

Варіант ...

**Задача 1.** Для самоспряженого оператора  $T \in L(H)$  розглянути наступні властивості:

- (i)  $T^2 = I$ ;
- (ii)  $T$  має зображення у вигляді  $P_1 - P_2$ , де  $P_1, P_2$  – проектори.
- (iii)  $\sigma(T) \subset \{-1, 1\}$

Які з імплікацій  $(i) \Rightarrow (ii)$ ,  $(ii) \Rightarrow (i)$ ,  $(i) \Rightarrow (iii)$ ,  $(iii) \Rightarrow (i)$ ,  $(ii) \Rightarrow (iii)$ ,  $(iii) \Rightarrow (ii)$  є вірними?

**Задача 2.** Чи може різниця двох унітарних операторів  $P_1, P_2 \in L(\ell_2)$ , бути унітарним оператором? Якщо так – навести приклад, якщо ні – довести.

**Задача 3.** Для гільбертова простору  $H = L_2[0, 2]$  і оператора  $T : H \rightarrow H$ ,  $(Tf)(t) = f(t) - \frac{1}{2} \int_0^2 \tau f(\tau) d\tau$  виконати наступні завдання та відповісти на питання.

- (i) Перевірити лінійність і неперервність оператора.
- (ii) Чи буде  $T$  скінченнонімірним оператором?
- (iii) Чи буде  $T$  компактним оператором?
- (iv) Чи буде  $T$  біективним оператором?
- (v) Чи буде  $T$  проектором?
- (vi) Обчислити оператор  $T^*$ . Чи буде  $T$  самоспряженим оператором?
- (vii) Чи буде  $T$  ортопроектором?
- (viii) Описати ядро та образ оператора  $T$ .
- (ix) Чи буде  $T$  нормальним оператором?
- (x) Знайти власні числа оператора  $T$ .
- (xi) Знайти спектр оператора  $T$ .
- (xii) Знайти норму оператора  $T$ .

**Задача 4.** Нехай множина  $A$  міститься водночас в просторах  $X = \ell_2$  та  $Y = \ell_1$ . Чи може  $A$  бути замкненою в  $X$  та незамкненою в  $Y$ ? Навпаки, замкненою в  $Y$  та незамкненою в  $X$ ? Чи зміняться відповіді за додаткової умови опукlostі множини  $A$ ? Ті ж самі питання з заміною замкненості на 1) відкритість, 2) компактність.