Індивідуальне завдання № 2

**Задача 1**. Для даної функції $f$ на відрізку $[a, b]$ з'ясувати, чи буде функція (1) вимірною; (2) інтегровною за Ріманом; (3) інтегровною за Лебегом; (4) неперервною; (5) обмеженою; (6) монотонною; (7) неперервною майже скрізь. Якщо функція інтегровна, обчислити її інтеграл по відрізку $[a, b]$. Чи можна цю функцію зобразити у вигляді поточкової границі деякої послідовності $f_1 \leqslant f_2 \leqslant f_3 \ldots$ неперервних функцій? Побудувати просту функцію, таку що наближує $f$ на $[a, b]$ з точністю до $\varepsilon = \dfrac{1}{3}$.

$$\text{A.} \quad f(t) = \mathbb{1}_{[0,1)}(t)t + \mathbb{1}_{[1,2]}(t)t^2; a = 0, b = 2,$$

$$\text{B.} \quad f(t) = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(t) + \frac{1}{t}\mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(t); a = 0, b = 1.$$

**Задача 2**. Нехай $A$ – борелева множина на $\mathbb{R}$, $B = \{t \in A : t^2 \in A\}$. Чи повинна множина $B$ бути борелевою на $\mathbb{R}$?

**Задача 3**. Нехай $f_1$, $f_2$ – вимірні функції на $[0, 1]$. Довести, спираючись на критерій вимірності, що функція $g = \max\{f_1, f_2\}$ вимірна. Чи повинна $g$ бути інтегровною на $[0, 1]$, якщо $f_1$ та $f_2$ інтегровні?

**Задача 4**. Чи буде послідовність функцій $f_n(t) = nt^2\mathbb{1}_{(0,n^{-1})}(t)$ на відрізку $[0, 1]$ збігатися на цьому відрізку (1) поточково; (2) майже скрізь; (3) за мірою; (4) рівномірно?