Індивідуальне завдання № 1

Задача 1. Чи буде дана множина в метричному просторі $X = \mathbb{R}$ відкритою? Замкненою? Множиною класу G_δ? Чи буде вона щільною в X? Ніде не щільною? Множиною першої категорії? Чому дорівнює її замикання? Відповіді пояснити.

$$1)\ A = ((-2,5] \cup [3,8)) \triangle [0,2], \quad 2)\ A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{n}, n\right], \quad 3)\ A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}.$$

Задача 2. Надати означення замкненої кулі в метричному просторі. Розглянути наступні кулі в метричному просторі $E = \mathbb{R}^2$: $\bar{B}(x,1)$, $\bar{B}(y,1)$, де $x = (0,0)$, $y = (1,1)$. Чи будуть ці кулі перетинатися? Відповідь обґрунтувати.

Задача 3. Надати означення діаметра множини в метричному просторі. Чому дорівнює діаметр множини $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ в просторі $C[0,1]$, $f_n(t) = \dfrac{1}{t+n}$?

Задача 4. Надати означення алгебри множин. На $\Omega = [0,4]$ задана сім'я множин $G = \{(0,3),(2,3)\}$. Знайти найменшу алгебру множин, таку що містить у собі сім'ю G.