Розділ 12. Гільбертові простори

Серед нескінченновимірних просторів Банаха гільбертів простір відзначається відносною простотою. У гільбертових просторах нам найповніше вдається використовувати свою геометричну інтуїцію: вимірювати кути між векторами, застосовувати теорему Піфагора й ортогональне проектування. Тут відсутні такі аномальні явища[1], як недоповнювані підпростори, чи лінійні функціонали, що не досягають своєї верхньої межі на одиничній сфері. Усі сепарабельні нескінченновимірні гільбертові простори ізоморфні між собою. Завдяки цій відносній простоті, гільбертів простір часто використовується у застосуваннях. Скрізь, де це тільки можливо (правда, це вдається не завжди), намагаються використовувати мову гільбертових просторів, а не загальних банахових або ж топологічних векторних просторів. Теорія операторів у гільбертовому просторі розвинена значно глибше, ніж у загальному випадку, тому частіше застосовується.

12.1. Норма, породжена скалярним добутком

12.1.1. Скалярний добуток

Нехай X — комплексний лінійний простір. Функція $\langle \cdot , \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{C}$, яка ставить кожній парі x, y елементів простору X у відповідність комплексне число, називається *скалярним добутком*, якщо вона задовольняє такі аксіоми:

(1) $\langle x, x\rangle \geqslant 0$ для будь-якого $x \in X$ (додатність);

(2) якщо $\langle x, x\rangle = 0$, то $x = 0$ (невиродженість);

(3) $\langle ax_1 + bx_2, y\rangle = a\langle x_1, y\rangle + b\langle x_2, y\rangle$ для будь-яких $x_1, x_2 \in X$ і $a, b \in \mathbb{C}$ (лінійність за першою змінною);

(4) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ для будь-яких $x, y \in X$ (ермітова симетричність) (риска в останній формулі означає операцію переходу до комплексно спряженого числа).

Зазначимо, що з третьої і четвертої аксіом випливають правила розкриття дужок за другою змінною:

(5) $\langle x, y_1 + y_2\rangle = \langle x, y_1\rangle + \langle x, y_2\rangle$; $\langle x, ay\rangle = \bar{a}\langle x, y\rangle$.

Наведений учбовий текст є витягом з підручнику
Кадець В.М. Курс функціонального аналізу та теорії міри. – Львів: Видавець І.Е. Чижиков, 2012. – 590 с. – (Серія “Університетська бібліотека”) ISBN 978-966-2645-03-3
Усі посилання на теореми, вправи, означення, такі що не увійшли до цього тексту – це посилання на підручник.

[1] Наскільки нам відомо, літаючі тарілки, полтергейст, телепатія та снігова людина нікому не зустрічались навіть в загальних банахових просторах.

Елементи x, y, для яких $\langle x, y\rangle = 0$, називаються *ортогональними* між собою (скорочений запис: $x \perp y$).

Приклади

I. Скалярний добуток в $\mathbb{C}^n$: нехай $x, y \in \mathbb{C}^n$, $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n)$. Покладемо $\langle x, y\rangle = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \bar{y}_k$.

II. Скалярний добуток в l_2: для будь-яких $x, y \in l_2$, $x = (x_1, ..., x_n, ...)$, $y = (y_1, ..., y_n, ...)$ покладемо $\langle x, y\rangle = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k \bar{y}_k$.

III. Скалярний добуток в $L_2(\Omega, \Sigma, \mu)$: $\forall f, g \in L_2$ означимо скалярний добуток формулою $\langle f, g\rangle = \int\limits_{\Omega} f\,\bar{g}\,d\mu$.

Хоча в усіх перелічених просторах існують, природно, й інші скалярні добутки, надалі, якщо не обумовлено протилежне, під скалярними добутками в $\mathbb{C}^n$, l_2 і L_2 ми матимемо на увазі саме описані вище приклади.

Вправи

1. Спираючись на нерівність $|ab| \leqslant |a|^2 + |b|^2$ $(a, b \in \mathbb{C})$, доведіть збіжність ряду й існування інтеграла в означених скалярних добутках в l_2 і $L_2[0,1]$ відповідно.

2. Перевірте виконання аксіом скалярного добутку в усіх наведених вище прикладах скалярних добутків.

3. Яким повинен бути відрізок $[a, b]$, щоб функції $f(t) = e^{it}$ і $g(t) = e^{2it}$ були ортогональними між собою в $L_2[a, b]$?

4. Чи можуть два поліноми першого степеня бути ортогональними між собою в $L_2[0,1]$?

5. Чи можуть дві додатні функції бути ортогональними між собою в $L_2[0,1]$? Дві невід'ємні? Дві знакозмінні?

6. Чи є відношення $\perp$ ортогональності відношенням еквівалентності? Відношенням порядку?

7. Виведіть таку формулу скороченого множення (*квадрат суми*):

$$\langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + 2\,\mathrm{Re}\,\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle\,.$$

Увага! Цією формулою ми будемо неодноразово користуватись надалі.

12.1.2. Нерівність Коші-Буняковського

Теорема. *Нехай X — простір зі скалярним добутком. Тоді для будь-яких $x, y \in X$ виконується така нерівність Коші-Буняковського:*

$$|\langle x, y\rangle| \leqslant \langle x, x\rangle^{1/2} \langle y, y\rangle^{1/2}\,.$$

Доведення. На підставі аксіоми додатності для будь-якого $t \in \mathbb{R}$ маємо $\langle x + ty, x + ty\rangle \geqslant 0$.

Розкривши дужки отримаємо, що для будь-якого $t \in \mathbb{R}$

$$\langle x, x\rangle + 2t\,\mathrm{Re}\,\langle x, y\rangle + t^2 \langle y, y\rangle \geqslant 0.$$

Квадратичний поліном з дійсними коефіцієнтами може бути невід'ємним на всій осі, тільки якщо його дискримінант не перевищує нуля. Тобто ми довели, що для будь-яких $x, y \in X$ виконується нерівність

$$\mathrm{Re}\,\langle x, y\rangle \leqslant \langle x, x\rangle^{1/2} \langle y, y\rangle^{1/2}\,.$$

Щоб звідси одержати потрібну нерівність Коші-Буняковського, зазначимо, що

$$|\langle x, y\rangle| = \operatorname{Re}\left\langle x, e^{i\arg<x,y>} y\right\rangle \leqslant$$

$$\leqslant \langle x, x\rangle^{1/2} \left\langle e^{i\arg<x,y>} y, e^{i\arg<x,y>} y\right\rangle^{1/2} = \langle x, x\rangle^{1/2} \langle y, y\rangle^{1/2}.$$

Теорему доведено. □

Вправи

1. Для функцій $f(t) = t$ і $g(t) = t^2$ в $L_2[0, 1]$ обчисліть скалярні добутки $\langle f, g\rangle$, $\langle f, f\rangle$ і $\langle g, g\rangle$. Перевірте виконання в цьому прикладі нерівності Коші-Буняковського.

2. Нехай для деяких елементів x, y простору зі скалярним добутком нерівність Коші-Буняковського перетворюється в рівність: $|\langle x, y\rangle| = \langle x, x\rangle^{1/2} \langle y, y\rangle^{1/2}$. Тоді ці елементи лінійно залежні.

3. Спираючись на приклади II і III п. 12.1.1, виведіть такі варіанти нерівності Коші-Буняковського:

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k\right| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^2\right)^{1/2} \quad \text{і}$$

$$\left|\int_{\Omega} f\, g\, d\mu\right| \leqslant \left(\int_{\Omega} |f|^2\, d\mu\right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |g|^2\, d\mu\right)^{1/2}.$$

4. Нехай функція F двох змінних на лінійному просторі X задовольняє всі аксіоми скалярного добутку, за винятком аксіоми невиродженості. Перевірте, що і в цьому випадку виконується нерівність Коші-Буняковського $|F(x, y)| \leqslant F(x, x)^{1/2} F(y, y)^{1/2}$. (**Увага!** Цим фактом ми будемо користуватись при вивченні самоспряжених операторів).

12.1.3. Поняття гільбертового простору

Означення 1. Нехай H — простір зі скалярним добутком. Величина $\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$ називається *нормою, породженою скалярним добутком.*

Використовуючи введене позначення, нерівність Коші-Буняковського можна переписати у вигляді $|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$, а формула квадрата суми може бути записана як $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x, y\rangle + \|y\|^2$.

Перевіримо, що норма, породжена скалярним добутком, задовольняє нерівність трикутника. Для цього піднесемо потрібну нерівність $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ до квадрата і розкриємо дужки:

$$\|x\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \leqslant \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2.$$

Остання нерівність зводиться до нерівності $\operatorname{Re}\langle x, y\rangle \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$ — простого наслідку з нерівності Коші-Буняковського. Решту аксіом норми для норми, породженої скалярним добутком, пропонуємо читачеві перевірити самостійно.

Теорема. *Нехай H наділений нормою, породженою скалярним добутком, $h \in H$. Задамо відображення $F\colon H \to \mathbb{C}$ формулою $F(x) = \langle x, h\rangle$. Тоді F — неперервний лінійний функціонал і $\|F\| = \|h\|$.*

Доведення. Лінійність функціонала F — це аксіома (3) скалярного добутку. Неперервність функціонала і нерівність $\|F\| \leqslant \|h\|$ випливають з нерівності Коші-Буняковського. Потрібно тільки переписати цю нерівність у вигляді

$$|F(x)| = |\langle x, h\rangle| \leqslant \|x\| \cdot \|h\| .$$

Для оцінки ж норми функціонала F знизу підставимо в F вектор $\frac{h}{\|h\|} \in S_H$:

$$\|F\| \geqslant \left| F\left(\frac{h}{\|h\|}\right)\right| = \left|\frac{\langle h, h\rangle}{\|h\|}\right| = \frac{\|h\|^2}{\|h\|} = \|h\| .$$

Теорему доведено. □

Означення 2. Простір зі скалярним добутком H називається *гільбертовим простором*, якщо він повний в нормі, породженій скалярним добутком.

Так само, як і для загальних банахових просторів, в теорії гільбертового простору підпросторами називаються замкнені лінійні підпростори. На підпросторі гільбертового простору визначено той самий скалярний добуток, що й на всьому просторі. У цьому скалярному добутку підпростір гільбертового простору сам є гільбертовим простором.

Вправи

1. Нехай $x \perp y$. Тоді
$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$
(аналог теореми Піфагора). Чи правильне обернене твердження: якщо $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$, то $x \perp y$?

2. Перевірте, що введені нами раніше в п. 6.2.2 норми просторів l_2 і L_2, породжені відповідними скалярними добутками (див. приклади II, III п. 12.1.1).

3. Доведіть, що для будь-яких x, y — елементів гільбертового простору H виконується *рівність паралелограма*:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 .$$

Увага! Рівність паралелограма буде використовуватись нижче в п. 12.2.1.

4. Нехай x_n, x, y_n і y — елементи гільбертового простору H, $x_n \to x$, $y_n \to y$ $(n \to \infty)$. Тоді $\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x, y\rangle$ $(n \to \infty)$.

5. Перевірте, що в банахових просторах $C[0,1], L_1[0,1], c_0$ і l_1 рівність паралелограма не виконується.

6. Доведіть, що якщо для будь-яких елементів x, y нормованого простору X виконується рівність паралелограма, то норма простору X породжується деяким скалярним добутком.

12.2. Геометрія гільбертового простору

12.2.1. Теорема про найкраще наближення

Теорема. *Нехай H — гільбертів простір, $A \subset H$ — опукла замкнена множина. Тоді для будь-якого елемента h простору H в A існує єдиний найближчий до h елемент. Інший словами, існує єдиний елемент $a_0 \in A$, для якого $\|h - a_0\| = \rho(h, A)$.*

Доведення. Оскільки $\rho(h, A) = \rho(0, A - h)$, теорему достатньо довести для випадку $h = 0$. Позначимо $\rho(0, A)$ через r і розглянемо множини

$$A_n = \left\{a \in A : \|a\| \leqslant r + \frac{1}{n}\right\} = A \cap \big(r + \frac{1}{n}\big)\bar{B}_H.$$

Перетин усіх A_n — це множина елементів, які розташовані на відстані r від нуля. Тобто нам потрібно довести, що $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ складається з однієї точки. Для цього скористаємось принципом вкладених множин (п. 1.3.3). Множини A_n утворюють спадний ланцюжок опуклих замкнених множин. Залишилось довести, що $\operatorname{diam} A_n \to 0$ $(n \to \infty)$. Для оцінки діаметра візьмемо дві довільні точки $x, y \in A_n$ та застосуємо рівність паралелограма і нерівність

$$r \leqslant \|e\| \leqslant r + 1/n,$$

яка справджується для будь-якого $e \in A_n$:

$$\|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x + y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\left\|\frac{x + y}{2}\right\|^2\right) \leqslant$$

$$\leqslant 2\left((r + 1/n)^2 + (r + 1/n)^2 - 2r^2\right) = \frac{8r}{n} + \frac{4}{n^2}.$$

Отже, $\operatorname{diam} A_n \leqslant \left(\frac{8r}{n} + \frac{4}{n^2}\right)^{1/2} \to 0$ $(n \to \infty)$. □

Вправи

1. Перевірте опуклість і замкненість множин A_n в доведенні теореми про найкраще наближення.

2. Де в доведенні використовувалась опуклість множин A_n?

3. Де в доведенні використовувалось те, що норма гільбертового простору породжена скалярним добутком?

4. У просторі $C[0,1]$ розглянемо функціонал F, який діє за правилом $F(x) = \int_0^{1/2} x(t)dt - \int_{1/2}^1 x(t)dt$. Тоді $A = \{x \in C[0,1] : F(x) = 1\}$ — опукла замкнена множина, яка не містить найближчого до нуля елемента (див. також п. 6.4.2, вправа 10).

5. У просторі $C[0,1]$ розглянемо множину A всіх функцій, які набувають в нулі значення 1. Перевірте, що відстань від A до 0 дорівнює 1, що ця відстань досягається, але найближча до нуля точка в A не єдина.

6. Для нормованого простору X такі властивості еквівалентні:

- в будь-якій опуклій підмножині $A \subset X$ для будь-якої точки $x \in X$, якщо в A є найближчий до x елемент, то цей елемент єдиний;
- для будь-яких двох неколінеарних векторів $x, y \in X$ виконується строга нерівність трикутника: $\|x + y\| < \|x\| + \|y\|$;
- $\|x + y\| < 2$ для будь-яких двох різних векторів $x, y \in S_X$;
- одинична сфера простору не містить прямолінійних відрізків ненульової довжини (остання властивість простору називається *строгою опуклістю*).

7. Нехай для підмножини A нормованого простору X виконується твердження теореми про найкраще наближення: для будь-якого елемента h простору X в A існує єдиний найближчий до h елемент. Тоді A замкнена.

8. Нехай для підмножини A скінченновимірного гільбертового простору H виконується твердження теореми про найкраще наближення. Тоді A опукла.

9. Поширте твердження останньої вправи на випадок нескінченновимірного гільбертового простору[2].

12.2.2. Ортогональні доповнення й ортопроектори

Означення. Нехай H — гільбертів простір. Елемент $h \in H$ називають *ортогональним* до підмножини $X \subset H$ ($h \perp X$), якщо h ортогональний до всіх елементів підмножини. Множина всіх елементів, ортогональних до підмножини X, називається *ортогональним доповненням* до X і позначається $X^\perp$.

Твердження 1. *$X^\perp$ — підпростір в H (нагадаємо, що в банахових просторах, а отже, і в гільбертовому просторі, згідно з прийнятою нами домовленістю, термін* підпростір *без додаткових епітетів означає* замкнений лінійний підпростір*).*

Доведення. $X^\perp = \bigcap_{x \in X} x^\perp$. Тому достатньо довести, що для будь-якого елемента x множина $x^\perp$ — це замкнений лінійний підпростір в H. Але $x^\perp$ збігається з ядром $F^{-1}(0)$ неперервного лінійного функціонала $F\colon y \mapsto \langle y, x\rangle$ (див. теорему п. 12.1.3). □

Наступне твердження є прямим узагальненням факту, добре відомого ще зі шкільної геометрії: щоб знайти в підпросторі X найближчий елемент до точки h, потрібно опустити перпендикуляр на підпростір.

Твердження 2. *Нехай X — підпростір гільбертового простору H, $h \in H$, $h_0 \in X$. Тоді такі умови еквівалентні:*

(a) h_0 — найближчий в X елемент до h;

(b) $h - h_0 \in X^\perp$.

Доведення. $(a) \Rightarrow (b)$. Припустимо, що умова (b) не виконується. Тоді в X існує елемент x, для якого $\langle x, h - h_0\rangle \neq 0$. Домноживши за необхідності x на сталу, отримаємо вектор, для якого $\langle x, h - h_0\rangle = 1$. Згідно умови (a), для будь-якого $t > 0$

$$\|h - h_0\|^2 \leqslant \|h - h_0 - tx\|^2 = \|h - h_0\|^2 - 2t + t^2 \|x\|^2 .$$

Тобто при будь-якому $t > 0$ маємо $t^2 \|x\|^2 - 2t \geqslant 0$, що очевидно не виконується при $t = \|x\|^{-2}$.

$(b) \Rightarrow (a)$. Розглянемо довільний елемент $h_1 \in X$. Маємо

$$\|h - h_1\|^2 = \|(h - h_0) - (h_0 - h_1)\|^2 = \|h - h_0\|^2 + \|h_0 - h_1\|^2 \geqslant \|h - h_0\|^2 .$$

Тобто h_0 — найближчий в X елемент до h, що й потрібно було довести. □

Теорема. *Нехай X — підпростір гільбертового простору H. Тоді H розпадається в пряму суму підпросторів X і $X^\perp$: $H = X \oplus X^\perp$.*

Доведення. Нам потрібно довести, що 1) $X \cap X^\perp = \{0\}$, і 2) для будь-якого $h \in H$ існують такі $x \in X$ і $y \in X^\perp$, що $h = x + y$. 1) Нехай деякий елемент x належить одночасно до підпросторів X і $X^\perp$. Тоді $x \perp x$, тобто $\langle x, x\rangle = 0$, і, відтак, $x = 0$.

2) Нехай $h \in H$ — довільний елемент. Позначимо через x найближчий до h елемент підпростору X і покладемо $y = h - x$. Тоді $x \in X$, $y \in X^\perp$ (за доведеним вище твердженням 2) і $h = x + y$. □

[2] Якщо Вам це вдасться — публікуйте! Принаймні, на час написання цього курсу задача залишалась нерозв'язаною.

Оскільки $H = X \oplus X^{\perp}$, існує (див. п. 10.3.2) обмежений проектор P на підпростір X з $\mathrm{Ker}P = X^{\perp}$. Дію цього проектора можна безпосередньо описати у такий спосіб: для будь-якого $h \in H$ запишемо зображення $h = x+y$, де $x \in X$, $y \in X^{\perp}$. Тоді $Ph = x$. Такий проектор P називається *ортопроектором* на підпростір X. Читач краще ознайомиться з властивостями ортопроекторів, розв'язавши нижченаведені вправи.

Зауваження. Як ми щойно довели, в гільбертовому просторі існує обмежений проектор на будь-який підпростір. Відома й обернена теорема Лінденштраусса-Цафрірі [L-T1]: якщо в банаховому просторі X будь-який підпростір доповнюваний, то X ізоморфний до гільбертового простору.

Вправи

1. Ортопроектор на підпростір $X \subset H$ ставить у відповідність кожному елементу $h \in H$ найближчий до h елемент підпростору X.
2. Норма ортопроектора на ненульовий підпростір дорівнює одиниці.
3. Якщо деякий проектор P на підпростір X має $\|P\| = 1$, то це — ортопроектор.
4. Доведіть, що ортогональне доповнення до підмножини — це замкнений лінійний підпростір, спираючись безпосередньо на означення.
5. Нехай X — підпростір гільбертового простору H. Тоді $(X^{\perp})^{\perp} = X$.
6. Для довільної множини $X \subset H$ правильне таке твердження: $(X^{\perp})^{\perp}$ збігається із замиканням лінійної оболонки множини X.
7. Нехай $e_k \in H$, $k = 1, 2, ...$; $X = \overline{\mathrm{Lin}}\,\{e_k\}_1^{\infty}$. Тоді для того, щоб елемент $y \in H$ належав до $X^{\perp}$, необхідно і достатньо, щоб y був ортогональний до всіх e_k. Іншими словами, $X^{\perp} = \bigcap\limits_{k \in \mathbb{N}} e_k^{\perp}$.

12.2.3. Теорема про загальний вигляд лінійного функціонала в гільбертовому просторі

Теорема. *Для будь-якого лінійного неперервного функціонала F, заданого на гільбертовому просторі H, існує такий елемент $h \in H$, що $F(x) = \langle x, h \rangle$ для будь-якого $x \in H$. Такий елемент h визначений однозначно, і $\|F\| = \|h\|$.*

Доведення. У випадку функціонала F, що тотожно дорівнює нулю, твердження очевидне. Нехай $F \neq 0$. Позначимо ядро функціонала F через X. Тоді існує елемент e одиничної норми, ортогональний X. За шуканий елемент візьмемо $h = \overline{F(e)}e$. За такого вибору $F(x) = \langle x, h \rangle$ для будь-якого $x \in X$. Рівність $F(x) = \langle x, h \rangle$ виконується і для $x = e$. Отже, $F(x) = \langle x, h \rangle$ для будь-якого $x \in \mathrm{Lin}\{e, X\}$. Але X — це гіперпідпростір в H (див. п. 5), отже, $\mathrm{Lin}\{e, X\} = H$ і $F(x) = \langle x, h \rangle$ на всьому просторі. Рівність $\|F\| = \|h\|$ було доведено вище, в п. 12.1.3. Залишилось перевірити єдиність елемента h. Нехай $h_1 \in H$ — такий елемент, що $F(x) = \langle x, h_1 \rangle$ для будь-якого $x \in H$. Тоді $\langle x, h - h_1 \rangle = 0$ для будь-якого $x \in H$, зокрема $\langle h - h_1, h - h_1 \rangle = 0$. Тобто $h - h_1 = 0$ і $h = h_1$. Теорему доведено. □

Зауваження. Міркування, використане в кінці доведення, можна подати окремим твердженням: якщо $\langle x, h_1 \rangle = \langle x, h_2 \rangle$ для всіх $x \in H$, то $h_1 = h_2$. Цим твердженням ми будемо неодноразово користуватися надалі.

Вправи

1. У вищенаведеному доведенні розглянуто тільки випадок $F \neq 0$ (до речі, де ми користувались неявно цією умовою?). Проаналізуйте самостійно випадок $F = 0$.
2. У який спосіб використовувалась неперервність функціонала F?

3. Чому з виконання рівності $F(x) = \langle x, h\rangle$ для будь-якого $x \in X$ і для $x = e$ випливає виконання цієї рівності для всіх $x \in \mathrm{Lin}\{e, X\}$?

4. Чи важлива в доведеній теоремі повнота простору H?

5. Означимо відображення $U\colon H \to H^*$ у такий спосіб: для будь-якого $h \in H$ функціонал Uh діє за правилом $(Uh)(x) = \langle x, h\rangle$. Доведіть, що відображення U бієктивне, адитивне (тобто $U(h_1 + h_2) = Uh_1 + Uh_2$), але не однорідне. Замість однорідності справджується формула $U(\lambda h) = \bar{\lambda}U(h)$.

6. Нехай H — підпростір простору $L_2[0, 1]$, що складається з поліномів степеня не вищого за 2. Зобразіть функціонал F на H, який задається формулою $F(f) = f(0)$ у вигляді $F(f) = \langle f, h\rangle$, вказаному в теоремі про загальний вигляд лінійного функціонала в H. Те саме для функціонала F_1 на H, який задається формулою $F_1(f) = f'(0)$.

7. Спираючись на теореми п. 12.1.3 і вправу 2 п. 9.1.2, доведіть такий n-вимірний аналог відомої формули обчислення відстані від точки до площини. Нехай гіперплощина A в n-вимірному координатному просторі задана рівнянням $a_1x_1 + ... + a_nx_n = b$. Тоді відстань від будь-якого вектора $x = (x_1, ..., x_n)$ до гіперплощини A виражається формулою

$$\rho(x, A) = \frac{|a_1x_1 + ... + a_nx_n - b|}{\sqrt{a_1^2 + ... + a_n^2}}.$$

8. Нехай числова послідовність $a = (a_1, a_2, ...)$ має таку властивість: для будь-якого $x = (x_1, x_2, ...) \in l_2$ ряд $\sum_{m=1}^{\infty} a_mx_m$ збігається. Тоді $a \in l_2$ і формула $f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_mx_m$ задає неперервний лінійний функціонал на l_2.

За допомогою попередньої вправи наступна теорема зводиться до теореми про замкнений графік.

9. Нехай нескінченна матриця $A = (a_{n,m})_{n,m=1}^{\infty}$ має таку властивість: для будь-якого $x = (x_1, x_2, ...) \in l_2$ і будь-якого $n \in \mathbb{N}$ ряд $\sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m}x_m$ збігається, і числова послідовність $Ax = (\sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m}x_m)_{n=1}^{\infty}$ належить до l_2 (іншими словами, оператор множення на матрицю A відображає l_2 в l_2). Тоді оператор множення на матрицю A неперервний, як оператор, що відображає l_2 в l_2.

12.3. Ортогональні ряди

Переходимо до вивчення розділу, який певною мірою вже вивчали в інших університетських курсах: в курсі математичного аналізу — при вивченні тригонометричних рядів і в курсі лінійної алгебри — при побудові ортонормованих базисів у скінченновимірних евклідових просторах.

12.3.1. Критерій збіжності ортогонального ряду

Лема. *Нехай елементи $(x_k)_1^n$ гільбертового простору H попарно ортогональні: $\langle x_k, x_j\rangle = 0$ при $k \neq j$. Тоді* $\left\|\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} \|x_k\|^2$.

Доведення. Потрібно скористатись означенням норми, розкрити дужки і викреслити нульові доданки:

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} x_k\right\|^2 = \left\langle \sum_{k=1}^{n} x_k, \sum_{k=1}^{n} x_k \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle x_k, x_k\rangle + \sum_{k,j=1,\, k\neq j}^{n} \langle x_k, x_j\rangle = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2.$$

□

Теорема. *Нехай* $(x_k)_1^\infty$ *— послідовність попарно ортогональних елементів гільбертового простору* H. *Тоді для збіжності ряду* $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *необхідно і достатньо, щоб збігався числовий ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^2$.

Доведення. За критерієм Коші, для збіжності ряду $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ необхідно і достатньо, щоб $\|\sum_{k=n}^{m} x_k\|^2 \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$. Ця умова з огляду на доведену лему еквівалентна умові $\sum_{k=n}^{m} \|x_k\|^2 \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$, що, знову ж таки за критерієм Коші, рівносильно збіжності ряду $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^2$. □

Зауваження. Якщо ряд попарно ортогональних доданків $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ збігається, то простим граничним переходом при $n \to \infty$ з формули $\|\sum_{k=1}^{n} x_k\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2$ отримуємо рівність $\|\sum_{k=1}^{\infty} x_k\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^2$.

Вправа

Нехай $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_k e^{ikt}$ — ряд в $L_2[0, 2\pi]$. За якої умови на коефіцієнти a_k ряд збігається в $L_2[0, 2\pi]$? Чому дорівнює норма суми цього ряду?

12.3.2. Ортонормовані системи. Нерівність Бесселя

У цьому підрозділі для простоти викладу через Γ позначатиметься скінченна або злічення множина індексів. Проте виклад буде побудовано так, щоб читач без великих труднощів міг поширити основні твердження і на випадок незліченного Γ.

Означення. Система $\{x_k\}_{k\in\Gamma}$ елементів гільбертового простору H називається *ортонормованою системою*, якщо x_k попарно ортогональні і норми всіх x_k дорівнюють 1. Ці дві умови можуть бути записані разом формулою $\langle x_k, x_j\rangle = \delta_{k,j}$, де $\delta_{k,j}$ — це символ Кронекера. *Коефіцієнтами Фур'є* елемента $h \in H$ за ортонормованою системою $\{x_k\}_{k\in\Gamma}$ називаються числа $\hat{h}_k = \langle h, x_k\rangle$, $k \in \Gamma$.

Наступне твердження прояснює значення коефіцієнтів Фур'є.

Твердження 1. *Нехай* $\{x_k\}_{k\in\Gamma}$ *— ортонормована система,* $\{a_k\}_{k\in\Gamma}$ *— скаляри і* $h = \sum_{k\in\Gamma} a_k x_k$ *(якщо в останній сумі нескінченне число ненульових доданків, то суму розуміємо як ряд, записаний в деякому фіксованому порядку). Тоді* $a_k = \hat{h}_k$ *при всіх* $k \in \Gamma$.

Доведення. Помножимо скалярно обидві частини рівності $h = \sum_{k\in\Gamma} a_k x_k$ на елемент x_j. Одержимо $\langle h, x_j\rangle = \sum\limits_{k\in\Gamma} a_k \langle x_k, x_j\rangle$. Згадаємо, що $\langle x_k, x_j\rangle = \delta_{k,j}$, тобто вся сума в правій частині останньої рівності складається з одного доданка a_j, отримуємо потрібну рівність $a_j = \langle h, x_j\rangle$. □

Твердження 2. *Нехай* $\{x_k\}_{k\in\Gamma}$ *— ортонормована система елементів гільбертового простору* H, *підпростір* X *— це замикання лінійної оболонки множини* $\{x_k\}_{k\in\Gamma}$, $h \in H$. *Для того, щоб елемент* $h_0 \in X$ *був найближчим в* X *до* h, *необхідно і достатньо, щоб коефіцієнти Фур'є елемента* h_0 *за системою* $\{x_k\}_{k\in\Gamma}$ *збігалися з відповідними коефіцієнтами Фур'є елемента* h.

Доведення. На підставі твердження 2 п. 12.2.2, h_0 — найближчий в X елемент до h тоді і тільки тоді, коли $h - h_0 \in X^\perp$. Оскільки $X = \overline{\mathrm{Lin}}\,\{x_k\}_{k\in\Gamma}$, то умова $h - h_0 \in X^\perp$ еквівалентна одночасному виконанню рівностей $\langle h - h_0, x_k\rangle = 0$ при всіх $k \in \Gamma$, що, в свою чергу, означає потрібну рівність $\langle h_0, x_k\rangle = \langle h, x_k\rangle$, $k \in \Gamma$. □

Теорема (нерівність Бесселя). *Нехай $\{x_k\}_{k\in\Gamma}$ — ортонормована система в гільбертовому просторі H, $h \in H$. Тоді $\sum_{k\in\Gamma} |\hat{h}_k|^2 \leqslant \|h\|^2$.*

Доведення. Нерівність Бесселя достатньо довести для скінченних ортонормованих систем: якщо $\sum_{k\in\Delta} |\hat{h}_k|^2 \leqslant \|h\|^2$ для будь-якої скінченної підмножини $\Delta \subset \Gamma$, то і сума по всьому Γ оцінюється тим самим числом.

Нехай множина Γ скінченна. Розглянемо елемент $x = \sum_{k\in\Gamma} \hat{h}_k x_k$. Згідно з твердженням 1, $\hat{x}_k = \hat{h}_k$. За твердженням 2, x — це найближчий в підпросторі $X = \mathrm{Lin}\,\{x_k\}_{k\in\Gamma}$ елемент до h, тому, $(h-x)\perp x$ і $\|x\|^2 + \|h-x\|^2 = \|h\|^2$. Отже,

$$\sum_{k\in\Gamma} \left|\hat{h}_k\right|^2 = \|x\|^2 \leqslant \|h\|^2 . \qquad \square$$

Вправи

1. Чому в доведенні твердження 1 ми мали право вносити скалярний добуток під знак суми?

2. Чому в формулюванні нерівності Бесселя $\sum_{k\in\Gamma} |\hat{h}_k|^2$ не залежить від порядку, в якому виписані доданки?

Нехай Γ — деяка, можливо незліченна множина індексів. За означенням, ряд $\sum_{k\in\Gamma} x_k$ елементів банахового простору *безумовно збігається* до елемента x, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує така скінченна підмножина $\Delta \subset \Gamma$, що для будь-якої скінченної підмножини $\Delta_1 \subset \Gamma$, якщо $\Delta_1 \supset \Delta$, то $\left\|x - \sum_{k\in\Delta_1} x_k\right\| < \varepsilon$. (По суті, тут йде мова про збіжність за деякою напрямленістю. Порівняйте з вправою 5 п. 4.1.2). Нехай ряд $\sum_{k\in\Gamma} x_k$ елементів банахового простору безумовно збігається до елемента x. Тоді:

3. Для будь-якого $\varepsilon > 0$ кількість доданків, за нормою більших ніж ε, скінченна.

4. Кількість ненульових доданків ряду не більш ніж злічена.

5. Якщо всі ненульові доданки цього ряду виписати у довільний спосіб в послідовність $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots$, то отриманий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_{k_n}$ збігається до елемента x в звичайному розумінні.

6. Перевірте, що якщо під збіжністю ряду незліченного числа доданків розуміти безумовну збіжність, то твердження про ортогональні ряди і ортонормовані системи, доведені в останніх двох пунктах, зберігають силу і для незліченних систем і рядів.

12.3.3. Ряди Фур'є, ортонормовані базиси і рівність Парсеваля

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \hat{h}_n e_n$, де $\hat{h}_n$ — відповідні коефіцієнти Фур'є, називається *рядом Фур'є* елемента $h \in H$ за системою $\{e_n\}_1^{\infty} \subset H$.

Теорема 1. *Нехай $\{e_n\}_1^{\infty}$ — ортонормована система в гільбертовому просторі H, $X = \overline{\mathrm{Lin}}\,\{e_k\}_1^{\infty}$ і P — ортопроектор на підпростір X. Тоді ряд Фур'є будь-якого елемента $h \in H$ збігається і його сума дорівнює Ph.*

Доведення. Збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \hat{h}_n e_n$ випливає з нерівності Бесселя (п. 12.3.2) і критерію збіжності ортогонального ряду (п. 12.3.1). Далі, елемент h можна зобразити у вигляді

$$h = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \hat{h}_n e_n\right) + \left(h - \sum_{n=1}^{\infty} \hat{h}_n e_n\right),$$

де, вочевидь, $\sum_{n=1}^{\infty} \hat{h}_n e_n \in X$, а $h - \sum_{n=1}^{\infty} \hat{h}_n e_n \in X^{\perp}$ (див. вправу 7 п. 12.2.2). За означенням ортопроектора, звідси випливає, що $Ph = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{h}_n e_n$. □

Означення. Повна ортонормована система $\{e_n\}_1^{\infty}$ в гільбертовому просторі H називається *ортонормованим базисом*. Іншими словами, $\{e_n\}_1^{\infty}$ утворюють ортонормований базис, якщо $\langle e_k, e_j \rangle = \delta_{k,j}$ для всіх $k, j \in \mathbb{N}$ і $\overline{\mathrm{Lin}} \{e_k\}_1^{\infty} = H$.

Якщо в умовах теореми 1 $\{e_n\}_1^{\infty}$ — ортонормований базис, то $X = H$ і ортопроектор P — це просто тотожний оператор. Звідси отримуємо такий результат.

Теорема 2. *Нехай $\{e_n\}_1^{\infty}$ — ортонормований базис в просторі H. Тоді ряд Фур'є будь-якого елемента $h \in H$ збігається і $\sum_{n=1}^{\infty} \hat{h}_n e_n = h$.*

Вправи

1. Нехай H — гільбертів простір, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \hat{h}_n e_n$ — ряд Фур'є елемента $h \in H$. Такі умови еквівалентні:

– $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \hat{h}_n e_n = h$;

– для елемента h виконується *рівність Парсеваля*: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\hat{h}_k|^2 = \|h\|^2$.

2. Якщо $\{e_n\}_1^{\infty}$ — ортонормований базис, то рівність Парсеваля виконується для будь-якого елемента $h \in H$.

3. Підберіть коефіцієнти a_k так, щоб послідовність функцій $f_k = a_k e^{ikt}$, $k \in \mathbb{Z}$ утворювала ортонормовану систему в $L_2[0, 2\pi]$.

4. Нехай послідовність (f_k) неперервно диференційовних функцій утворює ортонормовану систему в $L_2[0, 2\pi]$. Доведіть, що похідні функцій (f_k) не можуть бути обмеженими в сукупності.

5. Наведіть приклад послідовності (f_k) неперервно диференційовних функцій з обмеженими в сукупності похідними, яка утворює ортонормовану систему в $L_2(-\infty, +\infty)$.

6. (Нерозв'язана задача.) Нехай $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ — неперервна обмежена функція, для якої функції $f_k(t) = f(kt)$, $k = 0, 1, ...$ утворюють ортонормовану систему в $L_2[0, 2\pi]$. Чи повинна функція f бути періодичною?

12.3.4. Ортогоналізація за Грамом–Шмідтом і теорема існування ортонормованого базису

Теорема 1. *Нехай H — гільбертів простір, $\{x_n\}_1^{\infty} \subset H$ — лінійно незалежна послідовність, $X_n = Lin\{x_k\}_1^n$. Тоді існує ортонормована система $\{e_n\}_1^{\infty}$, яка має таку властивість: $Lin\{e_k\}_1^n = X_n$ для всіх n. Така ортонормована система $\{e_n\}_1^{\infty}$ називається* ортогоналізація за Грамом–Шмідтом *системи $\{x_n\}_1^{\infty}$.*

Доведення. Позначимо через P_n ортопроектор на X_n. Покладемо

$$e_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|},\ e_2 = \frac{x_2 - P_1 x_2}{\|x_2 - P_1 x_2\|},\ ...,\ e_{n+1} = \frac{x_{n+1} - P_n x_{n+1}}{\|x_{n+1} - P_n x_{n+1}\|}, ...$$

При такому означенні всі e_k при $k \leqslant n$ лежать в X_n, а e_{n+1} ортогональний до X_n. Тобто при кожному n вектор e_{n+1} ортогональний до всіх попередніх e_k. Крім того, норми всіх e_k дорівнюють 1. Отже, $\{e_n\}_1^{\infty}$ — ортонормована система. За побудовою, $\mathrm{Lin}\{e_k\}_1^n \subset X_n$ і вимірності цих просторів збігаються. Отже, $\mathrm{Lin}\{e_k\}_1^n = X_n$. □

Зауваження. Оскільки $\{e_k\}_1^n$ утворюють ортонормований базис в X_n, для будь-якого $h \in H$, за теоремою 1 попереднього пункту (п. 12.3.3), $P_n h = \sum_{k=1}^n \hat{h}_k e_k$. Тобто e_k можна будувати по $\{x_n\}_1^\infty$ явно, використовуючи таку рекурентну формулу:

$$e_{n+1} = \frac{x_{n+1} - \sum\limits_{k=1}^{n} \langle x_{n+1}, e_k \rangle e_k}{\left\| x_{n+1} - \sum\limits_{k=1}^{n} \langle x_{n+1}, e_k \rangle e_k \right\|}.$$

Теорема 2. *У будь-якому нескінченновимірному сепарабельному гільбертовому просторі існує ортонормований базис.*

Доведення. У сепарабельному гільбертовому просторі H існує зліченна щільна послідовність. Викинувши з цієї послідовності елементи, лінійно залежні з попередніми, отримаємо лінійно незалежну послідовність $\{x_n\}_1^\infty \subset H$, повну в H. Нехай $\{e_n\}_1^\infty$ — ортогоналізація за Грамом–Шмідтом послідовності $\{x_n\}_1^\infty$. Тоді $\{e_n\}_1^\infty$ — ортонормована система, $\operatorname{Lin}\{e_k\}_1^\infty = \operatorname{Lin}\{x_k\}_1^\infty$. Тобто побудована система $\{e_n\}_1^\infty$ повна в H, що за означенням дає, що $\{e_n\}_1^\infty$ — ортонормований базис простору H. □

Вправи

1. У доведенні теореми 1 ми зазначали, що вектор e_{n+1} ортогональний до всіх попередніх e_k. Чому він ортогональний і до всіх наступних e_k?

2. Чому знаменник у формулі $e_{n+1} = \dfrac{x_{n+1} - P_n x_{n+1}}{\|x_{n+1} - P_n x_{n+1}\|}$ не дорівнює нулю?

3. У теоремі 1 доведено існування ортогоналізації за Грамом–Шмідтом послідовності $(x_n)_1^\infty$. Чи єдина ця ортогоналізація?

4. Якою властивістю проектора P_n ми користувались, стверджуючи, що e_{n+1} ортогональний до X_n?

5. Обґрунтуйте рівність $\operatorname{Lin}\{e_k\}_1^\infty = \operatorname{Lin}\{x_k\}_1^\infty$ з доведення теореми 2.

6. Доведіть, що сім'я всіх ортонормованих систем в гільбертовому просторі H, впорядкована за включенням, задовольняє умови леми Цорна. Звідси можна вивести як теорему існування ортонормованого базису в сепарабельному гільбертовому просторі, так і її аналог для несепарабельного випадку. Недолік такого міркування — відсутність явної конструкції базису.

7. Нехай H — гільбертів простір. Тоді у будь-яких двох ортонормованих базисів в H одна і та сама потужність («кількість елементів»).

12.3.5. Теорема про ізоморфізм

Означення. Нехай H_1, H_2 — гільбертові простори. Оператор $T\colon H_1 \to H_2$ називається *ізоморфізмом гільбертових просторів*, якщо T бієктивний і $\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle$ для будь-яких $x, y \in H_1$. Гільбертові простори H_1, H_2 називаються ізоморфними, якщо існує ізоморфізм гільбертових просторів $T\colon H_1 \to H_2$.

Теорема. *Будь-який сепарабельний нескінченновимірний гільбертів простір H ізоморфний простору l_2.*

Доведення. Нехай $\{e_n\}_1^\infty$ — ортонормований базис в H. Означимо оператор $T\colon H \to l_2$ формулою $Th = (\langle h, e_1 \rangle, \langle h, e_2 \rangle, ..., \langle h, e_n \rangle, ...)$. Тобто елементу $h \in H$ ставимо у відповідність послідовність його коефіцієнтів Фур'є. За нерівністю Бесселя, $Th \in l_2$ і $\|Th\| \leqslant \|h\|$. В оператора T існує обернений — T^{-1}, який діє з l_2 в H за правилом

$$T^{-1}(a_n)_1^\infty = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n.$$

Отже, оператор T оборотний, тобто він бієктивний. Залишилось перевірити рівність $\langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle$. Отож, нехай $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ і $y = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n e_n$ — довільні елементи простору H. Маємо

$$\langle x, y\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k, \sum_{j=1}^{\infty} b_j e_k \right\rangle =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_k \bar{b}_j \langle e_k, e_j\rangle \right) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \bar{b}_k = \langle Tx, Ty\rangle . \qquad \square$$

Оскільки всі сепарабельні нескінченновимірні гільбертові простори ізоморфні між собою, при розв'язуванні конкретної задачі можна вибирати той з просторів, який є зручнішим у цьому випадку. Наведемо приклад. У вправі 5 п. 11.1.6 пропонувалося перевірити існування і обчислити спектр оператора A, який має в канонічному базисі простору l_2 дводіагональну матрицю, де на цих діагоналях розташовані одиниці. Позначимо через H_2 підпростір простору $L_2[0,1]$, утворений замиканням лінійної оболонки ортонормованої системи $e_n = e^{2\pi int}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Розглянемо в H_2 оператор T множення на функцію $g(t) = 1 + e^{2\pi it}$, який діє за правилом $Tf = g \cdot f$. У введеному нами базисі e_n матрицею оператора T буде

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

тобто та сама матриця, що й в A. Відповідно, замість того, щоб розглядати оператор A в l_2 можна розглянути оператор T в H_2, який має ті ж властивості. Але оператор T вже визначено простим явним виразом, і його властивості значно легше піддаються вивченню. Пропонуємо читачеві розв'язати вправу 5 п. 11.1.6, спираючись на описану ідею заміни простору l_2 простором H_2.

Вправи

1. Доведення теореми про ізоморфізм розпочато словами: «Нехай $\{e_n\}_1^{\infty}$ — ортонормований базис в H». Чому в H існує ортонормований базис?

2. Перевірте самостійно, що оператор T з доведення теореми про ізоморфізм лінійний.

3. Чому ряд $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n e_n$ в означенні оператора T^{-1} збігається?

4. Перевірте, що оператор $T^{-1}(a_n)_1^{\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ справді є оберненим до T.

5. Чому будь-який елемент простору H можна зобразити у вигляді $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ — сумою збіжного ряду за системою $\{e_n\}_1^{\infty}$?

6. Обґрунтуйте збіжність ряду $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_k \bar{b}_j \langle e_k, e_j\rangle \right)$ і рівність

$$\left\langle \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k, \sum_{j=1}^{\infty} b_j e_k \right\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_k \bar{b}_j \langle e_k, e_j\rangle \right)$$

в доведенні теореми про ізоморфізм.

7. Побудуйте який-небудь конкретний ізоморфізм гільбертових просторів $L_2[0,1]$ і l_2.

8. Кожний ізоморфізм T гільбертових просторів H_1, H_2 є ізометрією: $\forall h \in H_1$ $\|Th\| = \|h\|$.

9. Кожна бієктивна ізометрія просторів H_1, H_2 є ізоморфізмом цих гільбертових просторів.
10. Чи може скінченновимірний гільбертів простір бути ізоморфним нескінченновимірному?
11. Чи може сепарабельний гільбертів простір бути ізоморфним несепарабельному?
12. Нехай гільбертові простори H_1, H_2 мають рівнопотужні повні ортонормовані системи. Тоді ці простори ізоморфні.

12.4. Самоспряжені оператори

12.4.1. Білінійні форми в гільбертовому просторі

Означення. Нехай H — гільбертів простір. Відображення $F\colon H \times H \to \mathbb{C}$ називається *білінійною формою*, якщо для будь-яких елементів x, y, x_1, x_2, y_1, y_2 простору H і довільних комплексних чисел λ, μ виконуються співвідношення:

– $F(\lambda x_1 + \mu x_2, y) = \lambda F(x_1, y) + \mu F(x_2, y)$;

– $F(x, \lambda y_1 + \mu y_2) = \overline{\lambda} F(x, y_1) + \overline{\mu} F(x, y_2)$.

Термін «білінійна форма» тут не зовсім точний: умову лінійності за другою змінною дещо модифіковано. У деяких підручниках таку модифіковану умову називають напівлінійністю, а відповідні форми — не білінійними, а півторалінійними.

Приклади

1. У скінченновимірному координатному просторі будь-яка білінійна форма може бути записана у вигляді $F(x, y) = \sum_{k,j=1}^{n} a_{k,j} x_k \bar{y}_j$, де x_k і y_j — координати відповідних векторів.

2. Нехай A — лінійний оператор в H. Вираз $F(x, y) = \langle x, Ay \rangle$, так само як і $G(x, y) = \langle Ax, y \rangle$, задає білінійну форму.

Означення. Білінійна форма називається неперервною, якщо вона неперервна за кожною змінною.

Теорема про загальний вигляд неперервної білінійної форми в гільбертовому просторі. *Нехай F — неперервна білінійна форма в H. Тоді існує такий неперервний оператор A, що $F(x, y) = \langle x, Ay \rangle$ для будь-яких x, y з H. Оператор A визначається формою F однозначно.*

Доведення. Зафіксуємо елемент $y \in H$. Тоді $F(x, y)$ — неперервний лінійний функціонал за першою змінною. За теоремою про загальний вигляд лінійного функціонала в гільбертовому просторі, існує такий елемент $A(y) \in H$, що $F(x, y) = \langle x, A(y) \rangle$. При цьому елемент $A(y)$ визначається за y однозначно. Нам залишилось перевірити, що відображення $y \mapsto A(y)$ лінійне і неперервне.

Лінійність.

$$\langle x, A(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) \rangle = F(x, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) =$$
$$= \lambda_1 F(x, y_1) + \lambda_2 F(x, y_2) = \langle x, \lambda_1 A(y_1) + \lambda_2 A(y_2) \rangle .$$

З огляду на довільність елемента x це означає, що $A(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 A(y_1) + \lambda_2 A(y_2)$.

Неперервність. Для будь-якого $x \in H$ вираз $F(x, y) = \langle x, Ay \rangle$ неперервний за y. Тобто для будь-якої послідовності (y_n) в H, яка прямує до нуля, маємо $\langle x, Ay_n \rangle \to 0$ $(n \to \infty)$. Це означає, що послідовність функціоналів $f_n(x) = \langle x, Ay_n \rangle$ поточково прямує до нуля. За теоремою Банаха-Штейнгауза, (f_n) — обмежена послідовність. Враховуючи, що $\|f_n\| = \|Ay_n\|$, одержуємо, що оператор A переводить будь-яку прямуючу до нуля послідовність (y_n) в обмежену. Але ця властивість, згідно з теоремою п. 6.4.1, еквівалентна неперервності оператора. Теорему доведено. □

12.4.2. Спряжений оператор до оператора в гільбертовому просторі

Читачеві добре знайоме поняття спряженого оператора, як оператора, що діє в спряжених просторах; але, оскільки в гільбертовому просторі неперервні лінійні функціонали ототожнюються з елементами самого простору, тут природно ввести поняття спряженого оператора дещо по-іншому.

Означення. Нехай $A \in L(H)$. *Спряженим оператором* до оператора A називається такий оператор A^*, що рівність $\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle$ виконується для будь-яких елементів $x, y \in H$.

Коректність означення, тобто існування і єдиність оператора A^*, нам гарантує теорема про загальний вигляд неперервної білінійної форми.

Зазначимо властивості операції переходу до спряженого оператора:

1. $(A_1 + A_2)^* = A_1^* + A_2^*$;
2. $I^* = I$;
3. $(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*$;
4. $(A_1 A_2)^* = A_2^* A_1^*$;
5. $(A^*)^* = A$.

Усі перераховані вище властивості перевіряються за однією і тією ж схемою. Доведемо, для прикладу, першу з цих властивостей. Нам потрібно перевірити, що $(A_1 + A_2)^* y = A_1^* y + A_2^* y$ для будь-якого $y \in H$. Для цього, в свою чергу, достатньо перевірити, що $\langle x, (A_1 + A_2)^* y \rangle = \langle x, A_1^* y + A_2^* y \rangle$ для всіх $x \in H$. Маємо,

$$\langle x, (A_1 + A_2)^* y \rangle = \langle (A_1 + A_2) x, y \rangle = \langle A_1 x, y \rangle + \langle A_2 x, y \rangle =$$

$$= \langle x, A_1^* y \rangle + \langle x, A_2^* y \rangle = \langle x, A_1^* y + A_2^* y \rangle .$$

Зауваження. Хоча спряжений оператор в рамках теорії гільбертового простору означений інакше, ніж для звичайних банахових просторів (п. 9.4.1), по суті, ми маємо справу з частковим випадком цього означення. Справді, якщо кожен елемент $y \in H$ ототожнити з породженим ним лінійним функціоналом на H: $y(x) = \langle x, y \rangle$, то означення $\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle$ перепишеться у звичному вигляді $(T^* y)(x) = y(Tx)$. Тому загальні теореми про зв'язки образів, ядер, ін'єктивності і сюр'єктивності оператора і його спряженого, доведені у п. 9.4.1, зберігають свою силу. (Доведіть це!) Зокрема, якщо оператор A^* ін'єктивний, то образ оператора A щільний в H.

Лема 1. *Нехай оператори A і A^* обмежені знизу. Тоді оператор A оборотний.*

Доведення. Оскільки A обмежений знизу, то він ін'єктивний, і його образ замкнений. З обмеженості знизу оператора A^* випливає, що він також ін'єктивний, отже, образ оператора A щільний в H. Оскільки образ оператора A замкнений і щільний в H, то $A(H) = H$, тобто A сюр'єктивний. Ін'єктивність + сюр'єктивність = оборотність. □

Вправи

1. Перевірте властивості 2–5 операції переходу до спряженого оператора.

2. Якщо спряжений оператор в гільбертовому просторі — частковий випадок спряженого оператора, визначеного для загальних банахових просторів, то чому властивість 3 операції переходу до спряженого оператора в гільбертовому просторі відрізняється від аналогічної властивості в банахових просторах? Звідки береться риска комплексного спряження над λ?

3. Чи виконується в загальних банахових просторах аналог властивості 5?

4. Доведіть співвідношення $\sigma\left(U^{-1}\right) = \left\{\frac{1}{\lambda} : \ \lambda \in \sigma\left(U\right)\right\}$ і $\sigma\left(U^*\right) = \left\{\bar{\lambda} \colon \lambda \in \sigma\left(U\right)\right\}$: перше — для оборотного, а друге для довільного оператора $U \in L\left(H\right)$.

5. Перевірте, що неперервна білінійна форма неперервна за сукупністю змінних.

6. Чи буде наведене вище означення спряженого оператора коректним, якщо H — неповний простір зі скалярним добутком?

7. Нехай $P \in L\left(H\right)$ — проектор. Тоді P^* — також проектор. На який підпростір?

Назвемо *гільберт–шмідтовою нормою* оператора A величину

$$\|A\|_{\text{H-S}} = \left(\sum_{n,m\in\mathbb{N}} \left|\langle Ae_n, g_m\rangle\right|^2\right)^{1/2},$$

де $\{e_n\}_1^\infty$, $\{g_n\}_1^\infty$ — фіксована пара ортонормованих базисів гільбертового простору. Оператор назвемо гільберт-шмідтовим, якщо $\|A\|_{\text{H-S}} < \infty$ або, іншими словами, якщо його матриця в цій парі базисів — гільберт-шмідтова. Доведіть, що:

8. $\|A\| \leqslant \|A\|_{\text{H-S}}$.

9. $\left(\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \|A^* g_n\|^2\right)^{1/2} = \|A\|_{\text{H-S}} = \left(\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \|Ae_n\|^2\right)^{1/2}$.

10. $\|A\|_{\text{H-S}}$ не залежить від вибору пари ортонормованих базисів $\{e_n\}_1^\infty$, $\{g_n\}_1^\infty$, і $\|A\|_{\text{H-S}} = \|A^*\|_{H-S}$.

11. Застосуйте попередню вправу для доведення такого факту: нехай U — фіксований еліпсоїд у скінченновимірному евклідовому просторі. Тоді всі прямокутні паралелепіпеди, описані навколо U, мають однакові діаметри. Зазначимо, що навіть в тривимірному випадку довести цей факт методами аналітичної геометрії зовсім непросто.

12. Кожен гільберт-шмідтовий оператор компактний.

12.4.3. Самоспряжений оператор і його квадратична форма

Означення 1. Оператор A в гільбертовому просторі називається *самоспряженим*, якщо $A^* = A$ або, еквівалентно, якщо $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$ для будь-яких елементів $x, y \in H$.

Ми згадували раніше аналогію між операторами і комплексними числами. Для операторів в гільбертовому просторі, завдяки поняттю спряженого оператора, ця аналогія виявляється значно ефективнішою, ніж в загальному випадку. Зокрема, самоспряжені оператори ($A^* = A$) аналогічні дійсним числам ($z = \bar{z}$). Водночас до цієї аналогії варто ставитись з певною обережністю: оператори, на відміну від чисел, можуть не комутувати.

Наступна теорема подає нетривіальні приклади самоспряжених операторів.

Теорема 1. *Для проектора $P \in L\left(H\right)$ такі умови еквівалентні:*

(1) P — самоспряжений оператор;

(2) P — *ортопроектор.*

Доведення. Оскільки P — проектор, то простір H розкладається у пряму суму $H = H_1 \oplus H_2$, де H_1 — ядро проектора, а H_2 — образ. Доведемо спочатку імплікацію (1)⇒(2), тобто, якщо P — самоспряжений оператор, то $H_1 \perp H_2$. Справді, нехай $h_1 \in H_1$ і $h_2 \in H_2$. Тоді

$$\langle h_1, h_2 \rangle = \langle h_1, Ph_2 \rangle = \langle Ph_1, h_2 \rangle = 0.$$

Доведемо тепер обернену імплікацію (2)⇒(1), тобто, якщо $H_1 \perp H_2$, то P — самоспряжений оператор. Для цього візьмемо елементи $x, y \in H$ і запишемо їхній розклад $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$, де $x_1, y_1 \in H_1$, $x_2, y_2 \in H_2$. Маємо

$$\langle Px, y \rangle = \langle x_2, y \rangle = \langle x_2, y_2 \rangle = \langle x, y_2 \rangle = \langle x, Py \rangle . \qquad \square$$

Означення 2. Нехай A — самоспряжений оператор. *Білінійною формою оператора A* називається функція $F(x, y) = \langle Ax, y \rangle$; функція $g(x) = \langle Ax, x \rangle$ називається *квадратичною формою оператора A.*

Зазначимо, що

$$g(x) = \langle Ax, x \rangle \ = \ \langle x, Ax \rangle \ = \ \overline{\langle Ax, x \rangle} \ = \overline{g(x)},$$

тому квадратична форма самоспряженого оператора набуває тільки дійсні значення. Неважко перевірити, що

$$\operatorname{Re} \langle Ax, y \rangle = \frac{1}{4}\big(\langle A(x+y), (x+y) \rangle - \langle A(x-y), (x-y) \rangle \big) .$$

Аналогічно можна знайти й уявну частину форми $\langle Ax, y \rangle$, тобто білінійна форма однозначно визначається за квадратичною. У свою чергу, з теореми про загальний вигляд білінійної форми випливає, що за білінійною формою можна відновити сам оператор. Отже, всю інформацію про самоспряжений оператор можна одержати, знаючи властивості його квадратичної форми. Як приклад наведемо досить корисну формулу для норми самоспряженого оператора.

Теорема 2. *Нехай A — самоспряжений оператор. Тоді*

$$\|A\| = \sup_{x \in S_H} |\langle Ax, x \rangle| . \tag{1}$$

Доведення. Введемо позначення $q = \sup_{x \in S_H} |\langle Ax, x \rangle|$. Для будь-якого $z \in S_H$ справджується оцінка $|\langle Az, z \rangle| \leqslant q \|z\|^2$. За однорідністю, ця оцінка зберігається і для будь-якого $z \in H$. Потрібно довести, що $\|A\| = q$. Маємо:

$$\|A\| = \sup_{x \in S_H} \|Ax\| = \sup_{x, y \in S_H} \operatorname{Re} \langle Ax, y \rangle =$$

$$= \sup_{x, y \in S_H} \frac{1}{4} \left(\langle A(x+y), (x+y) \rangle - \langle A(x-y), (x-y) \rangle \right) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{x, y \in S_H} \frac{q}{4} \left(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 \right) = \sup_{x, y \in S_H} \frac{2q}{4} \left(\|x\|^2 + \|y\|^2 \right) = q,$$

тобто $\|A\| \leqslant q$. Обернене співвідношення відразу випливає з нерівності Коші–Буняковського:

$$q = \sup_{x \in S_H} |\langle Ax, x \rangle| \leqslant \sup_{x \in S_H} \|Ax\| = \|A\| . \qquad \square$$

Вправи

1. При яких λ оператор λI буде самоспряженим?

2. Обчислити норму оператора A, що задається матрицею $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ в двомірному координатному просторі (простір розглядається у стандартній евклідовій нормі). Чи буде для цього оператора виконуватись формула (1)?

3. Де в доведенні цієї формули була використана самоспряженість оператора, без якої формула не справджується?

4. Чи може для ненульового оператора функція $g(x) = \langle Ax, x\rangle$ бути тотожним нулем?

5. Перевірте, що самоспряжені оператори утворюють замкнений лінійний підпростір в $L(H)$. Чи замкнений цей підпростір в розумінні поточкової збіжності операторів?

6. Перевірте, що добуток самоспряжених операторів є самоспряженим оператором тоді і тільки тоді, коли оператори комутують. **(N.B. Ми будемо надалі використовувати результати двох останніх вправ).**

7. Як повинні бути пов'язані між собою підпростори $H_1, H_2 \subset H$, щоб ортопроектори P_1, P_2 на ці підпростори комутували?

8. Обчисліть спряжений оператор до оператора T інтегрування з ядром в $L_2[0,1]$: $(Tf(t))(x) = \int_0^1 K(t,x) f(t)\,dt$, де $K \in L_2([0,1]\times[0,1])$. За якої умови на K оператор буде самосопряженим? Такі інтегральні оператори також називаються *гільберт–шмідтовим* інтегральними операторами. Використовуючи розклад ядра K у подвійний ряд Фур'є, доведіть, що гільберт–шмідтовий інтегральний оператор буде гільберт–шмідтовим оператором у розумінні, описаному у вправах п. 12.4.2.

9. Нехай оператор T задано своєю матрицею в ортонормованому базисі. Як пов'язані матриці операторів T і T^*?

10. Для оператора $T \in L(H)$ означимо *дійсну й уявну частини* формулами $\operatorname{Re} T = \frac{1}{2}(T + T^*)$ і $\operatorname{Im} T = \frac{1}{2i}(T - T^*)$. Перевірте, що $\operatorname{Re} T$ і $\operatorname{Im} T$ — самоспряжені оператори і $T = \operatorname{Re} T + i \operatorname{Im} T$.

11. Нехай T і T^* комутують (в цьому випадку оператор T називається *нормальним*). Тоді $\|T\| = \sqrt{\|(\operatorname{Re} T)^2 + (\operatorname{Im} T)^2\|}$.

12.4.4. Нерівності між операторами

Наступне означення допоможе поглибити неодноразово згадану вище аналогію між операторами і числами.

Означення. Оператор $A \in L(H)$ називається *додатним* ($A \geqslant 0$), якщо він є самоспряженим оператором з невід'ємною квадратичною формою (тобто $\langle Ax, x\rangle \geqslant 0$ для будь-якого $x \in H$). Нехай $A, B \in L(H)$. Вважатимемо, що $A \geqslant B$, якщо $A - B \geqslant 0$.

Теорема 1. *Нехай $A \in L(H)$ — додатний оператор. Тоді для будь-якого елемента $x \in H$ виконується нерівність*

$$\|Ax\| \leqslant \|A\|^{1/2} (\langle Ax, x\rangle)^{1/2}.$$

Доведення. Білінійна форма оператора A задовольняє всі аксіоми скалярного добутку, крім невиродженості. Тому, як ми зазначали у вправі 4 п. 12.1.2, для неї виконується нерівність Коші-Буняковського: $|\langle Ax, y\rangle| \leqslant \langle Ax, x\rangle^{1/2} \langle Ay, y\rangle^{1/2}$. Перейшовши в обох частинах останньої нерівності до супремума за $y \in S_H$, отримуємо потрібну оцінку. □

Основна мета цього параграфа — довести для операторів результат, аналогічний теоремі існування границі для обмеженої монотонної послідовності чисел.

Теорема 2. *Нехай самоспряжені оператори $A_n \in L(H)$ утворюють зростаючу обмежену послідовність, тобто $A_1 \leqslant A_2 \leqslant \ldots$ і $\sup_n \|A_n\| < \infty$. Тоді у цієї послідовності існує поточкова границя.*

Доведення. Зафіксуємо довільний вектор $x \in H$. Послідовність чисел $a_n = \langle A_n x, x\rangle$ не спадає і обмежена. Отже, ця послідовність має границю, і

$$a_n - a_m = \langle (A_n - A_m)\, x, x\rangle \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0.$$

Скориставшись теоремою 1, одержимо потрібну поточкову збіжність:

$$\|A_n x - A_m x\| \leqslant \|A_n - A_m\|^{1/2} \left(\langle (A_n - A_m)\, x, x\rangle\right)^{1/2} \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0. \qquad \square$$

Вправи

1. При яких λ оператор λI є додатним оператором?
2. Будь-який ортопроектор — додатний оператор.
3. Нехай $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ортонормований базис в H. Перевірте, що оператори S_n частинних сум утворюють неспадну обмежену послідовність. Який оператор буде їх поточковою границею?
4. Чи може в умовах теореми 2 послідовність A_n не збігатися за нормою простору $L(H)$?
5. Нехай A, B — додатні оператори і $A + B = 0$. Тоді $A = B = 0$.
6. Доведіть, що добуток двох додатних комутовних операторів — додатний оператор[3].

12.4.5. Спектр самоспряженого оператора

Оскільки квадратична форма самоспряженого оператора набуває тільки дійсні значення, його власні числа можуть бути тільки дійсними (це міркування добре знайоме читачеві з курсу лінійної алгебри). Хоча спектр оператора в нескінченновимірному просторі і не вичерпується власними числами, твердження про дійсність спектра все одно зберігає силу.

Теорема 1 (теорема про структуру спектра самоспряженого оператора). *Нехай $A \in L(H)$ — самоспряжений оператор. Введемо позначення*

$$\alpha_- = \alpha_-(A) = \inf\{\langle Ax, x\rangle : x \in S_H\},$$
$$\alpha_+ = \alpha_+(A) = \sup\{\langle Ax, x\rangle : x \in S_H\}.$$

Тоді

(i) спектр оператора A складається тільки з дійсних чисел;

(ii) $\sigma(A) \subset [\alpha_-, \alpha_+]$;

(iii) кінці відрізка $[\alpha_-, \alpha_+]$ належать до спектра.

Доведення. (i) Нехай $\lambda = a + bi$ — комплексне число з уявною частиною b, відмінною від нуля. Нам потрібно довести оборотність оператора $A - \lambda I$. Доведемо для початку обмеженість знизу такого оператора.

$$\|(A - \lambda I)\, x\|^2 = \|(Ax - ax) - bix\|^2 =$$

[3] Незважаючи на простоту формулювання, вправа непроста.

$$= \|Ax - ax\|^2 - 2\operatorname{Re}\langle Ax - ax, bix\rangle + b^2\|x\|^2.$$

Величини $\langle Ax, x\rangle$ і $\langle x, x\rangle$ дійсні, тому $2\operatorname{Re}\langle Ax - ax, bix\rangle = 0$ і $\|(A - \lambda I)\,x\|^2 \geqslant b^2\|x\|^2$, тобто оператор $A - \lambda I$ обмежений знизу. З тієї ж причини обмежений знизу і оператор $(A - \lambda I)^* = A - \bar{\lambda} I$ (він має такий саме вигляд, тільки з іншим коефіцієнтом λ). Тобто, за лемою 1 п. 12.4.2, оператор $A - \lambda I$ оборотний.

(ii) Зазначимо, що квадратична форма оператора $A - \alpha_+ I$ набуває значень, які менші або дорівнюють нулю. Справді, для будь-якого елемента $x \in S_H$ маємо

$$\langle (A - \alpha_+ I)\,x, x\rangle = \langle Ax, x\rangle - \alpha_+ \leqslant 0.$$

Нехай $\lambda > \alpha_+$, $\varepsilon = \lambda - \alpha_+$. Доведемо оборотність оператора $A - \lambda I = (A - \alpha_+ I) - \varepsilon I$, для чого на підставі самоспряженості достатньо довести його обмеженість знизу (знову користуємось лемою 1 п. 12.4.2). Маємо

$$\|(A - \lambda I)\,x\|^2 = \|(A - \alpha_+ I)\,x\|^2 - 2\operatorname{Re}\langle (A - \alpha_+ I)\,x, \varepsilon x\rangle + \varepsilon^2\|x\|^2 \geqslant \varepsilon^2\|x\|^2.$$

Отже, оператор $A - \lambda I$ оборотний, тобто не належить до спектра оператора A. Цим для довільного самоспряженого оператора A доведено включення $\sigma(A) \subset (-\infty, \alpha_+]$. Заміною оператора A на $-A$ одержимо, що

$$-\sigma(A) = \sigma(A) \subset (-\infty, \alpha_+(-A)] = (-\infty, \alpha_-(-A)],$$

тобто що $\sigma(A) \subset [\alpha_-(A), +\infty)$.

(iii) Доведемо, що $\alpha_- \in \sigma(A)$, тобто що оператор $B = A - \alpha_- I$ необоротний. У цьому нам допоможе така очевидна властивість квадратичною форми оператора B:

$$\inf_{x \in S_H} \langle Bx,\, x\rangle = \inf_{x \in S_H} \langle Ax,\, x\rangle - \alpha_- = 0.$$

Зокрема, оператор B додатний. Скористаємось теоремою 1 п. 12.4.4:

$$\inf_{x \in S_H} \|Bx\| \leqslant \|B\|^{1/2} \inf_{x \in S_H} \langle Bx,\, x\rangle^{1/2} = 0.$$

Отож, оператор необмежений знизу і, тому, необоротний. Належність числа α_+ до спектра легко отримати заміною оператора A на $-A$, як ми це вже робили вище. Теорему доведено. □

Зазначимо деякі наслідки з доведеної теореми.

Наслідок 1. *Самоспряжений оператор є додатним тоді і тільки тоді, коли його спектр складається тільки з невід'ємних чисел.*

Доведення. Оператор A є додатним тоді і тільки тоді, коли $\langle Ax, x\rangle \geqslant 0$ для всіх $x \in S_H$. Ця сама умова еквівалентна тому, що $\alpha_-(A) \geqslant 0$. □

Наслідок 2. *Нехай A — самоспряжений оператор. Тоді*

$$\|A\| = \sup\{\,|t| :\ t \in \sigma(A)\}.$$

Доведення.

$$\|A\| = \sup\{\langle Ax, x\rangle : x \in S_H\} = \max\{\,|\alpha_-(A)|, |\alpha_+(A)|\} =$$

$$= \sup\{\,|t| :\ t \in \sigma(A)\}.$$ □

Наслідок 3. *Нехай A — самоспряжений оператор, $\sigma(A) = \{0\}$. Тоді $A = 0$.*

Доведення. За наслідком 2, якщо $\sigma(A) = \{0\}$, то $\|A\| = 0$. □

Зазначимо, що для несамоспряжених операторів вищенаведені наслідки можуть і не виконуватись.

Приклад 1. Оператор в двовимірному просторі задано матрицею $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Його спектр дорівнює $\{0\}$, проте оператор ненульовий.

Вправи

1. Нехай $A \in L(H)$, $\sigma(A) = \{-2, 1\}$. Чи може норма такого оператора дорівнювати 3? Чи зміниться відповідь, якщо A — самоспряжений оператор?

2. Нехай A — самоспряжений оператор, $\sigma(A) = \{\lambda_0\}$. Тоді $A = \lambda_0 I$.

3. Нехай K — довільна замкнена обмежена множина дійсних чисел. Побудуйте самоспряжений оператор A, для якого $\sigma(A) = K$.

12.4.6. Компактні самоспряжені оператори

У цьому підрозділі буде доведено, що кожний компактний самоспряжений оператор відповідним вибором ортонормованого базису може бути зведений до діагонального вигляду. Іншими словами, для компактного самоспряженого оператора існує ортономований базис, що складається з власних векторів. Нагадаємо, що підпростір $X \subset H$ називається інваріантним підпростором оператора A, якщо $A(X) \subset X$.

Теорема 1. *Якщо X — інваріантний підпростір самоспряженого оператора A, то ортогональне доповнення $X^\perp$ цього підпростору також буде інваріантним підпростором.*

Доведення. Потрібно довести, що для будь-якого елемента $y \in X^\perp$ його образ Ay також лежить в $X^\perp$. Для цього треба перевірити, що $\langle x, Ay\rangle = 0$ для будь-якого $x \in X$. Але $\langle x, Ay\rangle = \langle Ax, y\rangle$, а $\langle Ax, y\rangle = 0$, оскільки $Ax \in X$ (інваріантність підпростору X), а $y \in X^\perp$. □

Наступний факт добре відомий читачеві з курсу лінійної алгебри.

Теорема 2. *Нехай $X_1 = \mathrm{Ker}\,(A - \lambda_1 I)$, $X_2 = \mathrm{Ker}\,(A - \lambda_2 I)$ — власні підпростори самоспряженого оператора A, відповідні двом різним власним числам $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Тоді $X_1 \perp X_2$.*

Доведення. Для будь-яких $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$ маємо

$$\lambda_1 \langle x_1, x_2\rangle = \langle Ax_1, x_2\rangle = \langle x_1, Ax_2\rangle = \lambda_2 \langle x_1, x_2\rangle,$$

що можливо тільки при $\langle x_1, x_2\rangle = 0$. □

Лема. *Нехай компактний самоспряжений оператор A в гільбертовому просторі Y не має власних векторів. Тоді простір Y складається тільки з нульового елемента.*

Доведення. Припустимо, що простір Y не є нульвимірним. На підставі теореми про структуру спектра компактного оператора (п. 11.3.4), спектр оператора A складається тільки з нуля (інакше у A були б власні вектори). За наслідком 3 п. 12.4.5, $A = 0$. Тобто весь простір Y складається з власних векторів з власним числом 0. □

Теорема 3. *Нехай H — сепарабельний гільбертів простір. Тоді для будь-якого компактного самоспряженого оператора $A \in L(H)$ існує ортономований базис, який складається з власних векторів оператора.*

Доведення. Виберемо в кожному з власних підпросторів оператора A по ортонормованому базису і випишемо всі ці базиси в єдину послідовність $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Всі e_n — це власні вектори оператора A, причому з огляду на теорему 2 вони утворюють ортонормовану систему. Нам залишилось довести повноту цієї системи. Позначимо $\overline{\mathrm{Lin}}\,\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ через X. Підпростір X інваріантний для оператора A і містить всі його власні вектори. Отже, підпростір $X^{\perp}$ також буде інваріантним, причому не буде містити жодного власного вектора оператора A. За попередньою лемою, це означає, що підпростір $X^{\perp}$ складається тільки з нуля, тобто $X = H$. □

Зауваження. У наведеній вище теоремі істотні як компактність, так і самоспряженість оператора. Справді, для несамоспряженого оператора система власних векторів може не бути повною навіть в двовимірному випадку (приклад 1 п. 12.4.5). Наведемо приклад самоспряженого оператора, який не має власних чисел.

Розглянемо оператор $A \in L\,(L_2\,[0,1])$, який діє за правилом $(Af)\,(t) = tf\,(t)$. Нехай f — власний вектор[4] оператора A для власного числа λ, тобто $\lambda f\,(t) = tf\,(t)$ майже скрізь. Але така рівність може виконуватись тільки коли $f \overset{\text{м.с.}}{=} 0$. Отже, власних чисел і векторів у оператора немає.

Вправи

Зафіксуємо функцію $g \in L_1\,[0,1]$ і означимо на $L_2\,[0,1]$ оператор A_g, який діє за правилом $(A_g f)\,(t) = g\,(t)\,f\,(t)$.

1. Доведіть, що якщо образ оператора A_g знову лежить в $L_2\,[0,1]$, то $A_g \in L\,(L_2\,[0,1])$. (Порада: найбільш економний спосіб доведення неперервності в подібних випадках — це використання теореми про замкнений графік).

2. В умовах попередньої вправи обчислити норму оператора A_g. Використовуючи цей результат, дати опис тих g, для яких $A_g \in L\,(L_2\,[0,1])$.

3. Обчислити A_g^*. За якої умови оператор A_g буде самоспряженим? Додатним?

4. Обчислити спектр оператора A_g. Охарактеризувати ті g, для яких оператор A_g матиме власні числа і вектори.

5. Нехай g не є тотожною сталою. Чи може оператор A_g мати повну систему власних векторів? Те саме питання для неперервної функції g.

6. Нехай в умовах вправи 8 п. 12.4.3 ядро K неперервне за сукупністю змінних. Тоді власні функції відповідного гільберт-шмідтового інтегрального оператора, який відповідає ненульовим власним числам, неперервні.

Коментарі до вправ

12.1.3

Вправа 6. P. Jordan, J. von Neumann, 1935. Посилання на відповідну працю й огляд різних характеризацій норм, породжених скалярним добутком, див. [Day, розд. 7, § 3].

12.3.4

Вправа 6. Нехай H — нескінченновимірний гільбертів простір. Позначимо через $\alpha(H)$ найменшу можливу потужність щільної підмножини в H. Зафіксуємо G — щільну в H підмножину з $\mathrm{card}(G) = \alpha(H)$. Доведемо, що у будь-якого ортонормованого базису E в H потужність збігається з $\alpha(H)$. З центром в кожній точці $e \in E$ побудуємо відкриту кулю U_e радіуса $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Оскільки відстань між будь-якими двома різними точками множини E дорівнює $\sqrt{2}$, побудовані кулі попарно не перетинаються. Водночас зі щільною множиною G будь-яка з куль U_e повинна перетинатись. Візьмемо для

[4] Оскільки елементи простору тут функції, замість терміна «власний вектор» частіше вживають термін «власна функція».

кожного $e \in E$ по точці $f(e) \in U_e \cap G$. Тоді $f\colon E \to G$ — ін'єктивне відображення, отже, $\mathrm{card}(E) \leqslant \mathrm{card}(G) = \alpha(H)$.

Навпаки, розглянемо $\mathrm{Lin}_{\mathbb{Q}}E$ — множину скінченних лінійних комбінацій елементів базису E з раціональними коефіцієнтами. Оскільки $\mathrm{Lin}_{\mathbb{Q}}E$ — щільна в H множина, $\mathrm{card}(\mathrm{Lin}_{\mathbb{Q}}E) \geqslant \alpha(H)$. Водночас $\mathrm{card}(\mathrm{Lin}_{\mathbb{Q}}E) = \mathrm{card}(E)$.

12.4.2

Вправа 2. Підказку сховано у вправі 5 п. 12.2.3.

Вправа 3. Якщо оператор A діє з X в Y, то оператор $(A^*)^*$ діє з $(X^*)^*$ в $(Y^*)^*$, тобто, взагалі кажучи, $A \neq (A^*)^*$. Тим не менше, деяка аналогія з рівністю $(A^*)^* = A$ все ще зберігається. Щоб зрозуміти, в чому полягає ця аналогія, потрібно проаналізувати зв'язок між простором і його другим спряженням — розділ 17.2.2.

12.4.3

Вправа 4. У комплексних гільбертових просторах, які ми розглядаємо, таке неможливе. Більше того, для будь-якого оператора буде виконуватись нерівність $\|A\| \geqslant \frac{1}{2}\sup_{x\in S_H} |\langle Ax, x\rangle|$. Проте в дійсних гільбертових просторах такі приклади існують: достатньо розглянути оператор повороту на 90 градусів в $\mathbb{R}^2$. Подібні ефекти поклали початок цікавому напрямку теорії операторів і банахових алгебр — теорії числового радіуса (див. монографії [B-D1] і [B-D2], а також огляд [KMP]).

Вправа 11. Див. лему п. 13.1.2.

12.4.4 *Вправа 5.* За умовою,

$$\langle Ax, x\rangle + \langle Bx, x\rangle = \langle (A+B)x, x\rangle = 0$$

для всіх $x \in H$ і величини $\langle Ax, x\rangle$ і $\langle Bx, x\rangle$ невід'ємні. Отже, $\langle Ax, x\rangle = \langle Bx, x\rangle = 0$ для всіх $x \in H$, і для завершення доведення залишається скористатись формулою для норми самоспряженого оператора (теорема 2 п. 12.4.3).