ буде околом точки x в топології τ. Цим буде доведено, що $\tau \succ \sigma(X, F)$. За умовою, всі відображення $f_k \colon X \to f_k(X)$ неперервні в топології τ. Отже, $f_k^{-1}(V_k)$ – це відкриті околи в τ точки x; відкритим околом є і скінченний перетин $U_{n,\{f_k\}_{k=1}^n,\{V_k\}_{k=1}^n}(x)$ таких множин. □

Означення 4.1.2. Топологія $\sigma(X, F)$ називається *топологією, породженою сім'єю відображень F.*

Інша назва (виникла з попередньої теореми) – *найслабша топологія, в якій неперервні всі відображення сім'ї F.*

Означення 4.1.3. Сім'я відображень F *відокремлює точки* множини X, якщо для довільних $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$ існує відображення $f \in F$ з $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Теорема 4.1.4. *Нехай всі простори $f(X)$, $f \in F$ гаусдорфові. Для того, щоб топологія $\sigma(X, F)$ була відокремлюваною за Гаусдорфом, необхідно і досить, щоб сім'я відображень F відокремлювала точки множини X.*

Доведення. *Достатність.* Припустимо, що F відокремлює точки множини X. Тоді для довільних $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$ існує $f \in F$ з $f(x_1) \neq f(x_2)$. Оскільки $f(X)$ – гаусдорфів простір, існують неперетинні околи V_1, V_2 точок $f(x_1)$ і $f(x_2)$ відповідно. Множини $f^{-1}(V_1)$ і $f^{-1}(V_2)$ є шуканими $\sigma(X, F)$-околами, що відокремлюють точки x_1 і x_2.

Необхідність. Нехай F не відокремлює точки множини X. Тоді існують такі $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, що $f(x_1) = f(x_2)$ для довільного $f \in F$. Візьмемо довільний $\sigma(X, F)$-окіл $U_{n,\{f_k\}_{k=1}^n,\{V_k\}_{k=1}^n}(x_1)$ точки x_1. Оскільки $f_k(x_1) = f_k(x_2)$ для всіх $k = 1, 2, \ldots, n$, тому і x_2 також лежатиме в $U_{n,\{f_k\}_{k=1}^n,\{V_k\}_{k=1}^n}(x_1)$. Отже, в цьому випадку для $\sigma(X, F)$ немає не лише відокремлюваності за Гаусдорфом: не виконується навіть перша аксіома відокремлюваності. □

Теорема 4.1.5. *Для того, щоб послідовність x_n, $n \in \mathbb{N}$ в X збігалася в топології $\sigma(X, F)$ до елемента $x \in X$, необхідно і досить, щоб умова*

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x) \tag{4.1.1}$$

виконувалась для всіх $f \in F$.

Доведення. З огляду на неперервність всіх $f \in F$ в $\sigma(X, F)$ необхідність очевидна. Доведемо достатність. Нехай (4.1.1) виконана для всіх $f \in F$. Нам потрібно довести, що для довільного околу вигляду $U = U_{m,\{f_k\}_{k=1}^m,\{V_k\}_{k=1}^n}(x)$ існує $N \in \mathbb{N}$ таке, що $x_n \in U$ для всіх $n > N$, тобто $x_n \in V_k$ для всіх $n > N$ і $k = 1, 2, \ldots, m$.

Для кожного $k = 1, 2, \ldots, m$, спираючись на умову (4.1.1) з $f = f_k$ оберемо $N_k \in \mathbb{N}$ таке, що $x_n \in V_k$ для всіх $n > N_k$. Тоді $N = \max\{N_k \colon 1 \leqslant k \leqslant M\}$ буде тим самим, що ми шукаємо. □

Нехай Γ – індексна множина (тобто множина, елементи якої надалі називатимуться індексами). Далі, нехай кожному індексу $\gamma \in \Gamma$ поставлено у відповідність деяку множину X_γ. *Декартовим добутком* множин X_γ по $\gamma \in \Gamma$ називається множина$\prod_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma$, яка складається з всіх функцій $x \colon \Gamma \to \bigcup_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma$,

що задовольняють для довільного $\gamma \in \Gamma$ умову $x(\gamma) \in X_\gamma$. В окремому випадку, коли всі X_γ дорівнюють одній і тій самій множині X, добуток складається з усіх функцій $x\colon \Gamma \to X$. В цьому випадку декартів добуток називається *декартовим степенем* і позначається X^Γ.

Значення функції $x \in \prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ часто позначають не $x(\gamma)$, а x_γ і сам елемент $x \in \prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ записують у вигляді $x = \{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ проіндексованої множини значень.

Для довільного $\alpha \in \Gamma$ відображення $P_\alpha\colon \prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma \to X_\alpha$, яке діє за правилом $P_\alpha(x) = x_\alpha$, називають *координатним проектором.*

Означення 4.1.6. Нехай всі X_γ, $\gamma \in \Gamma$ – топологічні простори. *Топологією Тихонова на* $\prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ називається найслабша з топологій, в яких неперервні всі координатні проектори P_α, $\alpha \in \Gamma$. Декартів добуток $\prod\limits_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$, наділений топологією Тихонова, називається *добутком Тихонова.*

Зазначимо, що координатні проектори очевидним чином відокремлюють точки добутку, отже, за теоремою 4.1.4, добуток Тихонова гаусдорфових просторів відокремлюваний за Гаусдорфом. Далі, за теоремою 4.1.5, правильне таке твердження.

Критерій збіжності в добутку Тихонова. послідовність $x_n = \{x_{n,\gamma}\}_{\gamma\in\Gamma}$, $n \in \mathbb{N}$ в $\prod\limits_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ збігається в топології Тихонова до елемента $y = \{y_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ тоді і тільки тоді, коли

$$y_\gamma = \lim_{n\to\infty} x_{n,\gamma} \tag{4.1.2}$$

для всіх $\gamma \in \Gamma$.

Цей критерій пояснює альтернативну назву для топології Тихонова: “топологія покоординатної збіжності”. Якщо елементи добутку сприймати як функції, умова (4.1.2) переписується у вигляді

$$y(\gamma) = \lim_{n\to\infty} x_n(\gamma),$$

що пояснює використання ще однієї назви“топологія поточкової збіжності”.

Опишемо в явному вигляді топологію Тихонова, тобто розпишемо детальніше в цьому частковому випадку вигляд околів топології, яка породжена сім'єю відображень. Нехай $x \in \prod\limits_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$; $N \subset \Gamma$ – скінченна множина індексів, $V_\gamma \subset X_\gamma$, $\gamma \in N$ – відкриті околи відповідних точок x_γ. Введемо позначення

$$U_{N,\{V_\gamma\}_{\gamma\in N}}(x) = \left\{ y \in \prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma : y_\alpha \in V_\alpha \text{ для всіх } \alpha \in N \right\}.$$

Теорема 4.1.7. *Множини вигляду $U_{N,\{V_\gamma\}_{\gamma\in N}}(x)$ утворюють у топології Тихонова базу околів точки $x \in \prod\limits_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$.*

Теорема 4.1.8 (теорема Тихонова про добуток компактів)**.** *Нехай X_γ, $\gamma \in \Gamma$ – компактний топологічний простір. Тоді добуток Тихонова $\prod\limits_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ також компактний.*

Доведення цієї теореми, що відноситься до курсу загальної топології, доволі складне, тому ми не будемо його наводити у нашому курсі. Тим чи іншим чином ця теорема доводиться в майже кожному підручнику з загальної топології. Сучасне доведення за допомогою критерію компактності в термінах ультрафільтрів виявляється дуже коротким та природнім, але для його розуміння необхідно оволодіти термінологією фільтрів і ультрафільтрів. Ця термінологія і відповідне доведення теореми Тихонова викладені, наприклад в розділ 16.1 підручника [Kad].

Вправи

1. Для випадку $\Gamma = \{1, 2\}$ та $X_1 = X_2 = \mathbb{R}$ визначення добутку Тихонова $\prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ узгоджується з визначенням простору $\mathbb{R}\times\mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ і стандартною топологією на $\mathbb{R}^2$.

2. Частковий випадок добутку Тихонова – степінь Тихонова X^Γ топологічного простору X – це простір всіх функцій $f\colon \Gamma \to X$. Випишіть в явному вигляді околи функції f в топології Тихонова.

3. Для часткового випадку степеня Тихонова – простору $[0, 1]^{[0,1]}$ всіх функцій $f\colon [0, 1] \to [0, 1]$ випишіть в явному вигляді околи функції f. Доведіть, що підмножина всіх поліномів із раціональними коефіцієнтами є щільною в $[0, 1]^{[0,1]}$, тобто $[0, 1]^{[0,1]}$ – сепарабельний простір.

Топологічний простір X називається *секвенційним компактом*, якщо в X із довільної послідовності елементів можна вибрати збіжну підпослідовність.

4. Простір $[0, 1]^{[0,1]}$, незважаючи на свою компактність, не є секвенційним компактом, бо з послідовності функцій $f_n(t) = \frac{1}{2}(1+\sin 2\pi nt$ не можна виділити поточково збіжну підпослідовність.

Підмножина A топологічного простору X називається *секвенційно щільною*, якщо для довільного $x \in X$ існує послідовність $a_n \in A$, яка збігається до X. Топологічний простір X називається *секвенційно сепарабельним*, якщо в X існує зліченна секвенційно щільна множина.

5. Секвенційно сепарабельний гаусдорфів топологічний простір не може мати потужності, більшої за потужність континуума.

6. Простір $[0, 1]^{[0,1]}$, незважаючи на свою сепарабельність, не є секвенційно сепарабельним.

7. Нехай G_γ – топологічні групи. Визначимо на добутку Тихонова $\prod\limits_{\gamma\in\Gamma} G_\gamma$ операцію $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}\cdot\{y_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}=\{x_\gamma\cdot y_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$. Перевірте, чи $\prod_{\gamma\in\Gamma} G_\gamma$ – топологічна група.

8. Нехай X – фіксована множина. Ототожнюючи підмножину $A\subset X$ з її характеристичною функцією $\mathbb{1}_A$, отримаємо природне ототожнення сім'ї 2^X всіх підмножин множини X з простором $\{0,1\}^X$ всіх функцій $f: X\to\{0,1\}$. Оскільки множина з двох точок – це (дискретний) компакт, простір $\{0,1\}^X=2^X$ – компакт у топології Тихонова. Опишіть в явному вигляді околи множини $A\subset X$ у топології Тихонова на 2^X та критерій збіжності у цій топології послідовності множин $A_n\subset X$ до множини $A\subset X$.

9. Введемо на множині з двох точок $\{0,1\}$ операцію додавання по модулю 2: $0+0=0, 0+1=1+0=1, 1+1=0$. Тоді $\{0,1\}$ ще й буде групою. Відповідно, $\{0,1\}^X$ стає топологічною групою, і сім'я 2^X всіх підмножин множини X також стає топологічною групою. Опишіть явно, яку операцію "суми множин" ми отримуємо в цій конструкції.

10. Оскільки $2^{\mathbb{N}}$ – це компактна топологічна група, на ній існує міра Гаара μ. Для кожного $n\in\mathbb{N}$ позначимо

$$U_n=\{A\subset\mathbb{N}\colon n\in A\},\quad V_n=\{A\subset\mathbb{N}\colon n\notin A\}.$$

Перевірте, що

(i) $\mu\{U_n\}=\mu\{V_n\}=\frac{1}{2}$.

(ii) U_n та V_n – відкриті множини в $2^{\mathbb{N}}$.

(iii) U_n та V_n – замкнені множини в $2^{\mathbb{N}}$.

(iv) Сім'я множин $U_n, n\in\mathbb{N}$ є незалежною в ймовірнісному просторі $(2^{\mathbb{N}},\mu)$.

(v) Означимо координатні проектори $P_n\colon 2^{\mathbb{N}}\to\{0,1\}$, $n\in\mathbb{N}$, що діють за правилом $P_n(A)=0$, якщо $n\notin A$ та $P_n(A)=1$, якщо $n\in A$. Доведіть, що сім'я координатних проекторів P_n є незалежною послідовністю випадкових величин на ймовірнісному просторі $(2^{\mathbb{N}},\mu)$.

11. Доведіть, що простір $2^{\mathbb{N}}$ гомеоморфний до канторової досконалої множини $K\subset[0,1]$, причому відповідний гомеоморфізм $f\colon 2^{\mathbb{N}}\to K$ можна задати формулою

$$f(A)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n}P_n(A).$$

4.2. Слабка із зірочкою топологія. Теорема Алаоглу

Нехай X – лінійний простір над $\mathbb{C}$. Декартів степінь $\mathbb{C}^X$ – це лінійний простір всіх комплекснозначних функцій на X. Визначимо на $\mathbb{C}^X$ топологію добутку Тихонова. Тоді $\mathbb{C}^X$ є топологічним простором з топологією, в якій базою околів кожного елемента g буде система множин виду

$$U_{G,\varepsilon}(g) = \{f \in \mathbb{C}^X : \max_{x\in G} |f(x) - g(x)| < \varepsilon\}, \tag{4.2.1}$$

де G пробігає всі скінченні підмножини простору X, а $\varepsilon > 0$. Позначимо X' простір всіх лінійних функціоналів. Кожний функціонал – це комплекснозначна функція, відповідно, X' можна розглядати як підмножину в $\mathbb{C}^X$.

Теорема 4.2.1. *X' – замкнена підмножина топологічного простору $\mathbb{C}^X$.*

Доведення. Для довільних $x_1, x_2 \in X$ та $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ визначимо функцію $F_{x_1,x_2,a_1,a_2} \colon \mathbb{C}^X \to \mathbb{C}$ рівністю

$$F_{x_1,x_2,a_1,a_2}(f) = f(a_1x_1 + a_2x_2) - a_1f(x_1) - a_2f(x_2).$$

Елемент $f \in \mathbb{C}^X$ є лінійним функціоналом тоді і тільки тоді, коли $F_{x_1,x_2,a_1,a_2}(f) = 0$ для всіх $x_1, x_2 \in X$ та $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$. Іншими словами,

$$X' = \bigcap_{x_1,x_2,a_1,a_2} (F_{x_1,x_2,a_1,a_2})^{-1}(0).$$

Всі функції F_{x_1,x_2,a_1,a_2} неперервні як лінійні комбінації координатних проекторів. Отже, множини $(F_{x_1,x_2,a_1,a_2})^{-1}(0)$ замкнені. Замкнений і X', що є перетином замкнених множин. □

Означення 4.2.2. Нехай X – комплексний банаховий простір, а X^*, як зазвичай, – простір неперервних лінійних функціоналів на X. Знову маємо природне включення $X^* \subset \mathbb{C}^X$. *Слабкою із зірочкою топологією* на X^* (позначається w^* від англійського weak-star) називається топологія на X^*, що індукована з $\mathbb{C}^X$. w^*-відкритими підмножинами в X^* будуть перетини X^* з відкритими підмножинами в $\mathbb{C}^X$. Базу околів елемента $g \in X^*$ утворюють перетини X^* з околами, що описані формулою (4.2.1). Інша назва для w^* – це *топологія поточкової збіжності на* X^*. Послідовність функціоналів $x_n^* \in X^*$ називається *w^*-збіжною* до функціонала $x^* \in X^*$ (позначення: $x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*$), якщо вона збігається в w^*-топології. Детальніше: $x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*$, якщо $x_n^*(x) \to x^*(x)$ $(n \to \infty)$ для довільного $x \in X$.

Теорема 4.2.3 (L. Alaoglu, 1940)**.** *Замкнена одинична куля $\bar{B}_{X^*}$ спряженого банахового простору X^* – це w^*-компакт.* [1]

Доведення. За означенням w^*-топологія індукована з $\mathbb{C}^X$, тому нам достатньо довести компактність $\bar{B}_{X^*}$ як підмножини степеня Тихонова $\mathbb{C}^X$. Функція $f \in \mathbb{C}^X$ належить до $\bar{B}_{X^*}$, якщо f – лінійний функціонал, і $|f(x)| \leqslant \|x\|$ для всіх $x \in X$. Іншими словами,

$$\bar{B}_{X^*} = X' \cap \prod_{x \in X} \mathbb{C}_{\|x\|},$$

$\mathbb{C}_{\|x\|}$ позначено замкнений круг в $\mathbb{C}$ з центром в нулі радіуса $\|x\|$. Відповідно до теореми 4.2.1, X' – замкнена підмножина топологічного простору $\mathbb{C}^X$, а за теоремою Тихонова про добуток компактів, $\prod_{x \in X} \prod_{x \in X} \mathbb{C}_{\|x\|}$ – компакт в $\mathbb{C}^X$. Отже, $\bar{B}_{X^*}$ – це перетин замкненої множини з компактом, тобто компакт. □

Нагадаємо, що в топології, яка задається нормою, куля нескінченновимірного банахового простору не може бути компактом (теорема Ріса). Це суттєво обмежує можливість застосування геометричної інтуїції в нескінченновимірному випадку: всі міркування, які спираються на вибір збіжної підпослідовності з обмеженої послідовності, є забороненими. Теорема Алаоглу дає надію на часткове зняття цієї заборони, принаймні для спряжених просторів і не для збіжності за нормою, а для слабшої – w^*-збіжності.

4.3. Компакт Гельфанда банахової алгебри

Нехай $\mathbf{A}$ – комутативна банахова алгебра, $\Delta(\mathbf{A})$ – множина всіх комплексних гомоморфізмів алгебри $\mathbf{A}$ (означення 3.2.1). Оскільки кожний комплексний гомоморфізм φ на комутативній банаховій алгебрі $\mathbf{A}$ є неперервним лінійним функціоналом з $\|\varphi\| = 1$, маємо включення $\Delta(\mathbf{A}) \subset \bar{B}_{\mathbf{A}^*}$.

Теорема 4.3.1. $\Delta(\mathbf{A})$ *– компактна в w^*-топології простору $\mathbf{A}^*$ підмножина одиничної кулі $\bar{B}_{\mathbf{A}^*}$.*

Доведення. Оскільки за теоремою Алаоглу $\bar{B}_{\mathbf{A}^*}$ – це w^*-компакт, нам потрібно лише довести замкненість множини $\Delta(\mathbf{A})$ Розмірковуватимемо по аналогії з теоремою 4.2.1. Для довільних $x_1, x_2 \in \mathbf{A}$ визначимо функції $F_{x_1,x_2} \colon \mathbf{A}^* \to \mathbb{C}$, а також функцію $G \colon \mathbf{A}^* \to \mathbb{C}$ рівностями

$$F_{x_1,x_2}(f) = f(x_1 x_2) - f(x_1) f(x_2), \quad G(f) = f(e).$$

[1] Алаоглу довів це твердження, узагальнивши результати Банаха, які були отримані раніше мовою поточково збіжних послідовностей і трансфінітних послідовностей функціоналів. Тому теорема часто цитується як теорема Банаха-Алаоглу.

Елемент $f \in \mathbf{A}^*$ є комплексним гомоморфізмом тоді і тільки тоді, коли $F_{x_1,x_2}(f) = 0$ для всіх $x_1, x_2 \in \mathbf{A}$ та $G(f) = 1$. Іншими словами,

$$\Delta(\mathbf{A}) = \bigcap_{x_1,x_2 \in \mathbf{A}} (F_{x_1,x_2})^{-1}(0) \bigcap G^{-1}(1).$$

Всі функції F_{x_1,x_2} і G неперервні в топології w^* як обмеження на $\mathbf{A}^*$ неперервних функцій на $\mathbb{C}^{\mathbf{A}}$. Отже, множини $(F_{x_1,x_2})^{-1}(0)$ і $G^{-1}(1)$ замкнені. З цього випливає замкненість множини $\Delta(\mathbf{A})$, що є перетином замкнених множин. □

Означення 4.3.2. Множина $\Delta(\mathbf{A})$, наділена w^*-топологією (точніше, топологією, що індукована з $(\mathbf{A}^*, w^*)$), називається *компактом Гельфанда банахової алгебри* $\mathbf{A}$.

В теорії комутативних банахових алгебр важливу роль відіграє $C(\Delta(\mathbf{A}))$ – простір неперервних комплекснозначних функцій на компакті Гельфанда.

Означення 4.3.3. *Перетворення Гельфанда* комутативної банахової алгебри $\mathbf{A}$ називається відображення $G\colon \mathbf{A} \to C(\Delta(\mathbf{A}))$, що діє за наступним правилом:

$$(Ga)(\varphi) = \varphi(a),$$

$a \in \mathbf{A}$, $\varphi \in \Delta(\mathbf{A})$.

Зберемо в купу елементарні властивості перетворення Гельфанда, перевірку яких залишимо читачеві.

Теорема 4.3.4. *Перетворення Гельфанда* $G\colon \mathbf{A} \to C(\Delta(\mathbf{A}))$ *комутативної банахової алгебри* $\mathbf{A}$ *є неперервним гомоморфізмом алгебр, і* $\|G\| = 1$.

Тепер перейдемо до більш ґрунтовного аналізу. Нагадаємо, що для $a \in \mathbf{A}$ його спектральним радіусом $r(a)$ називають мінімальний радіус круга з центром в нулі, в якому лежить спектр елемента a. Іншими словами, $r(a) = \max\{|\lambda|\colon \lambda \in \sigma(a)\}$.

Означення 4.3.5. *Радікалом* комутативної банахової алгебри $\mathbf{A}$ називається множина тих $a \in \mathbf{A}$, для яких спектр складається лише з точки нуль. Алгебра називається *півпростою*, якщо її радикал є тривіальним, тобто містить лише нульовий елемент. Іншими словами, $\mathbf{A}$ – півпроста алгебра, якщо $r(a) = 0$ тільки для $a = 0$.

Теорема 4.3.6. *Нехай* $\mathbf{A}$ *– комутативна банахова алгебра,* $G\colon \mathbf{A} \to C(\Delta(\mathbf{A}))$ *– її перетворення Гельфанда. Тоді*

(I) $(G(a))(\Delta(\mathbf{A})) = \sigma(a)$ для кожного $a \in \mathbf{A}$.

(II) $\|G(a)\| = r(a)$ для кожного $a \in \mathbf{A}$.

(III) $\ker G = \{a \in \mathbf{A} : \sigma(a) = \{0\}\}$.

(IV) Перетворення Гельфанда буде ін'єктивним тоді і тільки тоді, коли $\mathbf{A}$ – півпроста алгебра.

Доведення. Властивість (I) – це безпосередній наслідок теореми 3.2.5, решта ланка за ланкою випливають одне з одного. □

Вправи

1. Для банахової алгебри $C(K)$ перевірити, що відображення $t \mapsto \delta_t$, що розглядається в теоремі 3.2.7, буде не тільки бієкцією між K та $\Delta(C(K))$, але й також гомеоморфізмом цих двох компактів.

2. Для алгебри Вінера W в доведенні теореми 3.3.1 був у дещо замаскованому вигляді наведений наступний опис $\Delta(W)$: для кожного $\varphi \in \Delta(W)$ існує точка $\tau = \tau_\varphi \in [0, 2\pi)$ така, що $\varphi(f) = f(\tau)$ для всіх $f \in W$. Перевірте, що відображення $\varphi \mapsto \tau_\varphi$ є бієкцією між $\Delta(W)$ та $[0, 2\pi)$. Чи буде ця бієкція неперервною? Якому добре відомому Вам компакту буде гомеоморфний компакт $\Delta(W)$?

Розділ 5. Теорема Стоуна–Веєрштраса про підалгебри в $C(K)$

5.1. Крайні точки опуклих множин. Означення і приклади

Основною перевагою підходу до задач класичного аналізу, що пропонується в межах функціонального аналізу, є зведення аналітичних за формулюванням задач до задач геометричного характеру. Геометричні об'єкти, які при цьому виникають, лежать у нескінченновимірних просторах, але маніпулювати ними можна, використовуючи аналогію з фігурами на площині або в просторі. Щоб вільніше оперувати цією аналогією, розуміти, коли ця аналогія допомагає, а не навпаки, ми вивчили численні властивості просторів, підпросторів, опуклих множин, компактів, лінійних операторів, звертаючи кожен раз увагу на збіги і відмінності зі скінченновимірними варіантами цих властивостей. У цьому розділі до вже розробленого арсеналу геометричних прийомів додасться ще один: вивчення опуклої множини через її крайні точки. Хоча крайня точка – це пряме узагальнення вершини многокутника або многогранника, в рамках класичної геометрії для фігур загального вигляду цей чисто геометричний об'єкт не використовувався. Вивчення і застосування крайніх точок до задач геометрії (в тому числі скінченновимірної), функціонального аналізу, математичної економіки – це одне з досягнень двадцятого століття.

Означення 5.1.1. Нехай A – опукла підмножина лінійного простору X. Точка $x \in A$ називається *крайньою точкою* множини A, якщо вона не є серединою жодного невиродженого відрізка з кінцями, що лежать в A. Множина всіх крайніх точок множини A позначається $\operatorname{ext} A$.

Детальніше: $x \in \operatorname{ext} A$ тоді і тільки тоді, коли для будь-яких $x_1, x_2 \in A$, якщо $\frac{x_1+x_2}{2} = x$, то $x_1 = x_2$ (і, отже, обидва вектори x_1, x_2 збігаються з x).

Теорема 1. *Нехай A – опукла підмножина нормованого простору X. Тоді жодна внутрішня точка множини A не є крайньою точкою цієї множини.*

Доведення. Нехай $x \in A$ – внутрішня точка. Тоді існує таке $r > 0$, що $x + rB_X \subset A$. Нехай $y \in rB_X \setminus \{0\}$. Покладемо $x_1 = x + y$, $x_2 = x - y$. Тоді $x_1, x_2 \in A$, $\frac{x_1+x_2}{2} = x$, але $x_1 \neq x_2$. □

Отже, всі крайні точки підмножини нормованого простору лежать на її межі. Зрозуміло, це дуже неповна інформація про розташування крайніх точок. Зазначимо, що $\operatorname{ext} A$ залежить тільки від опуклої геометрії множини A і не залежить від того, в якому ширшому лінійному просторі розглядаються A, або від того, яка топологія задана на A. Межа ж, навпаки, залежить і від топології на A, і від того, в якому просторі A розглядається.

Теорема 2 (приклади).

(a) *Якщо A – опуклий многокутник на площині, то $\operatorname{ext} A$ – множина вершин многокутника.*

(b) *Якщо A – це круг, то $\operatorname{ext} A$ – коло.*

(c) *Множина крайніх точок замкненої одиничної кулі $\overline{B}_H$ гільбертового простору H – одинична сфера S_H.*

(d) *Замкнена одинична куля $\overline{B}_{c_0}$ простору c_0 не має жодної крайньої точки.*

Доведення. Пункти (a) і (b) очевидні. Перейдемо до твердження (c). За теоремою 1, $\operatorname{ext} \overline{B}_H \subset S_H$. Доведемо зворотне включення. Нехай $x, x_1, x_2 \in S_H$, $\frac{x_1+x_2}{2} = x$. Це означає, що $\|x_1\| = \|x_2\| = 1$ і $\|x_1 + x_2\| = 2$. Але тоді, за рівністю паралелограма,

$$\|x_1 - x_2\|^2 = \|x_1 + x_2\|^2 - 2\|x_1\|^2 - 2\|x_2\|^2 = 4 - 2 - 2 = 0,$$

тобто $x_1 = x_2$.

(d) Доведемо, що жоден елемент кулі $\overline{B}_{c_0}$ не буде крайньою точкою. Нехай $a = (a_1, a_2, \ldots) \in \overline{B}_{c_0}$. Це означає, що всі координати a_j не перевищують одиницю за модулем і $a_j \to 0$ $(j \to \infty)$. Остання умова означає, що існує таке n, що $|a_n| < \frac{1}{2}$. Розглянемо такі вектори x_1, x_2, що збігаються з a на всіх координатах, крім n-ої, а на n-ій координаті відрізняються від a на $\pm 1/2$:

$$x_1 = (a_1,\, a_2, \ldots,\, a_{n-1},\, a_n + 1/2,\, a_{n+1}, \ldots),$$

$$x_2 = (a_1,\, a_2, \ldots, a_{n-1},\, a_n - 1/2,\, a_{n+1}, \ldots).$$

Ці x_1, x_2 лежать в $\overline{B}_{c_0}$, $\frac{x_1+x_2}{2} = a$, але $x_1 \neq x_2$. □

Простий опис мають крайні точки декартового добутку опуклих множин.

Теорема 3. *Нехай* Γ *– індексна множина,* X_γ, $\gamma \in \Gamma$ *– лінійні простори,* $A_\gamma \subset X_\gamma$ *– опуклі підмножини. Тоді* $\operatorname{ext} \prod_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma = \prod_{\gamma\in\Gamma} \operatorname{ext} A_\gamma$.

Доведення. Нехай

$$x = (x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma} \in \prod_{\gamma\in\Gamma} \operatorname{ext} A_\gamma,$$

тобто $x_\gamma \in \operatorname{ext} A_\gamma$ при всіх $\gamma \in \Gamma$. Доведемо, що $x \in \operatorname{ext} \prod_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$. Розглянемо такі елементи $y = (y_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ і $z = (z_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ з $\prod_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$, що $\frac{y+z}{2} = x$. Тоді $\frac{y_\gamma+z_\gamma}{2} = x_\gamma$ і $y_\gamma, z_\gamma \in A_\gamma$. Оскільки $x_\gamma \in \operatorname{ext} A_\gamma$, звідси випливає, що $y_\gamma = z_\gamma$ при всіх $\gamma \in \Gamma$, тобто, що $y = z$. Цим доведено включення $\operatorname{ext} \prod_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma \supset \prod_{\gamma\in\Gamma} \operatorname{ext} A_\gamma$.

Тепер доведемо зворотне включення $\operatorname{ext} \prod\limits_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma \subset \prod\limits_{\gamma\in\Gamma} \operatorname{ext} A_\gamma$. Нехай

$$x = (x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma} \in \prod_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma \setminus \prod_{\gamma\in\Gamma} \operatorname{ext} A_\gamma.$$

Тоді існує індекс $\gamma_0 \in \Gamma$, при якому $x_{\gamma_0} \in A_{\gamma_0} \setminus \operatorname{ext} A_{\gamma_0}$. Останнє означає, що існують різні елементи y_{γ_0}, $z_{\gamma_0} \in A_{\gamma_0}$, для яких $\frac{y_{\gamma_0}+z_{\gamma_0}}{2} = x_{\gamma_0}$. Означимо елементи $y, z \in \prod_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ у такий спосіб: при $\gamma \neq \gamma_0$ координати елементів y, z покладемо однаковими і такими, що дорівнюють відповідній координаті елемента x, а для індексу γ_0 за координати візьмемо елементи y_{γ_0} і z_{γ_0} відповідно. За такої побудови $y \neq z$ (елементи відрізняються на координаті γ_0), але $\frac{y+z}{2} = x$. Отже, $x \notin \operatorname{ext} \prod_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$. □

З тієї теореми з очевидністю випливає опис крайніх точок двох важливих n-вимірних тіл.

Наслідок 1. *Крайніми точками* n*-вимірного куба* $[-1,1]^n$ *є ті і тільки ті вектори, всі координати яких дорівнюють* ± 1.

Введемо позначення $\mathbb{C}_1 = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leqslant 1\}$, $\mathbb{T}_1 = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$ (одиничний круг і одиничне коло).

Наслідок 2. *Множина крайніх точок* n-вимірного полікруга $(\mathbb{C}_1)^n$ *збігається* з кістяком полікруга $(\mathbb{T}_1)^n$.

Вправи

1. У просторі $C[0,1]$ замкнена одинична куля має тільки дві крайні точки: $f(t) \equiv 1$ і $f(t) \equiv -1$.

2. У просторі $L_1[0,1]$ замкнена одинична куля не має жодної крайньої точки.

3. При $1 < p < \infty$ кожен елемент одиничної сфери простору $L_p[0,1]$ – крайня точка замкненої одиничної кулі. Ця властивість простору зветься, строгою опуклістю.

4. Нехай X, Y – лінійні простори, $T\colon X \to Y$ ін'єктивний лінійний оператор. Тоді для будь-якої опуклої підмножини $A \subset X$ виконується рівність $T(\operatorname{ext} A) = \operatorname{ext} T(A)$.

5. Наведіть приклад, який показує, що умову ін'єктивності в попередній вправі відкинути не можна.

6. Для будь-якого опуклого компакту $A \subset \mathbb{R}^2$ множина $\operatorname{ext} A$ замкнена.

7. Наведіть приклад опуклого компакту $A \subset \mathbb{R}^3$ з незамкненою множиною крайніх точок.

5.2. Теорема Крейна-Мільмана

У цьому пункті буде доведено основний результат розділу – існування крайніх точок у будь-якого опуклого компакту в слабко відокремлюваному топологічному векторному просторі, зокрема в нормованому просторі.

Означення 5.2.1. Лінійний простір X (дійсний або комплексний) із заданою на ньому топологією τ називається *топологічним векторним простором*, якщо топологія τ так узгоджена з лінійною структурою, що відображення суми елементів і множення скаляра на елемент неперервні за сукупністю змінних.

Означення 5.2.2. Топологічний векторний простір X називається *слабко відокремлюваним*, якщо для будь-яких $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$ існує неперервний лінійний функціонал F на X з $F(x_1) \neq F(x_2)$.

Відмітимо, що у комплексному випадку, якщо $F(x_1) \neq F(x_2)$, то або $\operatorname{Re} F(x_1) \neq \operatorname{Re} F(x_2)$, або $\operatorname{Im} F(x_1) \neq \operatorname{Im} F(x_2)$, тобто в останньому означенні і в дійсному, і в комплексному випадках функціонал можна обрати дійсним.

В нашому курсі, від топологічних векторних просторів крім цих назв нам буде потрібне лише очевидне зауваження, що прикладами слабко відокремлюваних топологічних векторних просторів будуть, з одного боку, нормовані простори зі звичайною топологією, що породжена нормою, а з іншого боку, спряжені простори зі w^*-топологією. Зацікавленого читача відсилаємо до розділів 16 і 17 підручника [Kad], або до підручника [Rud], де можна знайти багато інших прикладів і фактів про топологічні векторні простори.

Означення 5.2.3. Нехай A – опукла підмножина лінійного простору X. Множина $B \subset A$ називається *крайньою підмножиною множини* A, якщо вона задовольняє такі вимоги:

– B непорожня;

– B опукла;

– для будь-яких $x_1, x_2 \in A$, якщо тільки $\frac{x_1+x_2}{2} \in B$, то $x_1, x_2 \in B$.

Очевидно, підмножина, що складається з однієї точки x, є крайньою тоді і тільки тоді, коли x – крайня точка. Якщо A – трикутник на площині, прикладом крайньої підмножини $B \subset A$ є сторона цього трикутника.

Лема 1. *Нехай X, Y – лінійні простори, $T\colon X \to Y$ лінійний оператор, $A \subset X$ – опукла підмножина. Тоді для будь-якої крайньої підмножини B множини $T(A)$ множина $T^{-1}(B) \cap A$ (повний прообраз в A множини B) є крайньою підмножиною вихідної множини A. Зокрема, повний прообраз в A крайньої точки множини $T(A)$ є крайньою підмножиною множини A.*

Доведення. Нехай x_1, $x_2 \in A$ і $\frac{x_1+x_2}{2} \in T^{-1}(B)$. Тоді $Tx_1, Tx_2 \in T(A)$ і $\frac{Tx_1+Tx_2}{2} \in B$. Оскільки B – крайня підмножина множини $T(A)$, це означає, що $Tx_1, Tx_2 \in B$, і, отже, $x_1, x_2 \in T^{-1}(B)$. □

Лема 2. *Нехай A – опукла множина, B – крайня підмножина в A, а C – крайня підмножина в B. Тоді C – крайня підмножина множини A. Зокрема, крайня точка крайньої підмножини – це крайня точка вихідної множини.*

Доведення. Нехай $x_1, x_2 \in A$ і $\frac{x_1+x_2}{2} \in C$. Тоді, зокрема, $\frac{x_1+x_2}{2} \in B$. Оскільки B – крайня підмножина множини A, звідси робимо висновок, що $x_1, x_2 \in B$. Згадуючи, що $\frac{x_1+x_2}{2} \in C$, а C – крайня підмножина в B одержуємо потрібну умову $x_1, x_2 \in C$. □

Тепер перейдемо від довільних лінійних просторів до локально опуклих топологічних векторних просторів і від довільних опуклих множин до опуклих компактів.

Лема 3. *Нехай A – опуклий компакт в топологічному векторному просторі X, f – неперервний дійсний лінійний функціонал на X і $b = \max\limits_{x \in A} f(x)$. Тоді множина $M(f, A) = \{x \in A : f(x) = b\}$ тих x, де f досягає свого максимального на A значення, – це крайня в A підмножина.*

Доведення. Множина $f(A)$ – це замкнений відрізок $[a, b]$, що сполучає мінімальне і максимальне на A значення функціонала f. Тому b – це крайня точка множини $f(A)$. За лемою 1, $M(f, A) = f^{-1}(b) \cap A$ – крайня підмножина. □

Лема 4. *Нехай A – опуклий компакт у топологічному векторному просторі X, $\mathfrak{M}$ – центрована сім'я замкнених крайніх підмножин множини A. Тоді $D = \bigcap_{B \in \mathfrak{M}} B$ – перетин всіх елементів сім'ї $\mathfrak{M}$ також утворює замкнену крайню підмножину множини A.*

Доведення. З компактності випливає, що D непорожня. Опуклість і замкненість успадковуються перетином множин, тому D опукла і замкнена. Нехай $x_1, x_2 \in A$ і $\frac{x_1+x_2}{2} \in D$. Тоді, зокрема, $\frac{x_1+x_2}{2} \in B$ для будь-якого $B \in \mathfrak{M}$. Отже, $x_1, x_2 \in B$ для всіх $B \in \mathfrak{M}$, тобто $x_1, x_2 \in \bigcap_{B \in \mathfrak{M}} B = D$. □

Лема 5. *Нехай A – опуклий компакт, що складається більш ніж з однієї точки, у слабко відокремлюваному топологічному векторному просторі. Тоді A містить замкнену крайню підмножину B, що не збігається зі самою множиною A.*

Доведення. Нехай $x_1, x_2 \in A$ і $x_1 \neq x_2$. Тоді існує дійсний неперервний функціонал f, значення якого в x_1 і x_2 не збігаються. Тоді f – це не тотожня стала на A, і за шукану B можна взяти множину $M(f, A)$ з леми 3. □

Теорема 1 (Крейна-Мільмана)[1]**.** *Будь-який опуклий компакт K у слабко відокремлюваному топологічному векторному просторі має крайні точки.*

Доведення. Розглянемо сім'ю $\mathfrak{E}$ усіх замкнених крайніх підмножин компакта K, впорядковану за спаданням множин. Згідно з лемою 4, $\mathfrak{E}$ – індуктивна впорядкована сім'я. За лемою Цорна, існує мінімальна за включенням замкнена крайня підмножина A компакта K. З огляду на лему 5, A складається з однієї точки. Ця точка і є шуканою крайньою точкою компакта K. □

Нижченаведений результат має численні застосування в задачах лінійної оптимізації і, зокрема, в задачах математичної економіки.

Теорема 2 (про максимум функціонала). *Нехай K – опуклий компакт у слабко відокремлюваному топологічному векторному просторі X, f – неперервний дійсний лінійний функціонал на X і $b = \max_{x \in K} f(x)$. Тоді існує точка $x \in \operatorname{ext} K$, в якій $f(x) = b$. Іншими словами, при пошуку максимуму лінійного функціонала на опуклому компакті достатньо розглядати значення у крайніх точках компакта.*

Доведення. За лемою 3 $M(f, K) = \{x \in K : f(x) = b\}$ – крайня підмножина компакта K, до того ж на підставі неперервності функціонала f – замкнена. Оскільки $M(f, K)$ – опуклий компакт, у нього є крайня точка x_0, і, за означенням множини $M(f, K)$, $f(x_0) = b$. Залишається скористатись лемою 2: крайня точка крайньої підмножини – це крайня точка вихідної множини. □

---

[1] Марк Григорович Крейн і Давид Пінхусович Мільман – видатні одеські математики. Тому, на відміну від теорем львівської школи Банаха, які лише з огляду на післявоєнні геополітичні зміни стали «українськими», теорема Крейна-Мільмана – «суто українська», і при її згадуванні наші патріотичні почуття можуть розквітати із законним на те правом. Пишу дещо іронічно, бо насправді математика єдина і взагалі не має поділятися за національними, релігійними чи то гендерними ознаками.

Особливо ефективним є використання теореми про максимум функціонала, коли K – скінченновимірний багатогранник. Тоді $\operatorname{ext} K$ – скінченна множина, і задача обчислення максимуму лінійного функціонала зводиться до скінченного (нехай навіть і великого) перебору. Цей перебір можна здійснити, зокрема, за допомогою знаменитого симплекс-методу Канторовича, про який можна прочитати в будь-якому підручнику з лінійного програмування.

Отже, можна зробити висновок, що в опуклого компакта не просто є крайні точки, а цих точок «багато». Наприклад, можна довести що у нескінченновимірного компакту нескінченна кількість крайніх точок.

Розглянувши слабку із зірочкою топологію, одержуємо такий наслідок.

Наслідок 2. *Нехай X – банахів простір. Тоді будь-яка опукла слабко із зірочкою замкнена обмежена підмножина простору X^* і, зокрема, замкнена одинична куля має крайні точки. Якщо простір нескінченновимірний, замкнена одинична куля простору X^* має нескінченне число крайніх точок.*

Тому простори c_0, $L_1[0,1]$ і $C[0,1]$ не спряжені до жодного банахового простору (тобто не ізометричні жодному простору вигляду X^*).

Вправа*. Одиничний елемент будь-якої банахової алгебри $\mathbf{A}$ – крайня точка кулі $\overline{B}_{\mathbf{A}}$.

5.3. Теорема Стоуна-Вейєрштрасса

У цьому пункті ми ознайомимося з надзвичайно гарним і одночасно дуже корисним узагальненням теореми Вейєрштрасса про наближення функції поліномами. Це узагальнення, придумане Стоуном (M. H. Stone), застосовне до функцій не тільки на відрізку, але і на будь-якому компакті. Доведення, що наводиться нижче, належить де Бранжу (L. de Branges, 1959). Застосування цієї ж ідеї доведення до ще загальнішого результату – теореми Бішопа (E. Bishop) можна прочитати в книзі [Rud].

Будемо, як звичайно, неперервні функціонали на $C(K)$ ототожнювати з регулярними борелевими зарядами, які їх породжують. Зокрема, δ_x (ймовірнісна міра, зосереджена в точці x) можна розглядати як функціонал на $C(K)$, який діє так:

$$\langle \delta_x, f\rangle = \int\limits_K f d\delta_x = f(x).$$

Тобто δ_x ототожнюється з функціоналом «значення в точці x».

І ще трохи термінології. *Носієм* регулярного борелевого заряду σ називається носій міри $|\sigma|$. Як і для мір, носій заряду σ позначається символом $\operatorname{supp}\sigma$. Очевидно, $\operatorname{supp}\delta_x = \{x\}$, і якщо $\operatorname{supp}\sigma = \{x\}$, то $\sigma = \lambda\delta_x$, де λ – ненульовий скаляр.

Для будь-якої вимірної за Борелем обмеженої функції g на K і будь-якого борелевого заряду σ через $g \times \sigma$ позначимо борелів заряд, що набуває такі значення:

$$(g \times \sigma)(A) = \int\limits_A g d\sigma.$$

Функціонал, що породжується зарядом $g \times \sigma$, діє за правилом $\langle g \times \sigma, f \rangle = \int_K fgd\sigma$. Введена операція має природні властивості множення:

$\mathbb{1} \times \sigma = \sigma$;

$(g + h) \times \sigma = g \times \sigma + h \times \sigma$;

$(gh) \times \sigma = (hg) \times \sigma = h \times (g \times \sigma)$;

$g \times (\nu + \sigma) = g \times \nu + g \times \sigma$.

Нарешті, норма заряду $g \times \sigma$ обчислюється за правилом $\|g \times \sigma\| = \int\limits_K |g| \, d\,|\sigma|$.

Теорема Стоуна-Вейєрштрасса. *Нехай лінійний підпростір X простору $C(K)$ має такі властивості:*

(a) $\mathbb{1} \in X$;

(b) якщо $f, g \in X$, то $fg \in X$ (іншими словами, X – підалгебра алгебри $C(K)$);

(c) для будь-якої функції $f \in X$ її комплексно спряжена $\overline{f}$ також належить X;

(d) для будь-яких $t_1, t_2 \in K$, $t_1 \neq t_2$ існує $f \in X$ з $f(t_1) \neq f(t_2)$ (тобто X відокремлює точки компакта K).

Тоді підпростір X щільний в $C(K)$.

Доведення. Припустимо, що твердження не виконується і підпростір X не щільний в $C(K)$. Тоді анулятор $X^\perp \subset C(K)^*$ складається не тільки з нуля. Оскільки $X^\perp$ – це слабко із зірочкою замкнений підпростір в $C(K)^*$, отже, за теоремою Алаоглу, $\overline{B}_{X^\perp} = \overline{B}_{C(K)^*} \cap X^\perp$ – слабкий із зірочкою компакт. Згідно з теоремою Крейна–Мільмана, у кулі $\overline{B}_{X^\perp}$ існує крайня точка ν. Очевидно, $\nu \in S_{X^\perp}$, тобто $\|\nu\| = 1$. Ми вивчимо властивості цього регулярного борелевого заряду ν і переконаємось, що вони внутрішньо суперечливі. Спочатку декілька корисних зауважень про властивості множин X і $X^\perp$:

(i) якщо $f \in X$, то $\operatorname{Re} f \in X$ і $\operatorname{Im} f \in X$ (випливає з умови (c) і формул $\operatorname{Re} f = \frac{f+\bar{f}}{2}$, $\operatorname{Im} f = \frac{f-\bar{f}}{2i}$).

(ii) Якщо $f \in X$, $\eta \in X^\perp$, то $f \times \eta \in X^\perp$, де $\times$ – операція, означена на початку цього пункту. Справді, для будь-якого $g \in X$ добуток fg також

належить до X і, отже, анулюється зарядом η. Маємо: $\langle f \times \eta, g\rangle = \langle \eta, fg\rangle = 0$, тобто $f \times \eta \in X^{\perp}$.

(iii) Якщо $\eta \in X^{\perp}$, то $\operatorname{supp}\eta$ містить принаймні дві різні точки. Справді, якщо $\operatorname{supp}\eta = \{t\}$, то $\eta = a\delta_t$ з $a \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Тоді $\langle \eta, \mathbb{1}\rangle = a \neq 0$, тобто $\eta \notin X^{\perp}$.

Тепер повернемося до заряду $\nu \in S_{X^{\perp}}$, що претендує на роль крайньої точки кулі $\overline{B}_{X^{\perp}}$. Скористаємось властивістю (iii). Нехай $t_1, t_2 \in \operatorname{supp}\nu$ і $t_1 \neq t_2$. Згідно з умовою (d), існує $f \in X$ з $f(t_1) \neq f(t_2)$. Тоді або $\operatorname{Re} f(t_1) \neq \operatorname{Re} f(t_2)$, або $\operatorname{Im} f(t_1) \neq \operatorname{Im} f(t_2)$. Згідно з (i), $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f \in X$. Відповідно, f можна вважати дійснозначною функцією: інакше замінимо її на $\operatorname{Re} f$ або $\operatorname{Im} f$. Далі, додавши до f велику додатну сталу, можна досягти додатності функції, а помноживши на маленький додатний коефіцієнт, одержимо функцію, всі значення якої лежать на відрізку $(0, 1)$. Отже, існує $f \in X$ з $f(t_1) \neq f(t_2)$, що задовольняє умову $0 < f(t) < 1$ для всіх $t \in K$.

Введемо в розгляд допоміжні заряди $\nu_1 = f \times \nu$ і $\nu_2 = (1 - f) \times \nu$. Тоді

$$\|\nu_1\| = \int_K f d\,|\nu|, \quad \|\nu_2\| = \int_K (1-f) d\,|\nu|,$$

і обидва ці числа не дорівнюють нулю, оскільки, за побудовою, функції f і $1 - f$ не перетворюються в нуль. Далі,

$$\|\nu_1\| + \|\nu_2\| = \int\limits_K d\,|\nu| = 1.$$

Випишемо очевидну рівність $\|\nu_1\| \frac{\nu_1}{\|\nu_1\|} + \|\nu_2\| \frac{\nu_2}{\|\nu_2\|} = \nu$. Геометричний зміст цієї рівності такий: вектор $\nu \in \overline{B}_{X^{\perp}}$ є внутрішньою точкою відрізка, що з'єднує вектори $\frac{\nu_1}{\|\nu_1\|} \in \overline{B}_{X^{\perp}}$ і $\frac{\nu_2}{\|\nu_2\|} \in \overline{B}_{X^{\perp}}$ (належність зарядів ν_1, ν_2 до підпростору $X^{\perp}$ випливає з (ii)). Оскільки за нашим припущенням ν – крайня точка кулі $\overline{B}_{X^{\perp}}$, кінці відрізка повинні збігатися з ν:

$$\frac{\nu_1}{\|\nu_1\|} = \frac{\nu_2}{\|\nu_2\|} = \nu.$$

Зокрема, $\nu_1 = \|\nu_1\|\,\nu$, тобто $(f - \|\nu_1\|) \times \nu = 0$. Згадавши формулу для норми заряду, маємо $\int_K |f - \|\nu_1\|\,|\,d\,|\nu| = 0$. З огляду на неперервність функції f остання рівність означає, що $f(t) = \|\nu_1\|$ для всіх $t \in \operatorname{supp}\,\nu$. Ми прийшли до суперечності з умовою $f(t_1) \neq f(t_2)$. □

Вправи

Виведіть з теореми Стоуна-Вейєрштрасса:

1. Щільність множини поліномів в $C(K)$, де K – компакт в $\mathbb{R}$ (зокрема, для $C[a, b]$).

2. Щільність множини поліномів від n змінних в $C(K)$, де K – компакт в $\mathbb{R}^n$

3. Щільність множини «двобічних» поліномів вигляду $\sum_{k=-n}^{n} a_k z^k$, $n \in \mathbb{N}$, у просторі $C(\mathbb{T})$ неперервних функцій на колі $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

Розглянемо піввісь $[0, +\infty]$ – компактифікацію півосі $[0, +\infty)$. Околи скінченних точок півосі означаються, як звичайно, а околами точки $+\infty$ є доповнення до обмежених множин. Перевірте, що:

4. $[0, +\infty]$ – компакт в цій топології.

5. Простір $C[0, +\infty]$ збігається з простором всіх неперервних функцій $f(t)$ на $[0, +\infty)$, які мають границю при $t \to \infty$.

6. Множина експонент вигляду e^{-at}, де $a \in [0, +\infty)$ – це повна в $C[0, +\infty]$ система елементів.

Бібліоґрафія

[Kad] Кадець В.М. Курс функціонального аналізу та теорії міри. Підручник. – Львів: Видавець І.Е. Чижиков, 2012. – 590 с. (Серія “Університетська бібліотека”).

[Rud] Рудин У. Функциональный анализ. – М. : Мир, 1975.

[Bea] Beauzamy B. Introduction to operator theory and invariant subspaces. – Amsterdam : North-Holland, 1988.

[Wer] Werner D. Funktionalanalysis. 2. Auflage. – Berlin: Springer-Verlag, 1997.