Розділ 14. Оператори в L_p

У цьому розділі (Ω, Σ, μ) буде простором з мірою (скінченною або σ-скінченною), а параметр p задовольняє умову $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Для зручності в подальших застосуваннях до рядів Фур'є й інтеграла Фур'є простір $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ буде розглядатись як простір комплекснозначних функцій. Зазначимо, що в більшості питань теорії просторів L_p відмінність між дійсним і комплексним випадками неістотна.

14.1. Лінійні функціонали в L_p

Основне завдання, яке стоїть перед нами в цьому підрозділі, — це доведення теореми про загальний вигляд лінійного функціонала в L_p.

14.1.1. Нерівність Гельдера

Означення. Для будь-якого $1 < p < \infty$ *спряженим показником* називається число $p' = \frac{p}{p-1}$. Для $p = 1$ за спряжений показник p' приймають $+\infty$, а для $p = +\infty$ покладають $p' = 1$.

Величини p і p' пов'язані співвідношенням $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Зазначимо, що $(p')' = p$, і що якщо $1 \leqslant p \leqslant 2$, то $2 \leqslant p' \leqslant \infty$, і, нарешті, $2' = 2$.

Лема. *Для будь-яких скалярів $a, b \geqslant 0$ і $1 < p < \infty$ виконується нерівність*

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}. \tag{1}$$

Доведення. Ліва частина нерівності (1) дорівнює площі прямокутника $[0, a] \times [0, b]$, а доданки, що стоять у правій частині, дорівнюють відповідно площам фігур $S_1 = \{(x, y) : 0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant x^{p-1}\}$ і $S_2 = \{(x, y) : 0 \leqslant y \leqslant b,\ 0 \leqslant x \leqslant y^{p'-1}\}$. На підставі рівності $p' - 1 = \frac{1}{p-1}$ межі $y = x^{p-1}$ і $x = y^{p'-1}$ цих фігур проходять по одній і тій самій кривій. Залишається зазначити, що $[0, a] \times [0, b] \subset S_1 \cup S_2$ (відповідний малюнок пропонуємо читачеві зробити самостійно). □

Теорема. *Нехай $f \in L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$, $g \in L_{p'}(\Omega, \Sigma, \mu)$. Тоді $fg \in L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ і справ-*

Наведений учбовий текст є витягом з підручнику
Кадець В.М. Курс функціонального аналізу та теорії міри. – Львів: Видавець І.Е. Чижиков, 2012. – 590 с. – (Серія "Університетська бібліотека") ISBN 978-966-2645-03-3
Усі посилання на теореми, вправи, означення, такі що не увійшли до цього тексту – це посилання на підручник.

джується така нерівність Гельдера: $\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_{p'}$. *Детальніший запис:*

$$\int_\Omega |fg|\, d\mu \leqslant \left(\int_\Omega |f|^p\, d\mu\right)^{1/p} \left(\int_\Omega |g|^{p'}\, d\mu\right)^{1/p'}.$$

Доведення. Розглянемо випадок $1 < p < \infty$. Прості випадки $p = 1, \infty$ залишимо читачеві. Підставивши в нерівність (1) $|f(t)|$ замість a і $|g(t)|$ замість b, одержимо оцінку

$$|f(t)g(t)| \leqslant \frac{|f(t)|^p}{p} + \frac{|g(t)|^{p'}}{p'}. \tag{2}$$

Тобто вимірна функція fg має інтегровну мажоранту і, отже, сама інтегровна. Далі, нерівність Гельдера стійка щодо множення функцій f і g на скаляри. Тому її достатньо доводити для випадку $\|f\|_p = \|g\|_{p'} = 1$. Скористаємось нерівністю (2):

$$\|fg\|_1 = \int_\Omega |fg| d\mu \leqslant \int_\Omega \left(\frac{|f|^p}{p} + \frac{|g|^{p'}}{p'}\right) d\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 = \|f\|_p \|g\|_{p'}. \qquad \square$$

Вправи

1. Виведіть з нерівності Гельдера нерівність Коші-Буняковського в L_2.

2. Виведіть як частковий випадок нерівності Гельдера таку нерівність Гельдера для рядів: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k b_k| \leqslant \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} |b_k|^{p'}\right)^{1/p'}$.

3. Опишіть ті пари функцій (f, g), для яких нерівність Гельдера перетворюється в рівність.

4. У доведенні нерівності Гельдера умова σ-скінченності міри не використовувалась і, отже, неістотна.

14.1.2. Зв'язок між L_p при різних p

Теорема 1. *Нехай* (Ω, Σ, μ) *— простір зі скінченною мірою,* $1 \leqslant p_1 < p_2 \leqslant \infty$. *Тоді* $L_{p_1}(\Omega, \Sigma, \mu) \supset L_{p_2}(\Omega, \Sigma, \mu)$ *і*

$$\|f\|_{p_1} \leqslant \|f\|_{p_2} \mu(\Omega)^{1/p_1 - 1/p_2} \tag{3}$$

для будь-якого $f \in L_{p_2}(\Omega, \Sigma, \mu)$.

Доведення. Нехай $p_2 < \infty$, $f \in L_{p_2}(\Omega, \Sigma, \mu)$. Для оцінки зверху виразу $\int_\Omega |f|^{p_1} d\mu$ скористаємось нерівністю Гельдера з показником $p = \frac{p_2}{p_1}$ і, відповідно, $p' = \frac{p_2}{p_2 - p_1}$:

$$\int_\Omega |f|^{p_1}\, d\mu = \int_\Omega |f|^{p_1} \cdot 1\, d\mu \leqslant \left(\int_\Omega |f|^{p_1 p}\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega 1\, d\mu\right)^{\frac{1}{p'}} =$$

$$= \left(\int_\Omega |f|^{p_2}\, d\mu\right)^{\frac{p_1}{p_2}} (\mu(\Omega))^{\frac{p_2 - p_1}{p_2}}.$$

Залишається піднести обидві частини нерівності до степеня $1/p_1$. Випадок $p_2 = \infty$ розбирається зовсім просто. Нехай $f \in L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$. Тоді $|f(t)| \leqslant \|f\|_\infty$ для майже всіх значень $t \in \Omega$. Отже,

$$\left(\int\limits_\Omega |f|^{p_1}\, d\mu\right)^{1/p_1} \leqslant \|f\|_\infty \left(\int\limits_\Omega d\mu\right)^{1/p_1} = \|f\|_\infty \, \mu(\Omega)^{1/p_1}. \qquad \square$$

Зазначимо, що найпростіше нерівність (3) виглядатиме у випадку ймовірнісного простору (Ω, Σ, μ), коли $\mu(\Omega) = 1$ і, відповідно, $\|f\|_{p_1} \leqslant \|f\|_{p_2}$.

Наслідок 1. *Нехай (Ω, Σ, μ) — простір зі скінченною мірою, $1 \leqslant p_1 \leqslant p_2 \leqslant \infty$, $f_n, f \in L_{p_2}(\Omega, \Sigma, \mu)$ і $\|f_n - f\|_{p_2} \to 0$ $(n \to \infty)$. Тоді $\|f_n - f\|_{p_1} \to 0$ $(n \to \infty)$. Іншими словами, із збіжності в L_p з більшим p випливає збіжність в L_p з меншим p.*

Наслідок 2. *Нехай (Ω, Σ, μ) — простір зі скінченною мірою, $1 \leqslant p_1 \leqslant p_2 \leqslant \infty$, $A \subset L_{p_2}(\Omega, \Sigma, \mu)$ і A замкнена в метриці простору $L_{p_1}(\Omega, \Sigma, \mu)$. Тоді A замкнена і в метриці простору $L_{p_2}(\Omega, \Sigma, \mu)$.*

Теорема 2. *Нехай $1 \leqslant p_1 \leqslant p_2 \leqslant \infty$. Тоді $l_{p_1} \subset l_{p_2}$ і*

$$\|x\|_{p_2} \leqslant \|x\|_{p_1} \tag{4}$$

для будь-якого $x \in l_{p_1}$.

Доведення. Враховуючи зв'язок між одиничною кулею і нормою простору, нам потрібно довести включення $B_{l_{p_1}} \subset B_{l_{p_2}}$. Нехай $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in B_{l_{p_1}}$. Тоді $\sum_{k=1}^\infty |x_k|^{p_1} < 1$. Зокрема, $|x_k| < 1$ і $|x_k|^{p_2} \leqslant |x_k|^{p_1}$ при всіх k. Отже,

$$\sum_{k=1}^\infty |x_k|^{p_2} \leqslant \sum_{k=1}^\infty |x_k|^{p_1} < 1,$$

тобто $x \in B_{l_{p_2}}$. Цим розібрано випадок $p_2 < \infty$. При $p_2 = \infty$ нерівність (4) набуває вигляду $\sup_k |x_k| \leqslant \left(\sum_{k=1}^\infty |x_k|^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}}$ і випливає з того, що сума додатних доданків більша будь-якого з доданків. $\square$

Хоча збіжність в L_p і не можна задовільно описати в термінах збіжностей, які використовувались в теорії міри й інтеграла[1], деякий зв'язок з цими відомими нам видами збіжностей все ж є. Наступна теорема допоможе краще зрозуміти, як влаштована збіжність в L_p.

Теорема 3. *Нехай (Ω, Σ, μ) — простір з мірою (скінченною чи σ-скінченною), $p \in [1, \infty)$, $f_n, f \in L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$. Тоді*

(i) якщо $f_n \to f$ в L_p-метриці, то:

  (a) на будь-якій множині $A \in \Sigma$ скінченної міри $f_n \to f$ за мірою;

  (b) існує підпослідовність послідовності (f_n), збіжна до f майже скрізь на Ω.

(ii) якщо $f_n \to f$ майже скрізь на Ω і у всіх f_n існує спільна мажоранта $g \in L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$, то $f_n \to f$ в L_p-метриці.

[1] За винятком L_∞, де послідовність f_n збігається тоді і тільки тоді, коли існує множина міри 0, за межами якої f_n збігається рівномірно.

Доведення. Частина (a) твердження (i) випливає з нерівності Чебишова (лема п. 4.3.1). Справді, для будь-якого $\varepsilon > 0$ введемо позначення $B_{n,\varepsilon} = \{ t \in A : |f_n(t) - f(t)| > \varepsilon\}$. Застосувавши нерівність Чебишова до функції $|f_n - f|^p$, яка більша на множині $B_{n,\varepsilon}$ числа ε^p, отримуємо оцінку

$$\mu\left(B_{n,\varepsilon}\right) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^p} \int\limits_A |f_n - f|^p \, d\mu \leqslant \frac{1}{\varepsilon^p} \|f_n - f\|^p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

що й означає збіжність за мірою.

Доведемо частину (b). Якщо $\mu(\Omega) < \infty$, то, згідно (a), $f_n \to f$ за мірою на всьому Ω, і залишається скористатись тим, що збіжна за мірою послідовність містить підпослідовність, збіжну майже скрізь. Нехай тепер Ω — множина σ-скінченної міри. Розіб'ємо Ω в диз'юнктне об'єднання множин Ω_m, $m = 1, 2, \ldots$, скінченної міри. Послідовно використовуючи на кожному з Ω_m теорему про вибір збіжної майже скрізь підпослідовності з послідовності, збіжної за мірою, побудуємо нескінченні множини індексів $\supset N_1 \supset N_2 \supset N_3 \supset \ldots$ у такий спосіб, щоб на кожному з Ω_m послідовність $\{f_n\}_{n\in N_m}$ збігалась майже скрізь. Вибравши діагональну підпослідовність n_m (тобто таку, що $n_1 \in N_1$, $n_2 \in N_2$ і $n_2 > n_1$, $n_3 \in N_3$ і $n_3 > n_2$ і т. д.), одержимо підпослідовність f_{n_m}, збіжну майже скрізь на кожному з Ω_j, тобто збіжну майже скрізь на $\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Omega_j$.

Нарешті, (ii) — це очевидний наслідок з теореми Лебега про мажоровану збіжність. $\square$

Вправи

1. Нехай $p_0 \in [1, \infty)$ — фіксоване число, $x \in l_{p_0}$. Тоді $\|x\|_p \xrightarrow[p\to\infty]{} \|x\|_\infty$. Цим будуть в якомусь сенсі обґрунтовані позначення $\|x\|_\infty$ і l_∞.

2. Нехай $p_0 \in [1, \infty)$ — фіксоване число, $x \in l_{p_0}$. Тоді при $p \in [p_0, \infty)$ величина $\|x\|_p$ неперервно залежить від p.

3. Сформулюйте і доведіть аналогічні твердження для $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ зі скінченною мірою μ.

4. У теоремах 1 і 2 ми довели, що у випадку скінченної міри простір $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ спадає як множина зі зростанням p, а простір l_p (частковий випадок $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ з нескінченною мірою μ) зростає зі зростанням p. Покажіть, що для $L_p[0, \infty)$ ні зростання, ні спадання зі зростанням p не справджуються.

5. Покажіть, що $l_{p_1} \neq l_{p_2}$ при $p_1 \neq p_2$, тобто що зростання l_p як множини зі зростанням p є строгим.

6. Аналогічне твердження для $L_p[0, 1]$.

7. Нехай $p_0 \in (1, \infty)$. Доведіть, що $L_{p_0}[0, 1] \neq \bigcap_{p<p_0} L_p[0, 1]$ і $L_{p_0}[0, 1] \neq \bigcup_{p>p_0} L_p[0, 1]$.

8. $l_{p_0} \neq \bigcap_{p>p_0} l_p$ і $l_{p_0} \neq \bigcup_{p<p_0} l_p$.

9. Нехай (Ω, Σ, μ) — простір зі скінченною мірою. Тоді $L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ — щільна підмножина в будь-якому з $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$.

10. Нехай (Ω, Σ, μ) — простір зі скінченною мірою. Тоді множина скінченнозначних вимірних функцій щільна в будь-якому з $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$.

11. Нехай (Ω, Σ, μ) — простір з σ-скінченною мірою. Тоді множина скінченнозначних вимірних функцій з носіями скінченної міри щільна в будь-якому з $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ при $p \in [1, \infty)$. Якщо $\mu(\Omega) = \infty$, то в $L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ ця множина вже не щільна.

12. Множина кусково-сталих функцій $f = \sum_{k=1}^n c_k \mathbb{1}_{(a_k, b_k)}$ щільна при $p \in [1, \infty)$ як в будь-якому L_p на відрізку, так і в L_p на осі.

13. Нехай (Ω, Σ, μ) — простір з σ-скінченною мірою, Σ — зліченно-породжена σ-алгебра (тобто існує зліченна сім'я множин, яка породжує в розумінні значення 1 п. 2.1.2 цю σ-алгебру) і $p \in [1, \infty)$. Тоді $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ — сепарабельний нормований простір.

14. Простір $L_\infty[0, 1]$ несепарабельний.

14.1.3. Функціонал інтегрування з вагою

Нехай $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $g \in L_{p'}(\Omega, \Sigma, \mu)$. Означимо на $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ *функціонал інтегрування з вагою* W_g, який діє за правилом $W_g(f) = \int_\Omega fgd\mu$. Згідно з теоремою п. 14.1.1, для будь-якого $f \in L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ добуток fg інтегровний, тобто функціонал W_g коректно визначений. Лінійність цього функціонала також очевидна.

Теорема. *При $g \in L_{p'}$ функціонал W_g неперервний на L_p, і $\|W_g\| = \|g\|_{p'}$.*

Доведення. Нерівність $|W_g(f)| \leqslant \|f\|_p \|g\|_{p'}$, а з нею і оцінка $\|W_g\| \leqslant \|g\|_{p'}$ випливають з нерівності Гельдера. Доведемо обернену оцінку. З огляду на однорідність достатньо вивчити випадок $\|g\|_{p'} = 1$.

Нехай $1 < p < \infty$. Розглянемо функцію $f = |g|^{p'/p} e^{-i \arg g}$. Ця функція лежить в $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$, і $\|f\|_p = 1$. Отже,

$$\|W_g\| \geqslant |W_g(f)| = \int_\Omega |g|^{p'/p+1} \, d\mu = \int_\Omega |g|^{p'} \, d\mu = 1 = \|g\|_{p'} .$$

При $p = \infty$ в попередньому міркуванні за f потрібно взяти $e^{-i \arg g}$. Дещо складніший випадок $p = 1$. У цьому випадку функціонал W_g, взагалі кажучи, не досягає своєї верхньої межі на одиничній сфері простору $L_p = L_1$, і для оцінки норми знизу недостатньо підставити одну конкретну вдало вибрану функцію. Отож, розберемо цей останній випадок, що залишився. Оскільки $p = 1$, $p' = +\infty$, і, згідно нашого припущення, $\|g\|_\infty = 1$. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$. Множина $|g|_{>1-\varepsilon} = \{ t \in \Omega : |g(t)| > 1 - \varepsilon \}$ має додатну міру (інакше $\|g\|_\infty$ не перевищувала б $1 - \varepsilon$). Виберемо в множині $|g|_{>1-\varepsilon}$ вимірну підмножину Δ скінченної ненульової міри. Розглянемо функцію $f = \frac{1}{\mu(\Delta)} \mathbb{1}_\Delta e^{-i \arg g} \in L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$. Оскільки $\|f\|_1 = 1$, маємо:

$$\|W_g\| \geqslant |W_g(f)| = \frac{1}{\mu(\Delta)} \int_\Omega \mathbb{1}_\Delta |g| \, d\mu \geqslant \frac{1 - \varepsilon}{\mu(\Delta)} \int_\Delta d\mu = 1 - \varepsilon = \|g\|_\infty - \varepsilon.$$

Залишається спрямувати в отриманій оцінці ε до нуля. □

Вправи

1. Наведіть приклад такої функції $g \in L_\infty[0,1]$, що відповідний функціонал W_g не досягає своєї верхньої межі на $S_{L_1[0,1]}$.

2. Дайте повний опис тих $g \in L_\infty[0,1]$, для яких W_g досягає на $S_{L_1[0,1]}$ своєї норми.

3. Яка властивість міри μ, що випливає з σ-скінченності, використовувалась в доведенні вищенаведеної теореми? Де саме? Яка частина твердження теореми правильна для будь-якої зліченно-адитивної (в тому числі і не σ-скінченної) міри?

Як буде показано нижче, при $1 \leqslant p < \infty$ нема ніяких інших неперервних лінійних функціоналів на $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$, крім функціоналів W_g інтегрування з вагою $g \in L_{p'}(\Omega, \Sigma, \mu)$. При $p = \infty$ ситуація, як видно з нижченаведених вправ, змінюється кардинально: більша частина функціоналів на L_∞ не є функціоналами інтегрування з вагою.

4. Нехай ν — борелів заряд (скінченний, бо, за прийнятою нами аксіоматикою, заряди набувають тільки скінченні значення) на $[0,1]$, F_ν — функціонал на $C[0,1]$, що задається формулою $F_\nu(f) = \int_K f d\nu$. Продовжимо функціонал F_ν за теоремою Гана-Банаха на весь $L_\infty[0,1]$ до деякого функціонала $\tilde{F}_\nu$. Доведіть, що функціонал $\tilde{F}_\nu$ може мати вигляд W_g, тільки якщо заряд ν абсолютно неперервний щодо міри Лебега.

Розглянемо на відрізку $[0,1]$ σ-алгебру $2^{[0,1]}$ всіх підмножин і задамо міру μ у такий спосіб: міра будь-якої скінченної множини дорівнює числу елементів множини, а міра будь-якої нескінченної множини дорівнює $+\infty$. Простір $L_1([0,1],\, 2^{[0,1]}, \mu)$ прийнято позначати $l_1[0,1]$. Іншими словами, елементи простору $l_1[0,1]$ — це функції зі зліченними носіями, для яких $\|f\| = \sum\limits_{t\in[0,1]} |f(t)| < \infty$. Доведіть, що:

5. Спряжений простір $l_1[0,1]^*$ має потужність, більшу за потужність континуума.
6. Простір l_∞ має підпростір, ізометричний $l_1[0,1]$.
7. Спряжений простір $(l_\infty)^*$ має потужність, більшу за потужність континуума.
8. Множина функціоналів на l_∞ вигляду «інтеграл з вагою» (у цьому випадку «сума з вагою») — має потужність континуума.

Як довів у 1967 році М. Й. Кадець, будь-які два сепарабельні нескінченновимірні банахові простори гомеоморфні як топологічні простори (не плутати з ізоморфізмом!). Наступна вправа дає приклад того, як можуть будуватись нелінійні гомеоморфізми банахових просторів.

9. Нехай $1 \leqslant p_1 < p_2 < \infty$. Розглянемо відображення С. Мазура (S. Mazur) $M\colon L_{p_1}[0,1] \to L_{p_2}[0,1]$, задане формулою $M(g) = |g|^{\frac{p_1}{p_2}} e^{i \arg g}$. Доведіть, що це відображення здійснює (нелінійний) гомеоморфізм просторів $L_{p_1}[0,1]$ і $L_{p_2}[0,1]$, тобто що відображення M бієктивне і як M, так і M^{-1} неперервні.

14.1.4. Загальний вигляд лінійного функціонала в L_p

Теорема 1. *Нехай $1 \leqslant p < \infty$. Тоді будь-який лінійній функціонал $G \in L_p(\Omega,\Sigma,\mu)^*$ однозначно зображується у вигляді функціонала W_g інтегрування з вагою, де функція $g \in L_{p'}(\Omega,\Sigma,\mu)$. При цьому $\|G\| = \|g\|_{p'}$.*

Доведення. Формула для норми функціонала W_g вже доведена в попередньому пункті. Залишилось довести існування і єдиність шуканої функції $g \in L_{p'}(\Omega,\Sigma,\mu)$. Почнемо з єдиності. Нехай $G = W_{g_1} = W_{g_2}$. Тоді $W_{g_1-g_2} = W_{g_1} - W_{g_2} = 0$ і $\|g_1-g_2\|_{p'} = \|W_{g_1-g_2}\| = 0$, тобто елементи g_1 і g_2 простору $L_{p'}(\Omega,\Sigma,\mu)$ збігаються.

Доведення існування потребує певних зусиль і буде поділене на кілька лем. При цьому спочатку ми розглянемо частковий випадок скінченної міри. Загальний випадок буде зведено до часткового за допомогою прийому, який ми вже застосовували в п. 4.6.2.

Лема 1. *Нехай $1 \leqslant p < \infty$, $G \in L_p(\Omega,\Sigma,\mu)^*$ і $\mu(\Omega) < \infty$. Тоді існує така функція $g \in L_1(\Omega,\Sigma,\mu)$, що для будь-якого $\Delta \in \Sigma$ виконується співвідношення $G(\mathbb{1}_\Delta) = \int\limits_\Omega \mathbb{1}_\Delta g\,d\mu$.*

Доведення. Як читач напевно здогадався, міркування базуватиметься на теоремі Радона-Никодима.

Задамо на σ-алгебрі Σ функцію множини ν за таким правилом: $\nu(\Delta) = G(\mathbb{1}_\Delta)$. На підставі лінійності функціонала G і рівності $\mathbb{1}_{\Delta_1} + \mathbb{1}_{\Delta_2} = \mathbb{1}_{\Delta_1\cup\Delta_2}$, що виконується для будь-якої диз'юнктної пари $\Delta_1, \Delta_2 \in \Sigma$, функція множини ν скінченно-адитивна. Перевіримо зліченну адитивність. Для цього, згідно з вправою 5 п. 7.1.1, потрібно довести, що для будь-яких $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in \Sigma$, що утворюють спадний ланцюжок множин з порожнім перетином, $\lim\limits_{k\to\infty} \nu(A_k) = 0$. Справді, в цьому випадку

$$\|\mathbb{1}_{A_k}\|_p = (\mu(A_k))^{1/p} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

отже, з огляду на неперервність функціонала G

$$\nu(A_k) = G(\mathbb{1}_{A_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

Отож ν — заряд. Далі, нерівність

$$|\nu(\Delta)| \leqslant \|G\| \cdot \|\mathbb{1}_\Delta\|_p = \|G\| \ (\mu(\Delta))^{1/p}$$

означає абсолютну неперервність заряду ν щодо міри μ. Шукану функцію $g \in L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ означимо як похідну Радона-Никодима заряду ν за мірою μ. Тоді

$$G(\mathbb{1}_\Delta) = \nu(\Delta) = \int\limits_\Delta g d\mu = \int\limits_\Omega \mathbb{1}_\Delta g d\mu. \qquad \square$$

Лема 2. *В умовах попередньої леми рівність*

$$G(f) = \int\limits_\Omega fgd\mu \tag{5}$$

виконується для будь-якої функції $f \in L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$.

Доведення. Позначимо через F лінійний функціонал на $L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$, який діє за правилом $F(f) = G(f) - \int\limits_\Omega fgd\mu$. Оскільки всі функції вигляду $\mathbb{1}_\Delta$, $\Delta \in \Sigma$ лежать в $\operatorname{Ker} F$, то, як наслідок, $\operatorname{Ker} F$ містить і всі функції вигляду $\sum\limits_{k=1}^n a_k \mathbb{1}_{\Delta_k}$, $\Delta_k \in \Sigma$ (всі скінченнозначні функції). Отже, (вправа 10 п. 14.1.3), ядро функціонала F щільне в $L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$. Далі,

$$|F(f)| \leqslant \|G\| \ \|f\|_p + \|f\|_\infty \|g\|_1 \leqslant \|G\| \ \|f\|_\infty (\mu(\Omega))^{1/p} + \|f\|_\infty \|g\|_1 =$$

$$\left(\|G\| \ (\mu(\Omega))^{1/p} + \|g\|_1\right) \|f\|_\infty,$$

тобто $\|F\| \leqslant \|G\| \cdot (\mu(\Omega))^{1/p} + \|g\|_1 < \infty$ і функціонал F неперервний. Неперервний функціонал, що перетворюється на нуль на щільній множині, дорівнює нулю на всьому просторі. $\square$

Лема 3. *Побудована функція g належить до простору $L_{p'}(\Omega, \Sigma, \mu)$.*

Доведення. Скориставшись попередньою лемою і неперервністю функціонала G в нормі $\| \ \|_p$, отримаємо, що для будь-якої функції $f \in L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ справджується оцінка

$$\left|\int\limits_\Omega fgd\mu\right| = |G(f)| \leqslant \|G\| \cdot \|f\|_p. \tag{6}$$

Розглянемо спочатку випадок $p > 1$ і, відповідно, $p' \neq \infty$. Зафіксуємо $N > 0$ і підставимо в (6) функцію $f = |g|^{p'-1} \mathbb{1}_{|g|_{<N}} \cdot e^{-i \arg g}$. Маємо

$$\int\limits_{|g|_{<N}} |g|^{p'} d\mu = \left|\int\limits_\Omega fgd\mu\right| \leqslant \|G\| \cdot \|f\|_p =$$

$$= \|G\| \cdot \left(\int\limits_{|g|_{<N}} |g|^{(p'-1)p} d\mu\right)^{1/p} = \|G\| \cdot \left(\int\limits_{|g|_{<N}} |g|^{p'} d\mu\right)^{1/p}.$$

Поділивши обидві частини нерівності на $\left(\int\limits_{|g|_{<N}} |g|^{p'}\,d\mu\right)^{1/p}$ і піднісши до степеня p', одержимо нерівність $\int\limits_{|g|_{<N}} |g|^{p'}\,d\mu \leqslant \|G\|^{p'}$. При прямуванні параметра N до нескінченності остання оцінка переходить в нерівність $\int\limits_{\Omega} |g|^{p'}\,d\mu \leqslant \|G\|^{p'}$, яка означає, зокрема, що $g \in L_{p'}(\Omega, \Sigma, \mu)$.

Перейдемо до випадку $p = 1$ і $p' = \infty$. Припустимо, що $g \notin L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$. Тоді для будь-якого $N > 0$ множина $|g|_{>N}$ має ненульову міру. Підставимо в (6) функцію $f = \mathbb{1}_{|g|_{>N}} e^{-i \arg g}$:

$$N\mu\left(|g|_{>N}\right) \leqslant \int\limits_{|g|_{>N}} |g|\,d\mu = \left|\int\limits_{\Omega} fg d\mu\right| \leqslant \|G\| \cdot \|f\|_1 = \|G\| \cdot \mu\left(|g|_{>N}\right).$$

Отримуємо, що будь-якого $N > 0$ виконується нерівність $N \leqslant \|G\|$. Суперечність. □

Завершення доведення теореми. Отже, у випадку скінченної міри μ ми довели існування такої функції $g \in L_{p'}(\Omega, \Sigma, \mu)$, що для всіх $f \in L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ виконується співвідношення (5), яке можна записати у вигляді $G(f) = W_g(f)$. Тому, G і W_g — неперервні лінійні функціонали на $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$, які збігаються на щільній (вправа 9 п. 14.1.2) підмножині $L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu) \subset L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$. Отже, $G(f) = W_g(f)$ для всіх $f \in L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$. Перейдемо до випадку σ-скінченної міри μ. Зафіксуємо деяке зображення множини Ω у вигляді $\Omega = \coprod_{n=1}^{\infty} \Omega_n$, де $0 < \mu(\Omega_n) < \infty$ і $\Omega_n \in \Sigma$. Означимо числа $a_n = 2^n \mu(\Omega_n)$. Введемо на (Ω, Σ) нову міру μ_1 формулою $\mu_1(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B \cap \Omega_n)/a_n$. При такому означенні трійка (Ω, Σ, μ_1) буде простором зі скінченною мірою. Задамо на Ω функцію $h = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathbb{1}_{\Omega_n}$. Нагадаємо (п. 4.6.2), що функція f інтегровна на Ω за мірою μ тоді і тільки тоді, коли функція $f \cdot h$ інтегровна на Ω за мірою μ_1 і $\int_\Omega f d\mu = \int_\Omega f h d\mu_1$.

Означимо лінійний оператор $T\colon L_p(\Omega, \Sigma, \mu_1) \to L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ формулою $Tf = f \cdot h^{-1/p}$. Оператор T здійснює бієктивну ізометрію просторів $L_p(\Omega, \Sigma, \mu_1)$ і $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$:

$$\|Tf\|^p = \int\limits_{\Omega} |f|^p h^{-1} d\mu = \int\limits_{\Omega} |f|^p d\mu_1 = \|f\|^p.$$

За функціоналом $G \in L_p(\Omega, \Sigma, \mu)^*$ побудуємо функціонал T^*G з простору $L_p(\Omega, \Sigma, \mu_1)^*$ за правилом $(T^*G)(f) = G(Tf)$. Оскільки μ_1 — скінченна міра, функціонал T^*G потрапляє в умови вже доведеного часткового випадку теореми: існує така функція $g_1 \in L_{p'}(\Omega, \Sigma, \mu_1)$, що $(T^*G)(f) = \int_\Omega f g_1 d\mu_1$ для будь-якого $f \in L_p(\Omega, \Sigma, \mu_1)$. Розшифруємо цю умову: для будь-якого $f \in L_p(\Omega, \Sigma, \mu_1)$ виконується співвідношення

$$G(Tf) = \int\limits_{\Omega} f g_1 h d\mu = \int\limits_{\Omega} (Tf) \cdot g_1 h^{1/p'} d\mu.$$

Перепозначимо Tf через $\tilde{f}$, а $g_1 h^{1/p'}$ через g. Тоді, як нам і потрібно, $g \in L_{p'}(\Omega, \Sigma, \mu)$, і рівність $G(\tilde{f}) = \int_\Omega \tilde{f} g d\mu$, як ми того і бажаємо, виконується для будь-якого $\tilde{f} \in L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$. □

Зауваження 1. Оскільки відповідність $g \mapsto W_g$ здійснює бієктивну ізометрію просторів $L_{p'}(\Omega, \Sigma, \mu)$ і $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)^*$ функцію g прийнято ототожнювати з породженим нею функціоналом W_g. Враховуючи таке ототожнення, теорему про загальний вигляд лінійного функціонала в L_p, $1 \leqslant p < \infty$ записують у вигляді рівності $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)^* = L_{p'}(\Omega, \Sigma, \mu)$.

Зауваження 2. З огляду на рівноправність показників p і p' (формула $(p')' = p$) рівність $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)^* = L_{p'}(\Omega, \Sigma, \mu)$, $1 \leqslant p < \infty$, можна переписати у вигляді $L_{p'}(\Omega, \Sigma, \mu)^* = L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$, $1 < p \leqslant \infty$. Оскільки спряжений простір до будь-якого нормованого простору повний, звідси випливає, зокрема, повнота просторів $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ при $1 < p \leqslant \infty$.

Зауваження 3. При $1 < p < \infty$ виконуються обидва співвідношення $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)^* = L_{p'}(\Omega, \Sigma, \mu)$ і $L_{p'}(\Omega, \Sigma, \mu)^* = L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$. Зіставивши їх, отримуємо при $1 < p < \infty$ співвідношення $(L_p(\Omega, \Sigma, \mu)^*)^* = L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$. Ця властивість просторів, яка називається рефлексивністю, відіграє важливу роль в теорії банахових просторів, і ще буде обговорюватись у наступних розділах.

Зауваження 4. Оскільки простори l_p є частковим випадком просторів $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$, де роль інтеграла функції відіграє сума членів послідовності, одержуємо таку теорему про загальний вигляд лінійного функціонала в l_p.

Теорема 2. *Нехай $1 \leqslant p < \infty$. Для будь-яких $f = (f_1, f_2, ...) \in l_p$ і $g = (g_1, g_2, ...) \in l_{p'}$ вираз $W_g(f) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n$ коректно визначений. При $g \in l_{p'}$ функціонал W_g — це неперервний лінійний функціонал на l_p і $\|W_g\| = \|g\|_{p'}$. Далі, для будь-якого лінійного функціонала $G \in l_p^*$ існує єдиний елемент $g \in l_{p'}$, такий що $G = W_g$.*

Враховуючи ототожнення $g \to W_g$, теорему про загальний вигляд лінійного функціонала в l_p при $1 \leqslant p < \infty$ записують у вигляді рівності $l_p^* = l_{p'}$.

Зауваження 5. Хоча теорема про загальний вигляд лінійного функціонала в L_p для випадку $p = \infty$ вже не є правильною, перший крок доведення — введення на σ-алгебрі Σ функції множини ν: $\nu(\Delta) = G(\mathbb{1}_\Delta)$ має сенс і для функціонала $G \in L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)^*$. Основна відмінність від випадку $p < \infty$ полягає в тому, що ν буде лише скінченно-адитивним, а не зліченно-адитивним зарядом. Тому, хоча умова абсолютної неперервності $\mu(\Delta) = 0 \Rightarrow \nu(\Delta) = 0$ зберігається, теорема Радона-Никодима вже не застосовна. Тим не менше, неважко довести, що функція множини ν має скінченну напівваріацію і, згідно з теоремою 3 п. 13.4.2 (де було розібрано навіть загальніший випадок векторної міри ν), будь-яка функція $f \in L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ буде ν-інтегровною. Тому правильна така теорема.

Теорема про загальний вигляд лінійного функціонала в L_∞. *Для будь-якого функціонала $G \in L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)^*$ існує єдиний скінченно-адитивний обмежений заряд $\nu\colon \Sigma \to \mathbb{C}$, який перетворюється в нуль на μ-нехтуваних множинах, породжуючий функціонал G за правилом $G(f) = \int\limits_\Omega f d\nu$.*

Навпаки, кожний такий заряд породжує за вказаним правилом неперервний функціонал на $L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$. Норма функціонала G збігається з напівваріацією на Ω заряду, що його породжує.

Вправи

1. Теорема про загальний вигляд лінійного функціонала в L_2 може бути отримана як частковий випадок теореми про загальний вигляд лінійного функціонала в L_p. Водночас L_2 — це гільбертів простір, відтак, правильною є теорема про загальний вигляд лінійного функціонала в гільбертовому просторі. Чи не суперечать ці дві теореми одна одній?

2. При $1 < p < \infty$ умова σ-скінченності міри в теоремі 1 зайва.

3. При $p = 1$ умову σ-скінченності міри в теоремі 1, хоча і можна послабити, цілком відкинути неможливо. Покажіть, що у випадку $\Omega = [0, 1]$, $\Sigma = \mathfrak{B}$ і μ — лічильної міри (тобто міра будь-якої скінченної множини дорівнює числу елементів множини, а міра будь-якої нескінченної множини дорівнює $+\infty$), $L_1(\Omega, \Sigma, \mu)^* \neq L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$. А саме, $L_1(\Omega, \Sigma, \mu)^*$ буде складатись з функціоналів вигляду W_g, де g — будь-які обмежені, а не тільки вимірні за Борелем обмежені функції на $[0,1]$.

4. Відновіть деталі доведення теореми про загальний вигляд лінійного функціонала в L_∞.

5. Доведіть таку теорему про загальний вигляд лінійного оператора на L_∞.

Нехай X — банахів простір. Для будь-якого лінійного неперервного оператора $T\colon L_\infty(\Omega,\Sigma,\mu)\to X$ існує єдина скінченно-адитивна обмежена векторна міра $\nu\colon \Sigma\to X$, яка перетворюється в нуль на μ-нехтуваних множинах і породжує оператор T за правилом $Tf=\int_\Omega f\,d\nu$. Навпаки, кожна така векторна міра породжує за вказаним правилом неперервний оператор $T\colon L_\infty(\Omega,\Sigma,\mu)\to X$. Норма оператора T збігається з напівваріацією на Ω векторної міри, яка його породжує.

6. Нехай $K\colon [0,1]\times[0,1]\to\mathbb{C}$ — вимірна за Борелем функція двох змінних. Через $\tilde{K}$ позначимо функцію $\tilde{K}(t)=\int_0^1 |K(t,x)|\,dx$. Покажіть, що якщо $\|\tilde{K}\|_\infty<\infty$, то вираз $(Tf\,(t))\,(x)=\int_0^1 K\,(t,x)f\,(t)\,dt$ задає неперервний лінійний оператор $T\colon L_1[0,1]\to L_1[0,1]$ і $\|T\|\leqslant\|\tilde{K}\|_\infty$. Цей оператор на $L_1\,[0,1]$ називається оператором інтегрування з ядром K.

7. В умовах попередньої вправи доведіть, що $\|T\|=\|\tilde{K}\|_\infty$.

8. Доведіть, що в просторі $L_1\,[0,1]$ кожний скінченновимірний оператор зображується у вигляді оператора інтегрування з ядром.

9. Використовуючи апроксимацію компактного оператора скінченновимірними, доведіть, що будь-який компактний оператор $T\in L\,(L_1[0,1])$ зображуваний у вигляді оператора інтегрування з ядром.

10. Нехай $[a_n,b_n]\subset[0,1]$, $n=1,\,2,\,...$, утворюють послідовність попарно неперетинних відрізків ненульової довжини. Тоді, якщо за ядро взяти $K=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{b_k-a_k}\mathbb{1}_{[a_k,b_k]\times[a_k,b_k]}$, то оператор інтегрування з ядром K в $L_1\,[0,1]$ не буде компактним оператором. Порівняти з вправами 8 п. 12.4.3 і 12 п. 12.4.2.

11. Нехай ядро з вправи 6 задовольняє умову $\|\tilde{K}\|_\infty<\infty$. Розглянемо функції $K_t\colon [0,1]\to\mathbb{C}$, $K_t(x)=K(t,x)$. Якщо сім'я функцій $\{K_t\}_{t\in[0,1]}$ утворює передкомпакт в $L_1\,[0,1]$, то оператор інтегрування з ядром K в $L_1\,[0,1]$ буде компактним оператором.

12. Наведіть приклад оператора скінченного рангу в $C\,[0,1]$, який не має зображення у вигляді оператора інтегрування з ядром.

З огляду на доведену теорему про загальний вигляд лінійного функціонала в L_p, якщо оператор T діє з L_p в L_r і $p,r\in[1,\infty)$, то спряжений оператор потрібно розглядати як оператор, який діє з $L_{r'}$ в $L_{p'}$. Для наступних операторів перевірте лінійність і неперервність і обчисліть спряжені оператори.

13. Оператор $j_{p,r}$ тотожного вкладення простору $L_p\,[0,1]$ в $L_r\,[0,1]$, де $r\leqslant p$.

14. Оператор інтегрування з ядром в $L_p[0,1]$.

15. Оператор $T_g\colon L_p[0,1]\to L_1[0,1]$ множення на функцію $g\in L_{p'}[0,1]$: $T_g(f)=f\cdot g$.

16. Оператор $S_g\colon L_1[0,1]\to L_1[0,1]$ композиції з монотонною неперервною функцією $g\colon[0,1]\to[0,1]$: $S_g(f)=f\circ g$. За якої умови на g оператор справді буде діяти з $L_1[0,1]$ в $L_1[0,1]$?

14.2. Перетворення Фур'є на осі

Формально при означенні оператора $T\colon X\to Y$ спочатку повинні бути задані простори X і Y і лише потім означено, як діє оператор T на елементи простору X. У реальному житті[2] часто все відбувається в зворотному порядку: спочатку виникає деякий

[2]Цікаво, в якій мірі розв'язування математичних задач можна вважати реальним життям?

аналітичний вираз, який природно трактувати як лінійний оператор, і лише потім його підлаштовують під формальну схему. При цьому, звичайно, задання оператора даним аналітичним виразом виходить неоднозначним, і в залежності від вибору просторів X і Y виходять оператори з різними властивостями.

У цьому розділі ми розглянемо один з таких прикладів, де за аналітичний вираз береться добре відомий з курсу аналізу інтеграл Фур'є на осі.

14.2.1. δ-подібні послідовності і теорема Діні

У цьому параграфі ми обговоримо один корисний прийом доведення граничних теорем для інтегральних виразів. Якщо відмовитись від строгих формулювань, зміст цього прийому можна виразити так: якщо послідовність функцій (g_n) прямує в деякому сенсі до δ-міри, зосередженої в точці t_0, то для великого числа функцій f виконується граничне співвідношення $\int\limits_{\Omega} f g_n d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} f(t_0)$.

Означення 1. Нехай (Ω, Σ, μ) — простір з безатомною мірою (скінченною чи σ-скінченною). Послідовність функцій $g_n \in L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ називається *δ-подібною*, якщо існує така зростаюча послідовність множин $\Omega_m \in \Sigma$ скінченної міри, що:

(i) $\mu\left(\Omega \setminus \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} \Omega_m\right) = 0;$

(ii) $\int\limits_{\Omega_m} g_n d\mu \xrightarrow[m\to\infty]{} 1$ при будь-якому $n \in \mathbb{N}$;

(iii) $\int\limits_{\Omega_m} h g_n d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ для будь-якої інтегровної на Ω_m функції h.

Зауваження. Якщо g_n інтегровні на всьому Ω, то умову (ii) можна замінити простішою умовою $\int_\Omega g_n d\mu = 1$.

Означення 2. Нехай (g_n) — δ-подібна послідовність. Вимірна функція g називається *підхідним множником*, якщо вона майже скрізь відмінна від нуля і $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|g_n g\|_\infty = M < \infty$.

Теорема 1. *Нехай (g_n) — δ-подібна послідовність, f — інтегровна функція на Ω і a — довільний скаляр. Нехай, далі, існує такий відповідний множник g, що $\frac{f-a}{g} \in L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$. Тоді $\int_\Omega f g_n d\mu \to a$ $(n \to \infty)$.*

Доведення. Оскільки функція $\frac{f-a}{g}$ інтегровна на Ω, а $\|g_n g\|_\infty < \infty$, то і їхній добуток $(f-a)g_n$ також інтегровна на Ω функція. Згідно з умовою (ii) означення 1,

$$\int\limits_{\Omega} f g_n d\mu - a = \lim_{m\to\infty}\left(\int\limits_{\Omega_m} f g_n d\mu - a\right) =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \int\limits_{\Omega_m} (f-a)\, g_n d\mu = \int\limits_{\Omega} \frac{f-a}{g} g g_n d\mu. \tag{1}$$

Скористаємось абсолютною неперервністю інтеграла як функції множини. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ і виберемо номер m так, щоб виконувалась оцінка $\int\limits_{\Omega\setminus\Omega_m} \left|\frac{f-a}{g}\right| d\mu < \varepsilon$. Скористаємось формулою (1) і тим, що за умовою (iii) означення 1, $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\int\limits_{\Omega_m}(f-a)\,g_n d\mu\right| = 0$. Маємо

$$\varlimsup_{n\to\infty}\left|\int\limits_{\Omega} f g_n d\mu - a\right| = \varlimsup_{n\to\infty}\left|\int\limits_{\Omega\setminus\Omega_m}\frac{f-a}{g} g g_n d\mu\right| \leqslant M\varepsilon,$$

що з огляду на довільність ε імплікує потрібне граничне співвідношення. □

Нагадаємо, що функція f на відрізку (a,b) (скінченному або нескінченному) задовольняє *умову Діні* в точці $x_0 \in (a,b)$, якщо функція $\frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t}$ інтегровна на деякому відрізку вигляду $[-\varepsilon,+\varepsilon]$. Очевидно, якщо $f \in L_1(-\infty,+\infty)$ задовольняє умову Діні в точці x_0, то $\frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t} \in L_1(-\infty,+\infty)$. Зазначимо, що умова Діні — не дуже жорстка вимога. Скажімо, диференційовність в точці x_0, умова Ліпшиця або умова Гельдера з показником $p > 0$ накладають сильніші обмеження на поводження функції.

Теорема 2. *Нехай $u \in L_1(-\infty,+\infty)$ і задовольняє умову Діні в точці x. Тоді* $\lim\limits_{N\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x+t)\frac{\sin Nt}{t}dt = u(x)$.

Доведення. Застосуємо теорему 1 до $\Omega = \mathbb{R}$ з мірою Лебега,

$$f(t) = u(x+t),\ g_N(t) = \frac{1}{\pi}\frac{\sin Nt}{t},\ \Omega_m = \left\{t\in\mathbb{R} : \frac{1}{m} \leqslant |t| \leqslant m\right\}$$

і множником $g(t) = t$. За такого вибору аксіома (i) δ-подібної послідовності очевидна, а аксіома (ii) випливає з відомої формули $\lim\limits_{m\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-m}^{m}\frac{\sin t}{t}dt = 1$, яка зазвичай наводиться в курсі комплексного аналізу як одне з ефективних застосувань теорії лишків[3]. Перевіримо виконання для g_N аксіоми (iii). Нехай h — інтегровна на Ω_m функція. Оскільки функція $1/t$ обмежена на Ω_m, $h(t)/t$ інтегровна на Ω_m. Для одержання співвідношення $\lim_{N\to\infty}\int_{\Omega_m} h(t)\frac{\sin Nt}{t}dt = 0$ залишається застосувати наслідок 1 п. 10.4.3. Решта умов теореми 1 в нашому випадку — це обмеженість синуса на осі й умова Діні. □

Застосувавши теорему 1 з $\Omega_m = \Omega = [-\pi,\pi]$ до часткових сум ряду Фур'є

$$(S_n f)(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t+\tau)\frac{\sin(n+1/2)\tau}{\sin\frac{1}{2}\tau}d\tau,$$

легко отримати такий результат, сформульований вище в п. 10.4.3, вправа 3.

Теорема 3. *Нехай функція f інтегровна за Лебегом на відрізку $[-\pi,\pi]$ і задовольняє умову Діні в точці $x_0 \in [-\pi,\pi]$. Тоді ряд Фур'є функції f збігається в точці x_0 до $f(x_0)$.*

Вправи

1. Де у формулюванні чи доведенні теореми 1 відіграє роль умова $g_n \in L_\infty(\Omega,\Sigma,\mu)$ з означення 1?

2. Для кожної з умов (i)–(iii) означення 1 знайдіть її роль в теоремі 1.

[3]Див., наприклад, [Tit, п. 3.1.2.2]

14.2.2. Перетворення Фур'є в L_1 на осі

Нехай $f \in L_1(-\infty, +\infty)$. Перетворенням Фур'є функції f назвемо функцію

$$\hat{f}(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-it\tau} d\tau. \tag{2}$$

Оскільки $|e^{-it\tau}| = 1$ при $t, \tau \in \mathbb{R}$, підінтегральний вираз у формулі (2) — інтегровна функція, тобто функція $\hat{f}$ визначена при всіх $t \in \mathbb{R}$. Далі,

$$\left|\hat{f}(t)\right| \leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left|f(\tau)e^{-it\tau}\right| d\tau = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(\tau)|\, d\tau = \|f\|_1 .$$

Перейшовши до супремума по $t \in \mathbb{R}$, одержуємо, що $\hat{f}$ — обмежена функція і

$$\sup_{-\infty<t<+\infty} \left|\hat{f}(t)\right| \leqslant \|f\|_1 \tag{3}$$

для будь-якого $f \in L_1(-\infty, +\infty)$.

Перерахуємо перетворення Фур'є деяких конкретних функцій. Відповідні обчислення залишаємо читачеві як вправу з теми «прийоми обчислення інтегралів»[4].

Приклад 1. Нехай $f = \mathbb{1}_{[a,b]}$. Тоді $\hat{f}(t) = (e^{-ita} - e^{-itb})/it$. Зокрема, якщо $f = \mathbb{1}_{[-a,a]}$, то $\hat{f}(t) = 2t^{-1} \sin at$.

Приклад 2. Нехай $f(t) = e^{-a|t|}$, де $a > 0$. Тоді $\hat{f}(t) = \frac{2a}{a^2+t^2}$.

Приклад 3. Нехай $f(t) = e^{-at^2}$, де $a > 0$. Тоді $\hat{f}(t) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \cdot e^{-\frac{t^2}{4a}}$. Позначимо через $l_\infty(-\infty, +\infty)$ простір всіх обмежених комплекснозначних функцій на осі, наділений нормою $\|f\| = \sup\limits_{-\infty<t<+\infty} |f(t)|$. Збіжність в цьому просторі збігається з рівномірною збіжністю на осі. Через $C_0(-\infty, +\infty)$ позначимо підпростір простору $l_\infty(-\infty, +\infty)$, який складається з неперервних функцій, що прямують до нуля на нескінченності. Очевидно, що підпростір $C_0(-\infty, +\infty)$ замкнений в $l_\infty(-\infty, +\infty)$.

Означення 1. *Оператором Фур'є* в $L_1(-\infty, +\infty)$ називається відображення $F\colon L_1(-\infty, +\infty) \to l_\infty(-\infty, +\infty)$, що діє за правилом $F(f) = \hat{f}$.

Теорема 1. *Оператор Фур'є F в $L_1(-\infty, +\infty)$ — це неперервний лінійний оператор, $\|F\| = 1$, і для будь-якої функції $f \in L_1(-\infty, +\infty)$ її образ $\hat{f}$ — неперервна функція, яка прямує до нуля на нескінченності.*

Доведення. Нерівність $\|F\| \leqslant 1$, а з нею неперервність оператора випливають зі співвідношення (3). Щоб одержати обернену нерівність, підставимо в оператор довільну додатну функцію $f \in S_{L_1(-\infty,+\infty)}$:

$$\|F\| \geqslant \|F(f)\| = \left\|\hat{f}\right\| \geqslant \left|\hat{f}(0)\right| = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) d\tau = \|f\|_1 = 1.$$

Залишилось довести, що $F\left(L_1(-\infty, +\infty)\right) \subset C_0(-\infty, +\infty)$. Згідно з прикладом 1, $F(f) \in C_0(-\infty, +\infty)$ для будь-якої функції вигляду $f = \mathbb{1}_{[a,b]}$. Отже, за лінійністю, $F_1(f) \in C_0(-\infty, +\infty)$ і для будь-якої кусково-сталої функції f на осі (тобто для функції вигляду $f = \sum_{k=1}^n c_k \mathbb{1}_{[a_k,b_k]}$). Оскільки множина всіх кусково-сталих функцій щільна в $L_1(-\infty, \infty)$, а відображення F неперервне, звідси випливає (вправа 8 п. 1.2.1), що і весь образ оператора F лежить в підпросторі $C_0(-\infty, +\infty)$. □

[4] Див. [K-F, гл. 8, § 4].

Зауваження. На підставі того, що $C_0(-\infty,+\infty)$ — підпростір не тільки в $l_\infty(-\infty,+\infty)$, але й в $L_\infty(-\infty,+\infty)$, коли це зручно, можна вважати, що відображення F діє з $L_1(-\infty,+\infty)$ в $L_\infty(-\infty,+\infty)$.

Нагадаємо, що в п. 4.6.3 було доведено, що для будь-яких функцій $f,g\in L_1(-\infty,+\infty)$ їх згортка $(f*g)(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau$ визначена майже скрізь й інтегровна на осі.

Теорема 2. *Нехай $f,g\in L_1(-\infty,+\infty)$. Тоді $F(f*g)=F(f)\cdot F(g)$. Іншими словами, оператор Фур'є переводить згортку у звичайний добуток.*

$$[F(f*g)](t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(f*g)(\tau)\cdot e^{-it\tau}d\tau=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,g(\tau-x)\,dx\right)e^{-it\tau}d\tau.$$

Змінивши порядок інтегрування в подвійному інтегралі і зробивши заміну $\tau-x=y$, отримуємо, що

$$[F(f*g)](t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}g(\tau-x)\,e^{-it\tau}d\tau\right)f(x)\,dx=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}g(y)\,e^{-it(x+y)}dy\right)f(x)\,dx=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}g(y)\,e^{-ity}dy\right)e^{-itx}f(x)\,dx=\hat f(t)\hat g(t).\qquad\square$$

Зазначена властивість пояснює, чому перетворення Фур'є часто використовується в теорії ймовірностей при вивченні сум незалежних випадкових величин і, зокрема, при доведенні граничних теорем для таких сум. Справа в тому, що щільність розподілу суми незалежних величин — це згортка відповідних щільностей розподілу, а після перетворення Фур'є згортка перетворюється у значно зручнішу для вивчення операцію звичайного множення.

Вправи

1. Проведіть необхідні обчислення у прикладах 1–3.
2. Чому множина всіх кусково-сталих функцій щільна в $L_1(-\infty,+\infty)$?
3. За зразком з п. 4.6.3, обґрунтуйте коректність зміни порядку інтегрування у повторному інтегралі в доведенні теореми 2.
4. Нехай $g\in L_1(-\infty,+\infty)$, $a\in\mathbb{R}$ і $f(t)=g(t+a)$. Тоді $\hat f(t)=e^{ita}\hat g(t)$.
5. Нехай $g\in L_1(-\infty,+\infty)$, $a\in\mathbb{R}$ і $f(t)=e^{ita}g(t)$. Тоді $\hat f(t)=\hat g(t-a)$.
6. Нехай $g\in L_1(-\infty,+\infty)$ і $f(t)=\overline{g(-t)}$. Тоді $\hat f(t)=\overline{\hat g(t)}$.
7. Нехай $f\in L_1(-\infty,+\infty)$ — парна дійсна функція. Тоді $\hat f$ — дійсна функція.
8. Оператор F необмежений знизу.

14.2.3. Формули обернення

Дослідимо питання відновлення функції за її перетворенням Фур'є. Нагадаємо, що інтегралом у розумінні головного значення функції f на осі називається величина

$$\text{p.v.-}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \lim_{m\to\infty}\int\limits_{-m}^{m} f(t)dt$$

(p.v. — скорочення від «principal value»). Очевидно, якщо $f \in L_1(-\infty, +\infty)$, то p.v.-$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$, але p.v.-інтеграл може існувати і для неінтегровної за Лебегом функції на осі. Наприклад, p.v.-$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 0$ для будь-якої непарної локально інтегровної (тобто інтегровної на кожному скінченному відрізку) функції, але серед таких функцій є і ті, що не лежать в $L_1(-\infty, +\infty)$ (наприклад, $f(t) = t$).

Теорема 1. *Нехай інтегровна на осі функція f задовольняє в деякій точці $x \in \mathbb{R}$ умову Діні. Тоді значення функції в цій точці може бути відновлене за такою формулою Фур'є:*

$$2\pi f(x) = p.v.\text{-}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t)e^{itx}dt.$$

Доведення. Перетворимо величину $a_m = \int_{-m}^{m} \hat{f}(t)e^{itx}dt$ у такий спосіб:

$$a_m = \int\limits_{-m}^{m}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{-it\tau}d\tau\right)e^{itx}dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\int\limits_{-m}^{m} e^{it(x-\tau)}dxd\tau =$$

$$= 2\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\frac{\sin m(\tau - x)}{\tau - x}d\tau = 2\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(y+\tau)\frac{\sin my}{y}d\tau.$$

Для одержання потрібного співвідношення $2\pi f(x) = \lim\limits_{m\to\infty} a_m$ залишається застосувати теорему 2 п. 14.2.1. □

Якщо в умовах теореми інтегровна не тільки функція f, але і її перетворення Фур'є $\hat{f}$, *формула Фур'є* переписується у вигляді

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t)e^{itx}dt. \tag{4}$$

На жаль, формула Фур'є, незважаючи на її простоту й елегантність, може бути застосована тільки до відносно добрих функцій. Щоб отримати формулу відновлення функції за її перетворенням Фур'є, придатну для будь-якої функції $f \in L_1(-\infty, +\infty)$, вдаються до такого прийому. Спочатку функцію згортають з «доброю» функцією, досягаючи цим достатньої гладкості, до «виправленої» функції застосовують формулу Фур'є, а потім вже знаходять вихідну функцію f. На основі цього прийому можна одержати різні формули відновлення. Наведемо лише одну з них.

Теорема 2. *Для будь-якої функції $f \in L_1(-\infty, +\infty)$ рівність*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \text{ p.v.-}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t)\frac{n\sin\frac{t}{n}}{2\pi\, t}e^{itx}dt \tag{5}$$

виконується для майже всіх $x \in \mathbb{R}$.

Доведення. При фіксованому $\varepsilon > 0$ розглянемо допоміжну функцію $g_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(t)dt$. Оскільки $g_\varepsilon = \frac{1}{2\varepsilon}\mathbb{1}_{[-\varepsilon,\varepsilon]} * f$, то $g_\varepsilon \in L_1(-\infty, +\infty)$. Далі, перетворення Фур'є переводить згортку в добуток, відтак, $\hat{g}_\varepsilon = \hat{f}(t)\frac{\sin\varepsilon t}{\varepsilon t}$ (див. також приклад 1 п. 14.2.2). Функція $g_\varepsilon(x)$ задовольняє умову Діні для майже всіх $x \in \mathbb{R}$ (інтеграл диференційовний майже скрізь за верхньою межею інтегрування), відповідно, до неї можна застосувати теорему 1:

$$g_\varepsilon(x) = \text{p.v.-}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t)\frac{\sin\varepsilon t}{2\pi\varepsilon\, t}e^{itx}dt \quad \text{майже скрізь.} \tag{6}$$

Далі, за тією ж теоремою про диференціювання інтеграла за верхньою межею інтегрування, $f(x) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} g_\varepsilon(x)$ для майже всіх $x \in \mathbb{R}$. Звідси і з (6) з $\varepsilon = 1/n$ випливає потрібна формула обернення (5). $\square$

Наслідок (теорема єдиності для перетворення Фур'є). *Якщо $f, g \in L_1(-\infty, +\infty)$ і $\hat{f} = \hat{g}$, то $f = g$ майже скрізь. Іншими словами, оператор Фур'є в L_1 — ін'єктивний оператор.*

Вправи

1. $F(L_1(-\infty, +\infty))$ — незамкнена множина в $C_0(-\infty, +\infty)$.

2. Наділимо множину $\mathbb{Z}$ всіх цілих чисел, лічильною мірою μ: міра множини дорівнює кількості елементів цієї множини. У цьому випадку $L_1(\mathbb{Z}, \mu)$ можна ототожнити з $l_1(\mathbb{Z})$. Для функції $f \in L_1(\mathbb{Z}, \mu)$ означимо перетворення Фур'є $\hat{f}\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ формулою

$$\hat{f}(t) = \int\limits_{\mathbb{Z}} f(x)e^{itx}d\mu(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)e^{int}.$$

Доведіть, що $\hat{f} \in C[0, 2\pi]$.

3. Задамо оператор $F_\mathbb{Z}\colon l_1(\mathbb{Z}) \to C[0, 2\pi]$ рівністю $F_\mathbb{Z}(f) = \hat{f}$. Перевірте, що $F_\mathbb{Z}$ — лінійний оператор, і $\|F_\mathbb{Z}\| = 1$. Що буде в цьому випадку аналогом формули Фур'є?

4. Доведіть ін'єктивність оператора $F_\mathbb{Z}$. Чи буде він обмеженим знизу?

5. Образ оператора $F_\mathbb{Z}$ збігається з множиною W з вправи 5 п. 11.1.1. Доведіть, що образ оператора $F_\mathbb{Z}$ незамкнений і нещільний в $C[0, 2\pi]$.

6. Замикання в $C[0, 2\pi]$ образу оператора $F_\mathbb{Z}$ збігається з $C(\mathbb{T})$.

7. Означте згортку функцій з $l_1(\mathbb{Z})$ і доведіть, що оператор $F_\mathbb{Z}$ переводить згортку в добуток.

14.2.4. Перетворення Фур'є і диференціювання

Лема 1. *Нехай $f \in L_1(-\infty, +\infty)$, f абсолютно неперервна на кожному скінченному відрізку $[a, b] \subset \mathbb{R}$ і $f' \in L_1(-\infty, +\infty)$. Тоді $f(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$.*

Доведення. З огляду на абсолютну неперервність $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt$. Отже, у f є як границя при $x \to +\infty$, так і при $x \to -\infty$ — $f(0) + \int_0^{+\infty} f'(t)dt$ і $f(0) + \int_0^{-\infty} f'(t)dt$. Ці границі не можуть бути нічим, крім нуля, бо інакше функція f була б неінтегровною на осі. □

Теорема 1. *Нехай $f \in L_1(-\infty, +\infty)$, f абсолютно неперервна на кожному скінченному відрізку $[a, b] \subset \mathbb{R}$ і $f' \in L_1(-\infty, +\infty)$. Тоді $F(f') = it \cdot F(f)$.*

Доведення. Потрібно застосувати формулу інтегрування частинами і попередню лему:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f'(\tau)e^{-it\tau}d\tau = f(\tau)e^{-it\tau}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + it\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{-it\tau}d\tau = it\,\hat{f}(t). \qquad \square$$

Як ми вже зазначали, перетворення Фур'є інтегровної функції прямує на нескінченності до нуля. З попередньої теореми легко вивести оцінку швидкості прямування до нуля функції $\hat{f}$ через ступінь гладкості функції f:

Наслідок 1. *Нехай f — n-кратно неперервно диференційовна функція і як f, так і всі її похідні до n-го порядку включно інтегровні на осі. Тоді $\hat{f}(t) = o(t^{-n})$ при $n \to \infty$.*

Доведення. n-Кратним застосуванням теореми 1 отримуємо, що $F(f^{(n)}) = (it)^n \cdot F(f)$. Відповідно, $\left|\hat{f}(t) \cdot t^n\right| = \left|F(f^{(n)})\right|(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. □

Позначимо через $\mathcal{D}^2(\mathbb{R})$ множину всіх двічі неперервно диференційовних функцій на осі з обмеженими носіями (тобто носій кожної функції $f \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R})$ лежить на своєму скінченному відрізку).

Наслідок 2. *Нехай $f \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R})$. Тоді $\hat{f}$ належить до всіх $L_p(-\infty, +\infty)$, $p \geqslant 1$.*

Доведення. Функція $\hat{f}$ неперервна, а, за попереднім наслідком, на нескінченності $\hat{f}(t) = o(t^{-2})$. □

Вправи

1. Нехай функції $f(t)$ і $g(t) = tf(t)$ лежать в $L_1(-\infty, +\infty)$. Тоді функція $\hat{f}$ скрізь диференційовна і $\frac{d}{dt}\hat{f} = -i\hat{g}$.

2. Нехай $f(t), tf(t), \ldots, t^n f(t)$ всі лежать в $L_1(-\infty, +\infty)$. Тоді функція $\hat{f}$ має n-у похідну і $\frac{d^n}{dt^n}\hat{f}(t) = (-i)^n F(t^n f(t))$.

3. Позначимо через $s_{(-\delta,\delta)}$ горизонтальну смугу в $\mathbb{C}$, що складається з усіх z з $-\delta < \operatorname{Im} z < \delta$. Нехай $f \in L_1(-\infty, +\infty)$ і для деякого $\delta > 0$ функція $f(t)e^{\delta|t|}$ також інтегровна. Тоді $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{-iz\tau}d\tau$ існує для всіх $z \in s_{(-\delta,\delta)}$ і є аналітичною в $s_{(-\delta,\delta)}$ функцією змінної z. Іншими словами, за цих умов $\hat{f}$ можна розглядати як аналітичну функцію в $s_{(-\delta,\delta)}$.

4. Нехай в умовах попередньої вправи функція f набуває тільки дійсні невід'ємні значення. Тоді $\hat{f}$ задовольняє таку умову *хребтовості*: $\left|\hat{f}(z)\right| \leqslant \hat{f}(i \operatorname{Im} z)$ для всіх $z \in s_{(-\delta,\delta)}$.

5. Відновіть опущені деталі в доведенні наступної теореми.

Теорема 2. *Нехай (a, b) — скінченний або нескінченний відрізок дійсної осі, $p \in [1, \infty)$, f — майже скрізь відмінна від нуля вимірна функція на (a, b), що задовольняє при деяких $C, \delta > 0$ нерівність $|f(t)| \leqslant Ce^{-\delta|t|}$. Тоді функції $f_n(t) = t^n f(t)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, утворює повну систему в $L_p(a, b)$.*

Доведення. Згідно з критерієм повноти системи і п. 9.2.3, нам потрібно довести, що будь-який елемент $g \in L_{p'}(a, b)$, який анулює всі f_n, дорівнює нулю. Умова анулювання означає, що для всіх $n = 0,\ 1,\ 2,\ ...$

$$\int\limits_{(a,b)} f_n g d\lambda = \int\limits_{-\infty}^{\infty} t^n f(t)g(t)\mathbb{1}_{(a,b)}(t)dt = 0. \tag{7}$$

Вводячи допоміжну функцію $h(t) = f(t)g(t)\mathbb{1}_{(a,b)}(t)$, перепишемо (7) у вигляді $\frac{d^n}{dt^n}\hat{h}(0) = 0$, $n = 0,\ 1,\ 2,\ ...$, що з огляду на аналітичність функції $\hat{h}$ означає, що $\hat{h}(t) \equiv 0$. За теоремою єдиності, звідси випливає, що $h = 0$, отже, і $g = 0$. □

6. З останньої теореми виведіть повноту:

– множини поліномів в $L_p[0,1]$, $1 \leqslant p < \infty$;

– послідовності $f_n(t) = t^n e^{-t^2/2}$, $n = 0, 1, 2, ...$, в $L_p(-\infty, +\infty)$, $1 \leqslant p < \infty$;

– $f_n(t) = t^n e^{-t}$, $n = 0, 1, 2, ...$, в $L_p(0, +\infty)$, $1 \leqslant p < \infty$.

7. Усі перераховані в останній вправі системи функцій неповні у відповідних L_∞.

14.2.5. Перетворення Фур'є в L_2 на осі

Мета цього пункту — означити перетворення Фур'є для функцій з $L_2(-\infty, +\infty)$. Хоча саме означення, запропоноване Планшерелем у 1910 році, складніше від свого аналога в $L_1(-\infty, +\infty)$, оператор Фур'є в $L_2(-\infty, +\infty)$ виявиться значно простішим і зручнішим за своїми властивостями, ніж оператор Фур'є в $L_1(-\infty, +\infty)$. А саме, він буде з точністю до сталого множника унітарним оператором, і, крім того, матиме повну систему власних векторів.

Означення 1. Нехай X, Y — нормовані простори, і лінійні операції у цих просторах узгоджені на $X \cap Y$. Множина $X \cap Y$ буде також вважатись нормованим простором, наділеним нормою $\|u\| = \|u\|_X + \|u\|_Y$. Нескладно зауважити, що $u_n \to u$ $(n \to \infty)$ в $X \cap Y$ тоді і тільки тоді, коли $u_n \to u$ $(n \to \infty)$ як в метриці простору X, так і в метриці простору Y.

Лема 1. *Нехай X_1, X_2 — нормовані простори, (Ω, Σ, μ) — простір з σ-скінченною мірою, $1 \leqslant p_1 \leqslant p_2 \leqslant \infty$. Далі, нехай $T_j : X_j \to L_{p_j}(\Omega, \Sigma, \mu)$, $j = 1,\ 2$ — неперервні лінійні оператори, які збігаються на щільній в $X_1 \cap X_2$ підмножині E. Тоді $T_1 x = T_2 x$ на всіх $x \in X_1 \cap X_2$.*

Доведення. Нехай $x \in X_1 \cap X_2$, $x_n \in E$ і $x_n \to x$ $(n \to \infty)$ в метриці простору $X_1 \cap X_2$. Скориставшись тим, що $T_1 = T_2$ на E, введемо позначення $f_n = T_1 x_n = T_2 x_n$. Оскільки $x_n \to x$ у метриці кожного з просторів X_1, X_2, $f_n = T_j x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} T_j x$, $j = 1,\ 2$, в метриці відповідного L_{p_j}. Згідно з пунктом (i) теореми 3 п. 14.1.2 функції $T_1 x$ і $T_2 x$ збігаються майже скрізь на Ω. □

Частковий випадок перетину просторів, який нас цікавить в цьому пункті, — це простір $L_1(-\infty, +\infty) \cap L_2(-\infty, +\infty)$, наділений нормою $\|f\| = \|f\|_1 + \|f\|_2$.

Теорема 1. *Такі підмножини щільні в $L_1(-\infty, \infty) \cap L_2(-\infty, \infty)$:*

(i) множина E_1 функцій з носіями, що лежать на скінченних відрізках;

(ii) множина E_2 обмежених функцій з носіями, що лежать на скінченних відрізках;

(iii) множина E_3 скінченнозначних вимірних функцій з носіями на скінченних відрізках;

(iv) *множина E_4 кусково-сталих функцій;*

(v) *множина $\mathcal{D}^2(\mathbb{R})$ (див. п. 14.2.4).*

Доведення. (i) Нехай $f \in L_1(-\infty,+\infty) \cap L_2(-\infty,+\infty)$. Тоді $f_n = \mathbb{1}_{[-n,n]} f$ належать до E_1 і прямують до f.

(ii) Нехай $f \in E_1$. Покладемо $f_n = f \cdot \mathbb{1}_{A_n}$, де $A_n = \{t \in \mathbb{R} : |f|(t) < n\}$.

(iii) Обмежену функцію $f \in E_2$ можна наблизити на відрізку скінченнозначними навіть рівномірно (теорема 3 п. 3.1.4).

(iv) З огляду на попередній пункт достатньо довести, що до замикання множини E_4 належать функції вигляду $\mathbb{1}_A$, де A — вимірна підмножина деякого скінченного відрізка $[a,b]$. Оскільки міра Лебега будувалась продовженням з алгебри скінченних об'єднань підвідрізків, для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує така множина B, яка має вигляд об'єднання скінченного диз'юнктного набору підвідрізків, що $\lambda(A \triangle B) < \varepsilon$. Відповідно, $\|\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B\| < \varepsilon + \varepsilon^{1/2}$. Залишається зауважити, що $\mathbb{1}_B$ — це кусково-стала функція.

(v) З огляду на попередній пункт достатньо довести можливість наближення функціями з $\mathcal{D}^2(\mathbb{R})$ будь-якої функції вигляду $\mathbb{1}_{[a,b]}$. Для цього достатньо «згладити» функцію $\mathbb{1}_{[a,b]}$ так, щоб площа під графіком майже не змінилась. Читачам, які сумніваються, пропонуємо знайти потрібне наближення самостійно. $\square$

Лема 2. *Для будь-яких $f, g \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R})$ правильна така* формула Планшереля: $\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\langle \hat{f}, \hat{g}\rangle$. *Зокрема (випадок $f = g$), $\|f\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|\hat{f}\|_2$.* *Доведення.* По-перше, як $f, g \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}) \subset L_2(-\infty,+\infty)$, так само й $\hat{f}, \hat{g} \in L_2(-\infty,+\infty)$ (наслідок 2 п. 8). Тому обидва скалярних добутки $\langle f, g\rangle$ і $\left\langle \hat{f}, \hat{g}\right\rangle$ коректно визначені. Оскільки описані функції лежать у просторі $L_1(-\infty,+\infty)$ і диференційовні, а, за тим самим наслідком 2 п. 8, їх перетворення Фур'є інтегровні, до них можна застосовувати формулу Фур'є (4), п. 8. Маємо:

$$2\pi \langle f, g\rangle = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}dx = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t)e^{itx}dt\,\overline{g(x)}dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t)\overline{\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)e^{-itx}dx}\,dt = \left\langle \hat{f}, \hat{g}\right\rangle . \qquad \square$$

З доведеної леми випливає, що відображення $f \mapsto \hat{f}$, що розглядається як оператор, який діє з підпростору $\mathcal{D}^2(\mathbb{R}) \subset L_2(-\infty,+\infty)$ у простір $L_2(-\infty,+\infty)$, неперервне. Оскільки $\mathcal{D}^2(\mathbb{R})$ щільний в $L_2(-\infty,+\infty)$, за теоремою 1 п. 6.5.1, це відображення у єдиний спосіб продовжується до неперервного оператора, діючого з $L_2(-\infty,+\infty)$ в $L_2(-\infty,+\infty)$. Цими міркуваннями обґрунтовується коректність такого означення.

Означення 2. *Оператором Фур'є* в $L_2(-\infty,+\infty)$ називається неперервний лінійний оператор $F_2 \colon L_2(-\infty,+\infty) \to L_2(-\infty,+\infty)$, який діє на будь-яку функцію $f \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R})$ за правилом $F_2(f) = \hat{f}$.

Теорема 2. *Оператор Фур'є в $L_2(-\infty,\infty)$ має такі властивості:*

A. *$F_2(f) = \hat{f}$ для будь-якої функції $f \in L_1(-\infty,+\infty) \cap L_2(-\infty,+\infty)$.*

B. *Формула Планшереля $\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\langle F_2(f), F_2(g)\rangle$ справджується для будь-яких $f, g \in L_2(-\infty,\infty)$. Зокрема, $\|f\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|F_2(f)\|_2$ для будь-якої функції $f \in L_2(-\infty,\infty)$.*

Доведення. Пункт A випливає з леми 1 і щільності в $L_1(-\infty,+\infty) \cap L_2(-\infty,+\infty)$ множини $\mathcal{D}^2(\mathbb{R})$. Пункт B — це продовжена за неперервністю на весь $L_2(-\infty,\infty)$ лема 2. $\square$

Наступна проста теорема дає більш конструктивне означення перетворення Фур'є в L_2.

Теорема 3. *Нехай $f \in L_2(-\infty, +\infty)$. Позначимо*

$$(F_{2,n}f)(t) = \int\limits_{-n}^{n} f(\tau)e^{-it\tau}d\tau.$$

Тоді $F_2 f = \lim_{n\to\infty} F_{2,n}f$, де границю розуміємо в метриці простору $L_2(-\infty, +\infty)$.

Доведення. Розглянемо функції $f_n = f \cdot \mathbb{1}_{[-n,n]}$. Вочевидь, f_n прямує до f в L_2-метриці. Відповідно, з огляду на неперервність оператора F_2 послідовність $F_{2,n}(f) = F_2(f_n)$ прямує до $F_2(f)$. □

Зауваження. Для границі при $n \to \infty$ інтегралів вигляду $\int_{-n}^{n} f(\tau)e^{-it\tau}d\tau$ природно використовувати позначення $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{-it\tau}d\tau$.

Тому для перетворення Фур'є в $L_2(-\infty, +\infty)$ використовують той самий запис $\hat{f}(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{-it\tau}d\tau$, що і в $L_1(-\infty, +\infty)$, але інтеграл при цьому розуміють не в лебеговому сенсі, а в розумінні теореми 3: як границю в $L_2(-\infty, +\infty)$ функцій $\int\limits_{-n}^{n} f(\tau)e^{-it\tau}d\tau$. Для подальшого вивчення оператора Фур'є F_2 доцільно звернутися до поліномів від цього оператора, і найпростішого з них — оператора $(F_2)^2$.

Лема 3. *Оператор $(F_2)^2$ — самоспряжений оператор.*

Доведення. За теоремою 3 (див. також вправу 2 п. 10.4.2), оператор $(F_2)^2$ — це поточкова границя операторів $(F_{2,n})^2$, останні ж легко записати у вигляді операторів інтегрування з дійсними симетричними ядрами:

$$(F_{2,n} \circ F_{2,n}f)(t) = \int\limits_{-n}^{n}\int\limits_{-n}^{n} f(\tau)e^{-ix(t+\tau)}dxd\tau = \int\limits_{-n}^{n} f(\tau)\frac{2\sin n(t+\tau)}{t+\tau}d\tau.$$

$(F_{2,n})^2$ — самоспряжені оператори, отже, самоспряженим оператором є і їхня поточкова границя. □

Теорема 4. *Оператор $\tilde{F}_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}F_2$ — це унітарний оператор.*

Доведення. На підставі пункту B теореми 2 оператор $\tilde{F}_2$ здійснює ізометричне вкладення і, зокрема, обмежений знизу. Відповідно, $\left(\tilde{F}_2\right)^2$ — самоспряжений (за попередньою лемою) обмежений знизу оператор. Отже, (лема 1 п. 12.4.2), $\left(\tilde{F}_2\right)^2$ бієктивний. Тому бієктивним буде і оператор $\tilde{F}_2$, а бієктивна ізометрія гільбертового простору — це унітарний оператор (теорема 2 п. 13.2.2). □

Тепер обговоримо спектральні властивості оператора Фур'є F_2.

Теорема 5. *Оператор $\tilde{F}_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}F_2$ задовольняє рівняння $\left(\tilde{F}_2\right)^4 = I$. Відповідно, спектр оператора F_2 лежить у множині $\{1, i, -1, -i\}$, і простір $L_2(-\infty, +\infty)$ розкладається в ортогональну пряму суму власних підпросторів оператора F_2.*

Доведення. За лемою 3 і теоремою 4, $\left(\tilde{F}_2\right)^2$ — одночасно самоспряжений і унітарний оператор. Його спектр, відповідно, лежить одночасно на дійсній осі і на одиничному колі. Тобто $\sigma\left(\left(\tilde{F}_2\right)^2\right) \subset \{-1, 1\}$. За теоремою про відображення спектра, $\sigma\left((\tilde{F}_2)^4\right) = \{1\}$. З огляду на самоспряженість це означає, що $\left(\tilde{F}_2\right)^4 = I$. За тією ж теоремою про відображення спектра, $\sigma\left(\tilde{F}_2\right) \subset \{1, i, -1, -i\}$. Останнє ж твердження можна вивести або з вправи 1 п. 13.1.1, або розв'язавши нижченаведені вправи, що дають явну побудову повної ортонормованої системи власних векторів оператора F_2. □

Вправи

Розглянемо послідовність функцій $x_n(t) = t^n e^{-t^2/2}$ і підпросторів $X_n = \mathrm{Lin}\,\{x_k\}_{k=0}^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Іншими словами, підпростір X_n складається з функцій вигляду $P_n(t)e^{-t^2/2}$, де P_n — поліном степеня не вищого за n.

1. $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ щільний в $L_2(-\infty, +\infty)$.
2. X_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ — інваріантні підпростори оператора F_2.
3. X_0, $X_0^{\perp} \cap X_1$, $X_1^{\perp} \cap X_2$, $X_2^{\perp} \cap X_3$, ... — послідовність одновимірних інваріантних підпросторів оператора F_2.
4. Якщо в кожному з перелічених у попередній вправі одновимірних підпросторів вибрати по ненульовому елементу h_n, одержана послідовність буде ортонормованим базисом, який складається з власних векторів оператора F_2. (Фактично при побудові системи проведено ортогоналізацію за Грамом–Шмідтом системи $\{x_n\}_0^{\infty}$.)
5. Конкретним прикладом вибору потрібних h_n може слугувати послідовність *функцій Ерміта*: $h_n(x) = \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n} \cdot e^{x^2/2}$. Перевірте потрібне включення $h_n \in X_{n-1}^{\perp} \cap X_n$.

Перетворення Фур'є в $\mathbb{R}^n$ будується за аналогією з одновимірним випадком. А саме, для $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ покладають $\hat{f}(\vec{x}) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\vec{y}) e^{-i\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle} d\vec{y}$.

6. Побудуйте для перетворення Фур'є в $\mathbb{R}^n$ аналог теорії, викладеної вище в одновимірному випадку.
7. Якщо міра μ σ-скінченна, то $L_{p_0}(\Omega, \Sigma, \mu) \cap L_{p_1}(\Omega, \Sigma, \mu)$ — банахів простір у нормі з означення 1 для будь-яких $p_0, p_1 \in [1, +\infty]$.
8. Наведіть приклад банахових просторів X, Y, для яких $X \cap Y$ не буде банаховим простором.
9. Придумайте таку додаткову умову, що забезпечує повноту простору $X \cap Y$, щоб цій умові підпорядковувались простори з вправи 7.

14.3. Інтерполяційна теорема Ріса-Торіна та наслідки з неї

14.3.1. Теорема Адамара про три прямі

У цьому пункті ми доведемо варіант принципу Фрагмена-Ліндельофа (E. Phragmén, E. Lindelöf), який дає оцінку аналітичної у смузі

$$\Pi = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leqslant \mathrm{Re}\, z \leqslant 1\}$$

функції через її значення на межі. Для функції $f\colon \Pi \to \mathbb{C}$ введемо позначення

$$M_\theta = \sup\left\{|f(\theta + iy)| : y \in \mathbb{R}\right\},$$

де $\theta \in [0, 1]$.

Теорема Адамара[5]**.** *Нехай $f\colon \Pi \to \mathbb{C}$ — обмежена, аналітична в Π і неперервна аж до межі функція. Тоді для всіх $\theta \in [0,1]$ виконується оцінка*

$$M_\theta \leqslant M_0^{1-\theta} M_1^\theta.$$

Іншими словами, $\ln M_\theta$ — опукла функція.

Доведення розбивається на кілька допоміжних тверджень.

Лема 1. *Нехай в умовах теореми*

(i) функція $f(\theta + iy)$ рівномірно за $\theta \in [0,1]$ прямує до нуля при $y \to \infty$ і

(ii) $|f(z)| \leqslant 1$ на межі смуги Π.

Тоді $|f(z)| \leqslant 1$ у всій смузі Π.

Доведення. Скориставшись умовою (i), виберемо $r > 0$ настільки великим, щоб на горизонтальних відрізках $\{z = \theta \pm ir : \theta \in [0,1]\}$ виконувалась оцінка $|f(z)| \leqslant 1$. Тоді оцінка $|f(z)| \leqslant 1$ виконується на всій межі прямокутника $\Pi_r = \{z \in \Pi : |\operatorname{Im} z| \leqslant r\}$, і, за принципом максимума, $|f(z)| \leqslant 1$ для всіх $z \in \Pi_r$. Оскільки зі зростанням r прямокутник Π_r охоплює всі точки смуги Π, нерівність $|f(z)| \leqslant 1$ доведено для всіх $z \in \Pi$. □

Лема 2. *Нехай в умовах теореми функція f обмежена за модулем деяким числом C у всій смузі Π і $|f(z)| \leqslant 1$ на межі смуги. Тоді $|f(z)| \leqslant 1$ у всій смузі Π.*

Доведення. Розглянемо функцію $g_\varepsilon(z) = 1 + \varepsilon z$, $\varepsilon > 0$. Ця функція скрізь в Π за модулем більша або дорівнює 1 і $|g_\varepsilon(\theta + iy)| \geqslant \varepsilon |y|$. Відповідно, допоміжна функція f/g_ε буде задовольняти всі умови леми 1. Застосувавши лему 1, одержуємо для будь-якого $z \in \Pi$ оцінку $\left|\frac{f(z)}{1+\varepsilon z}\right| \leqslant 1$. Залишається спрямувати ε до нуля. □

Доведення теореми. Розглянемо функцію $g(z) = f(z) M_0^{z-1} M_1^{-z}$. Оскільки $|g(z)| = |f(z)|\, M_0^{\operatorname{Re} z-1}$ то для функції g виконуються умови леми 2. Отже, $|f(\theta + iy)|\, M_0^{\theta-1} M_1^{-\theta} \leqslant 1$. Оскільки M_0 і M_1 можна вважати відмінними від нуля (інакше $f \equiv 0$), звідси виводимо потрібну нерівність $|f(\theta + iy)| \leqslant M_0^{1-\theta} M_1^\theta$. □

Вправа

Доведіть такий варіант принципу Фрагмена-Ліндельофа для аналітичної функції f, заданої в півплощині $D = \{z : \operatorname{Re} z \geqslant 0\}$: нехай $|f(z)| \leqslant 1$ на уявній осі і для деякої функції g, такої, що $g(r)/r \to 0$ $(r \to \infty)$, оцінка $|f(z)| \leqslant e^{g(|z|)}$ виконується для всіх $z \in D$. Тоді $|f(z)| \leqslant 1$ у всій півплощині D.

14.3.2. Теорема Ріса-Торіна[6]

У цьому пункті $(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$ і $(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$ будуть просторами зі скінченною або σ-скінченною мірою, $p_0, p_1, q_0, q_1 \in [1, +\infty]$, $\theta \in [0,1]$, і показники p_θ, q_θ будуть визначатися рівностями $\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$ і $\frac{1}{q_\theta} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$. Нехай $E \subset L_p(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$ — лінійний підпростір. Норму лінійного оператора $T\colon (E, \|\ \|_p) \to L_q(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$ позначатимемо $\|T\|_{p,q}$.

Лема 1. *Нехай E — простір всіх скінченнозначних вимірних функцій на Ω_1 з носіями скінченної міри, $T\colon E \to \bigcap_{\theta \in [0,1]} L_{q_\theta}(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$ — лінійний оператор. Тоді для будь-якого $\theta \in [0,1]$ справджується оцінка*

$$\|T\|_{p_\theta, q_\theta} \leqslant \left(\|T\|_{p_0,q_0}\right)^{1-\theta} \left(\|T\|_{p_1,q_1}\right)^{\theta}. \tag{1}$$

[5] J. Hadamard

[6] M. Riesz, G. O. Thorin

Доведення. Ідея доведення, запропонована Торіним (1939), полягає у зведенні нерівності (1) до теореми Адамара про три прямі. Введемо позначення $M_0 = \|T\|_{p_0,q_0}$, $M_1 = \|T\|_{p_1,q_1}$. Нам потрібно довести, що для будь-якої скінченнозначної функції $u = \sum_{k=1}^{n} u_k \mathbb{1}_{U_k} \in E$ з $\|u\|_{p_\theta} = 1$ (u_k — скаляри, а $U_k \in \Sigma_1$, $k = 1, 2, \ldots, n$ — диз'юнктний набір множин скінченної міри) виконується нерівність $\|Tu\|_{q_\theta} \leqslant M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}$. Враховуючи, що норма в $L_{q_\theta}(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$ елемента Tu збігається з нормою породженого ним функціонала «інтеграл з вагою» на просторів $L_{q'_\theta}(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$, лема зводиться до доведення того, що нерівність

$$\left| \int\limits_{\Omega_2} w \cdot Tu \, d\mu_2 \right| \leqslant M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \tag{2}$$

виконується для всіх $w \in L_{q'_\theta}(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$ з $\|w\|_{q'_\theta} = 1$. Нарешті, (2) достатньо перевіряти для скінченнозначних функцій $w = \sum_{k=1}^{m} w_k \mathbb{1}_{W_k}$.

Доозначимо величини p_θ, q'_θ на випадок комплексних значень параметра θ: $\frac{1}{q'_z} = \frac{1-z}{q'_0} + \frac{z}{q'_1}$ і $\frac{1}{p_z} = \frac{1-z}{p_0} + \frac{z}{p_1}$. Для будь-якого комплексного числа ξ позначимо $\operatorname{sign} \xi = \xi / |\xi|$, якщо $\xi \neq 0$ і $\operatorname{sign} 0 = 0$. При фіксованому $\theta \in [0, 1]$ покладемо

$$u_z = \sum_{k=1}^{n} |u_k|^{p_\theta / p_z} \cdot \operatorname{sign} u_k \cdot \mathbb{1}_{U_k}, \quad w_z = \sum_{k=1}^{n} |w_k|^{q'_\theta / q'_z} \cdot \operatorname{sign} w_k \cdot \mathbb{1}_{W_k}.$$

Прямою підстановкою в означення L_p-норми, враховуючи, що $|a^z| = a^{\operatorname{Re} z}$ при $a > 0$, з умов $\|u\|_{p_\theta} = \|w\|_{q'_\theta} = 1$ отримуємо рівності

$$\|u_{iy}\|_{p_0} = \|u_{1+iy}\|_{p_1} = \|w_{iy}\|_{q'_0} = \|w_{1+iy}\|_{q'_1} = 1. \tag{3}$$

Означимо функцію комплексної змінної f формулою

$$f(z) = \int\limits_{\Omega_2} w_z \cdot Tu_z \, d\mu_2. \tag{4}$$

Підставивши в (4) вираз для u_z і w_z, переконуємось, що $f(z)$ — це лінійна комбінація показникових функцій вигляду a^z з $a > 0$:

$$f(z) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} |u_k|^{p_\theta / p_z} \cdot |w_j|^{q'_\theta / q'_z} \operatorname{sign} u_k w_j \int\limits_{\Omega_2} T(\mathbb{1}_{U_k})_{W_j} d\mu_2.$$

Оскільки кожна з таких показникових функцій аналітична і обмежена у смузі $\Pi = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant 1\}$, ці властивості матиме і функція $f(z)$. Далі, з нерівності Гельдера і умови (3) робимо висновок, що

$$|f(iy)| = \left| \int\limits_{\Omega_2} w_{iy} \cdot Tu_{iy} \, d\mu_2 \right| \leqslant \|Tu_{iy}\|_{q_0} \|w_{iy}\|_{q'_0} \leqslant M_0 \|u_{iy}\|_{p_0} \|w_{iy}\|_{q'_0} = M_0.$$

Аналогічно, $|f(1 + iy)| \leqslant M_1$. Застосувавши теорему Адамара про три прямі, отримуємо, зокрема, оцінку $|f(\theta)| \leqslant M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}$. Для одержання потрібної нерівності (2) залишається зазначити, що $u_\theta = u$, $w_\theta = w$ і, отже, $f(\theta) = \int\limits_{\Omega_2} w \cdot Tu \, d\mu_2$. □

Наслідок 1 (нерівність Ляпунова). *Нехай* $f \in L_{p_0}(\Omega, \Sigma, \mu) \cap L_{p_1}(\Omega, \Sigma, \mu)$. *Тоді для будь-якого* $\theta \in [0,1]$

$$\|f\|_{p_\theta} \leqslant (\|f\|_{p_0})^{1-\theta}(\|f\|_{p_1})^{\theta}. \tag{5}$$

Зокрема, $L_{p_0}(\Omega, \Sigma, \mu) \cap L_{p_1}(\Omega, \Sigma, \mu) \subset L_{p_\theta}(\Omega, \Sigma, \mu)$.

Доведення. Лінійний функціонал — це теж оператор, тільки область його значень — поле скалярів $\mathbb{C}$. Оскільки $\mathbb{C}$ можна ототожнити з $L_2(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$, де за Ω_2 взято одноточкову множину і $\mu_2(\Omega_2) = 1$, попередню лему можна застосувати з $q_0 = q_1 = 2$ до лінійного функціонала W_f інтегрування з вагою f, який діє на скінченнозначні функції. За $(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$ потрібно взяти (Ω, Σ, μ), а за показники, до яких застосовується лема, потрібно взяти не самі p_0, p_1 і p_θ, а спряжені до них. □

Наслідок 2. *Нехай* X *— щільна підмножина простору* $L_{p_0}(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1) \cap L_{p_1}(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$. *Тоді для будь-якого* $\theta \in [0,1]$ *множина* X *щільна в* $L_{p_\theta}(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$.

Доведення. З (5) випливає, що оператор тотожного вкладення

$$J\colon L_{p_0}(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1) \cap L_{p_1}(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1) \to L_{p_\theta}(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1), \quad Jf = f,$$

неперервний (наприклад, він переводить послідовність, яка прямує до нуля, у послідовність, яка прямує до нуля). $L_{p_0}(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1) \cap L_{p_1}(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$ — образ оператора J — щільна підмножина простору $L_{p_\theta}(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$, отже (вправа 8 п. 1.2.1), оператор J переводить щільну підмножину $X \subset L_{p_0}(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1) \cap L_{p_1}(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$ у щільну підмножину $X \subset L_{p_\theta}(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$. □

Теорема 1. *Нехай* X *— щільний лінійний підпростір в* $L_{p_0}(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1) \cap L_{p_1}(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$ *і* $T\colon X \to L_{q_0}(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2) \cap L_{q_1}(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$ *— лінійний оператор. Тоді для будь-якого* $\theta \in [0,1]$ *правильна оцінка*

$$\|T\|_{p_\theta, q_\theta} \leqslant (\|T\|_{p_0, q_0})^{1-\theta}(\|T\|_{p_1, q_1})^{\theta}.$$

Доведення. Нерівність потребує доведення, тільки якщо величини $\|T\|_{p_0, q_0}$ і $\|T\|_{p_1, q_1}$ скінченні. У цьому випадку оператор $T\colon X \to L_{q_0}(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2) \cap L_{q_1}(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$ неперервний і, отже, однозначно продовжується до неперервного оператора

$$T\colon L_{p_0}(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1) \cap L_{p_1}(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1) \to L_{q_0}(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2) \cap L_{q_1}(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2).$$

Тобто достатньо розглянути випадок $X = L_{p_0}(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1) \cap L_{p_1}(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$. Далі, якщо $p_\theta = +\infty$, то і $p_0 = p_1 = +\infty$, і потрібна оцінка випливає з нерівності Ляпунова:

$$\|Tf\|_{q_\theta} \leqslant (\|Tf\|_{q_0})^{1-\theta}(\|Tf\|_{q_1})^{\theta} \leqslant (\|T\|_{\infty, q_0})^{1-\theta}(\|T\|_{\infty, q_1})^{\theta}\, \|f\|_{\infty}.$$

Тому можна вважати, що $p_\theta \neq +\infty$. Розглянемо оператор $\tilde{T}$ — обмеження оператора T на підпростір E з леми 1. За наслідком 1,

$$T(E) \subset L_{q_0}(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2) \cap L_{q_1}(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2) \subset \bigcap_{\theta \in [0,1]} L_{q_\theta}(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2),$$

отже, до оператора $\tilde{T}$ можна застосувати лему 1:

$$\|\tilde{T}\|_{p_\theta, q_\theta} \leqslant \big(\|\tilde{T}\|_{p_0, q_0}\big)^{1-\theta}\big(\|\tilde{T}\|_{p_1, q_1}\big)^{\theta} \leqslant (\|T\|_{p_0, q_0})^{1-\theta}(\|T\|_{p_1, q_1})^{\theta}.$$

Залишається скористатись щільністю підпростору E в $L_{p_\theta}(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$, на підставі якої $\|\tilde{T}\|_{p_\theta, q_\theta} = \|T\|_{p_\theta, q_\theta}$. □

Доведенні твердження можна інтерпретувати у такий спосіб. Розглянемо множину $D \subset [0,1] \times [0,1]$ таких пар (x,y), що $X \subset L_{1/x}(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$, $T(X) \subset L_{1/y}(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$ і $\|T\|_{1/x,1/y} < \infty$. Означимо функцію $F\colon D \to \mathbb{C}$ формулою $F(x,y) = \ln \|T\|_{1/x,1/y}$. Тоді D — опукла множина, а F — опукла функція.

Вправи

1. У лемі 1 і нижче ми оперуємо з параметрами p, q, які можуть набувати як скінченні, так і нескінченні значення. Надайте сенс формулам $\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$ і $\frac{1}{q_\theta} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$ у випадку, коли якийсь з параметрів набуває значення $+\infty$.

2. Прийнявши «правило множення» $\infty \cdot 0 = 1$, надайте сенс виразам для u_z і w_z у випадку, коли якийсь із параметрів, що входять в означення, набуває значення $+\infty$. Перевірте коректність доведення леми 1 для таких значень параметрів.

3. Чому в доведенні останньої теореми 1 випадок $p_\theta = +\infty$ потрібно було розглядати окремо?

4. Обґрунтуйте останню фразу доведення теореми 1 «Залишається скористатись щільністю ...».

14.3.3. Застосування до рядів Фур'є і перетворення Фур'є

У цьому пункті буде доведено, зокрема, що при $1 < p < \infty$ тригонометрична система $\{1, e^{it}, e^{-it}, e^{2it}, e^{-2it}, ...\}$ утворює базис в $L_p[0, 2\pi]$. Доведення буде спиратись на елегантне міркування, запропоноване В. Юдіним [Yud].

Означення 1. Позначимо $E[0,2\pi] = \mathrm{Lin}\{1, e^{it}, e^{-it}, e^{2it}, e^{-2it}, ...\}$, $E_+[0,2\pi] = \mathrm{Lin}\{1, e^{it}, e^{2it}, e^{3it}, ...\}$ і $E_-[0,2\pi] = \mathrm{Lin}\{e^{-it}, e^{-2it}, e^{-3it}, ...\}$. *Оператором Ріса* називається відображення $R\colon E[0,2\pi] \to E[0,2\pi]$, яке діє за правилом $R\Big(\sum\limits_{k=-m}^{n} a_k e^{ikt}\Big) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k e^{ikt}$.

Іншими словами, оператор Ріса — це проектор простору $E[0,2\pi]$ на $E_+[0,2\pi]$ паралельно до підпростору $E_-[0,2\pi]$.

Лема 1 (Юдін). *Нехай $p = 2k$, де $k \in \mathbb{N}$; $f, g \in L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ і*

$$\int_\Omega f^k \bar{g}^k d\mu = 0.$$

Тоді L_p-норми функцій пов'язані нерівністю $\|f\|^p + \|g\|^p \leqslant k^p \|f-g\|^p$.

Доведення. З умови $\int\limits_\Omega f^k \bar{g}^k d\mu = 0$ виводимо, що

$$\|f\|^p + \|g\|^p = \int_\Omega |f|^{2k} + |g|^{2k} d\mu = \int_\Omega \left|f^k - g^k\right|^2 d\mu =$$

$$= \int_\Omega |f-g|^2 \left|f^{k-1} + f^{k-2}g + ... + g^{k-1}\right|^2 d\mu \leqslant$$

$$\leqslant k^2 \int_\Omega |f-g|^2 \max\left\{|f|^{k-1}, |g|^{k-1}\right\}^2 d\mu.$$

Застосовуючи нерівність Гельдера з показниками k і $k' = \frac{k}{k-1}$, одержуємо:

$$\|f\|^p + \|g\|^p \leqslant k^2 \left(\int_\Omega |f-g|^{2k} d\mu\right)^{1/k} \left(\int_\Omega \max\left\{|f|^{2k}, |g|^{2k}\right\} d\mu\right)^{(k-1)/k} \leqslant$$

$$\leqslant k^2 \left(\int\limits_{\Omega} |f-g|^{2k}\, d\mu \right)^{1/k} \left(\int\limits_{\Omega} |f|^{2k} + |g|^{2k}\, d\mu \right)^{(k-1)/k} =$$

$$= k^2 \left(\int\limits_{\Omega} |f-g|^{2k}\, d\mu \right)^{1/k} \left(\|f\|^p + \|g\|^p \right)^{(k-1)/k}.$$

Залишається поділити обидві частини нерівності на $(\|f\|^p + \|g\|^p)^{\frac{k-1}{k}}$ і піднести до степеня k. □

Лема 2. *Нехай $f \in E_+[0,2\pi]$, $g \in E_-[0,2\pi]$ і $k \in \mathbb{N}$. Тоді* $\int\limits_0^{2\pi} f^k(t)\bar{g}^k(t)dt = 0.$

Доведення. На підставі ортогональності системи експонент, $E_+[0,2\pi]$ і $E_-[0,2\pi]$ ортогональні між собою в $L_2[0,2\pi]$. Водночас $f^k \in E_+[0,2\pi]$, а $g^k \in E_-[0,2\pi]$. □

Теорема 1 (М. Pic). *Нехай $1 < p < \infty$. Тоді оператор Ріса R продовжується до неперервного оператора, який діє з $L_p[0,2\pi]$ в $L_p[0,2\pi]$.*

Доведення. Оскільки $E[0,2\pi]$ — щільний в $L_p[0,2\pi]$ підпростір, для існування потрібного продовження необхідно і достатньо, щоб величина $\|R\|_{p,p}$ була скінченна.

Розглянемо спочатку випадок $p = 2k$, де $k \in \mathbb{N}$. Нехай $h \in E[0,2\pi]$ — довільний елемент. Розглянемо функції $f = Rh \in E_+[0,2\pi]$ і $g = Rh - h \in E_-[0,2\pi]$. Тоді, за лемою 1,

$$\|Rh\|^p = \|f\|^p \leqslant k^p \|f-g\|^p = k^p \|h\|^p.$$

Тобто $\|R\|_{p,p} \leqslant k < \infty$.

Застосувавши інтерполяційну теорему Ріса-Торіна до відрізків вигляду $[2k, 2k+2]$, отримаємо, що $\|R\|_{p,p} < \infty$ при всіх $p \geqslant 2$. Залишилось розглянути випадок $1 < p < 2$. У цьому випадку $p' \in (2,+\infty)$ і, за вже доведеним, $\|R\|_{p',p'} < \infty$. Зазначимо, що для будь-якого $h \in E[0,2\pi]$

$$\|Rh\|_p = \sup \left\{ \left| \int\limits_0^{2\pi} (Rh)(t)\bar{u}(t)dt \right| : \bar{u} \in E[0,2\pi], \|\bar{u}\|_{p'} \leqslant 1 \right\}. \tag{6}$$

Вводячи позначення $f = Rh$, $g = Rh - h$, $v = Ru$, $w = Ru - v$ і враховуючи, що $f, v \in E_+[0,2\pi]$, $g, w \in E_-[0,2\pi]$, одержуємо:

$$\int\limits_0^{2\pi} (Rh)(t)\bar{u}(t)dt = \int\limits_0^{2\pi} f(t)(\bar{v}(t) - \bar{w}(t))dt =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} (f(t) - g(t))\bar{v}(t)dt = \int\limits_0^{2\pi} h(t)\overline{(Ru)(t)}dt.$$

Підставляючи в (6) і використовуючи нерівність Гельдера, робимо висновок, що $\|Rh\|_p \leqslant \|h\|_p \|R\|_{p',p'}$ і, відповідно, $\|R\|_{p,p} \leqslant \|R\|_{p',p'} < \infty$. □

Теорема 2. *Нехай $1 < p < \infty$. Тоді для будь-якої функції $f \in L_p[0,2\pi]$ частинні суми $S_n f$ її ряду Фур'є збігаються до f в L_p-метриці.*

Доведення. Оператор $\tilde{P}$ пов'язаний з оператором S_n частинної суми ряду Фур'є тотожністю $S_n(f) = e^{i(n+1)t}(I - R)(e^{-i(2n+1)t}R(e^{int}f))$ (рівність легко перевіряється на експонентах e^{imt}, а потім продовжується на весь $L_p[0, 2\pi]$ за лінійністю і неперервністю). Отже, $\|S_n\| \leqslant \|I - R\| \cdot \|R\|$, тобто послідовність операторів S_n рівномірно обмежена. Крім того, S_n поточково збігаються до I на щільному в $L_p[0, 2\pi]$ підпросторі $E[0, 2\pi]$, що для рівномірно обмеженої послідовності означає поточкову збіжність на всьому просторі. □

Інші застосування читач знайде у вправах, що наводяться нижче.

Вправи

1. Нехай $1 \leqslant p \leqslant 2$. Тоді оператор Фур'є F продовжується з $L_1(-\infty, +\infty) \cap L_2(-\infty, +\infty)$ до неперервного оператора з $L_p(-\infty, +\infty)$ в $L_{p'}(-\infty, +\infty)$.

2. Нехай $1 < p \leqslant 2$ і $f \in L_p[0, 2\pi]$. Тоді $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}_n|^{p'} < \infty$.

3. Нехай $1 \leqslant p \leqslant 2$, $a_n \in \mathbb{C}$ і $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} |a_n|^p < \infty$. Тоді ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{int}$ збігається в метриці $L_{p'}[0, 2\pi]$.

4. Розгляньте оператор Ріса R як оператор, який діє з $L_p[0, 2\pi]$ в $L_p[0, 2\pi]$. Обчисліть спряжений до нього оператор.

5. У вправах 10–13 п. 10.4.3 було доведено, що для оператора Ріса (там цей оператор проявлявся під псевдонімом $\tilde{P}$) $\|R\|_{\infty,\infty} = \infty$.

6. Спираючись на двоїстість між L_∞ і L_1, доведіть, що $\|R\|_{1,1} = \infty$. Опишіть ті пари (p, q), для яких $\|R\|_{p,q} < \infty$.

Коментарі до вправ

14.1.2

Вправа 9. За взірцем леми 1 п. 8.3.3.

Вправа 10. Скористатись попередньою вправою і теоремою 3 п. 3.1.4.

Вправа 12. За означенням міри Лебега через зовнішню міру, будь-яка вимірна множина A на відрізку може бути наближена відкритою множиною B так, що $A \subset B$ і $\lambda(B \setminus A) < \varepsilon$. Відкрита множина, у свою чергу, може бути наближена зсередини скінченним об'єднанням відрізків. При цьому характеристичні функції будуть наближати відповідні характеристичні функції в L_p-метриці. Переходом до лінійних комбінацій отримуємо, що кусково-сталими функціями можна наблизити в L_p на відрізку будь-яку скінченнозначну.

Вправа 14. Множина функцій вигляду $\mathbb{1}_{[c,d]}$, де $[c, d] \subset [0, 1]$ — це незліченна множина, всі попарні відстані між елементами якої дорівнюють одиниці. У сепарабельному просторі «такі звірі не водяться».

14.1.4

Вправа 6. Аналогічно до теореми про згортку функцій з L_1 (п. 4.6.3).

Вправа 7. Розгляньте простір E ядер K, які задовольняють умову $\|\tilde{K}\|_\infty < \infty$, наділивши його нормою $\|K\| = \left\|\tilde{K}\right\|_\infty$. Кожний елемент простору E можна ототожнити з функцією $s\colon [0, 1] \to L_1[0, 1]$, яка діє за правилом $[s(t)](x) = K(t, x)$. Довести, що функція s вимірна за Борелем. Звідси за аналогією до теореми про наближення вимірної функції простими доведіть, що ядра вигляду $K(t, x) = \sum_{k=1}^\infty \mathbb{1}_{A_k}(t) g_k(x)$, де A_k — попарно неперетинні вимірні множини, а (g_k) — обмежена послідовність елементів простору $L_1[0, 1]$, утворюють щільну множину в E. Потрібну формулу $\|T\| = \|\tilde{K}\|_\infty$ доведіть спочатку для ядер вигляду $K(t, x) = \sum_{k=1}^\infty \mathbb{1}_{A_k}(t) g_k(x)$. Загальний результат отримайте граничним переходом.

14.2.5

Вправа 1. Скориставшись вправою 6 п. 14.2.4.

Вправа 2. Спочатку зазначимо, що функції $x_n(t)$ нескінченно диференційовні і швидко спадають на нескінченності. Відповідно, вони та їх лінійні комбінації лежать в $L_1(-\infty,+\infty) \cap L_2(-\infty,+\infty)$, і для функцій, що нас цікавлять $F_2 = F$. Більше того, до них можна застосувати формулу $F(f') = it \cdot F(f)$ (теорема 1 п. 14.2.4). Доведення будемо проводити індукцією за n. При $n = 0$ твердження випливає з рівності $F(x_0) = \sqrt{2\pi}\, x_0$ (приклад 3 п. 14.2.2). Нехай тепер $F(X_n) \subset X_n$, доведемо, що $F(X_{n+1}) \subset X_{n+1}$. Скористаємось формулою $x_n' = nx_{n-1} - x_{n+1}$:

$$F(x_{n+1}) = F(nx_{n-1} - x_n') = nF(x_{n-1}) - itF(x_n) \subset X_{n-1} + tX_n \subset X_{n+1}.$$

Оскільки, за припущенням індукції, функції $F(x_k)$, $k = 0, 1, ..., n$, також лежать в X_{n+1}, цим доведено потрібне включення.

Вправа 8. Розглянемо в l_2 деякий незамкнений лінійний підпростір E (наприклад, $E = \mathrm{Lin}\{e_n\}_1^\infty$, де $\{e_n\}_1^\infty$ — канонічний базис простору l_2). Введемо $U_i\colon l_2 \to l_2 \times l_2$ — оператори природного вкладення: $U_1 x = (x, 0)$, $U_2 x = (0, x)$. Розглянемо $F = \{(x, -x) : x \in E\}$ — підпростір лінійного простору $l_2 \times l_2$. Нехай $j\colon l_2 \times l_2 \to (l_2 \times l_2)/F$ — фактор-відображення. Потрібні простори X, Y будуть підпросторами в лінійному просторі
$(l_2 \times l_2)/F$: $X = jU_1(l_2)$, $Y = jU_2(l_2)$, наділеними нормами, що успадковуються з l_2: $\|jU_1(s)\|_X = \|jU_2(s)\|_Y = \|s\|_{l_2}$. Означення норм коректне, і простори X, Y будуть просторами, ізоморфними l_2: відповідними ізоморфізмами будуть оператори jU_1 і jU_2. При цьому на E оператори jU_1 і jU_2 збігаються і переводять E в $X \cap Y$. Тобто $X \cap Y$ буде ізоморфним нормованому простору E і не буде банаховим простором. Коротко всю цю конструкцію можна описати так: ми беремо дві копії простору l_2 і «склеюємо» їх по неповному підпростору E.

Вправа 9. Такою умовою буде така: X і Y — лінійні підпростори деякого лінійного простору G; і на G задано збіжність $\xrightarrow{G}$, яка має такі властивості:

– якщо $g_n, g \in X$ і $\|g_n - g\|_X \to 0$ $(n \to \infty)$, то для деякої підпослідовності індексів $g_{n_k} \xrightarrow{G} g$;
– якщо $g_n, g \in Y$ і $\|g_n - g\|_Y \to 0$ $(n \to \infty)$, то для деякої підпослідовності індексів $g_{n_k} \xrightarrow{G} g$;
– якщо $g_n, g, h \in G$, $g_n \xrightarrow{G} g$ і $g_n \xrightarrow{G} h$ $(n \to \infty)$, то $g = h$.

У вправі 7 роль такого G може відігравати простір $L_0(\Omega, \Sigma, \mu)$ вимірних функцій, наділений збіжністю майже скрізь.

14.3.2

Вправа 4. Скористатись лемою 1 п. 14.2.5.