Варіант ...

Задача 1. На координатній площині $\mathbb{R}^2$ зі звичайною метрикою задані наступні підмножини:

$$A_1 = \{(3\cos t, 4\sin t)\colon 0 < t \leqslant 2\pi\}, \quad A_2 = \{(3(2-\cos t), 4\sin t)\colon 0 < t \leqslant \pi\},$$
$$A_3 = A_1 \cup A_2, \qquad A_4 = \operatorname{conv}(A_1) \cup A_2.$$

Про кожну з цих множин відповісти на наступні питання: чи є множина (1) відкритою, (2) замкненою, (3) передкомпактом, (4) опуклою, (5) гомеоморфною опуклій множині, (6) ретрактом опуклого компакта? (7) Чи володіє множина властивістю нерухомої точки?

Задача 2. Розглянути двовимірний нормований простір $X = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ з нормою, що задана формулою $\|(a,b)\| = \max\left\{|a|, \dfrac{|a|}{2} + |b|\right\}$. Намалюйте на координатній площині одиничну кулю B цього простору. Чи буде відображення $T\colon X \to X$, визначене формулою $T(a,b) = (1 - \|(a,b)\|, 0)$, лінійним оператором? Чи буде B інваріантною підмножиною для T? Чи буде T підкорятися умові Ліпшиця? Описати нерухомі точки відображення T.

Задача 3. В банаховому просторі $L_1[0,1]$ задана підмножина

$$S = \{x \in L_1[0,1]\colon x \geqslant 0 \text{ м.с.}, \int_0^1 \frac{x(t)}{t} dt = 1\}.$$

Чи є ця множина (1) опуклою, (2) замкненою, (3) передкомпактом? Чи має S внутрішні точки? Чому дорівнює діаметр множини S? Описати діаметральні точки множини S. Чи має множина S властивість нерухомої точки?