Розділ 11. Елементи спектральної теорії операторів. Компактні оператори

11.1. Алгебра операторів

Нехай X, Y — банахові простори. Простір $L(X,Y)$ неперервних операторів також утворює банахів простір в операторній нормі; в цьому просторі природним способом визначені операції додавання операторів і множення оператора на число. Читачеві добре відома ще одна дія — композиція (множення) операторів. Зазначимо, що композиція, взагалі кажучи, не визначена для пар елементів простору $L(X,Y)$. Ми не можемо задати композицію $A \circ B$, якщо оператор A не визначений на образі оператора B. Ситуація кардинально зміниться у випадку $X = Y$. Множення виявляється коректно визначеним, і простір $L(X,X)$ (надалі для простоти позначатимемо його $L(X)$) буде алгеброю щодо операцій додавання і множення операторів. Тобто з операторами, які діють в одному просторі, в якомусь сенсі можна працювати як з числами: додавати, множити, здійснювати граничні переходи. Ця аналогія з числами виявляється досить плідною. Вона дозволяє у багатьох випадках знайти прості методи міркування для одержання важливих і потрібних результатів. Щоб зрозуміти, як користуватись цією аналогією, зручно на якийсь час забути, що ми маємо справу з операторами, і ознайомитись із загальними властивостями банахових алгебр.

11.1.1. Банахові алгебри: аксіоматика і приклади

Комплексний банахів простір $\mathbf{A}$ з визначеною на ньому додатковою операцією множення елементів називається *банаховою алгеброю*, якщо множення задовольняє такі аксіоми:

– $a(bc) = (ab)c$ для будь-яких $a, b, c \in \mathbf{A}$ (асоціативність);

– $a(\lambda b) = (\lambda a)b = \lambda(ab)$ для будь-яких $a, b \in \mathbf{A}$ і будь-якого скаляра λ;

– $a(b + c) = ab + ac$ і $(a + b)c = ac + bc$ (розподільний закон);

Наведений учбовий текст є витягом з підручнику
Кадець В.М. Курс функціонального аналізу та теорії міри. – Львів: Видавець І.Е. Чижиков, 2012. – 590 с. – (Серія "Університетська бібліотека") ISBN 978-966-2645-03-3
Усі посилання на теореми, вправи, означення, такі що не увійшли до цього тексту – це посилання на підручник.

– $\|ab\| \leqslant \|a\| \cdot \|b\|$ для будь-яких $a, b \in \mathbf{A}$ (мультиплікативна нерівність трикутника);

– існує такий елемент $e \in \mathbf{A}$ (цей елемент називається одиничним елементом алгебри $\mathbf{A}$), що множення на e не змінює елемента: $ea = ae = a$ для будь-якого $a \in \mathbf{A}$;

– $\|e\| = 1$.

Природно визначається поняття *підалгебри* (замкнений лінійний підпростір $X \subset \mathbf{A}$, стійкий щодо операції множення, і який містить елемент e) й ізоморфізму банахових алгебр (до означення ізоморфізму банахових просторів додається умова $T(ab) = T(a)T(b)$).

Один приклад банахової алгебри ми вже згадували. Це — алгебра $L(X)$ неперервних лінійних операторів у банаховому просторі X. Роль множення тут відіграє композиція операторів, а одиничним елементом є одиничний оператор. Наведемо ще кілька прикладів. Перевірку аксіом банахової алгебри в цих прикладах залишаємо читачеві як вправу.

Приклади

1. Простір $C(K)$ наділений звичайним множенням функцій. Одиничним елементом тут є функція, яка тотожно дорівнює одиниці.

2. Простір $L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ зі звичайним множенням.

3. Простір l_∞ з покоординатним множенням.

4. Простір l_1, де як множення розглядається згортка послідовностей. Нагадаємо, що для $x, y \in l_1$, $x = (x_0, x_1, ...)$, $y = (y_0, y_1, ...)$ згорткою $x * y$ називається вектор $((x*y)_0, (x*y)_1, ..., (x*y)_n, ...)$, координати якого обчислюються за правилом $(x*y)_n = \sum_{k=0}^{n} x_k y_{n-k}$. Одиничним елементом є вектор $e = (1, 0, 0, ...)$.

5. Простір W, що складається з тих функцій $g \in C(\mathbb{T})$, коефіцієнти Фур'є яких задовольняють умову $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}_n| < \infty$. На цьому просторі розглядається звичайне множення, а норма задається формулою $\|f\| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|\hat{f}_n\right|$.

У прикладах 1–5 множення комутативне: $ab = ba$ для довільних елементів $a, b \in \mathbf{A}$. Проте в аксіоми алгебри комутативність множення не включена. Більше того, комутативності немає у найважливішому для нас прикладі — алгебрі операторів $L(X)$.

Так само, як і для чисел, для елементів банахової алгебри правильна теорема про границю добутку.

Теорема. *Множення в банаховій алгебрі неперервне як функція двох змінних. Іншими словами, якщо $a_n \to a$, $b_n \to b$ $(n \to \infty)$, то $a_n b_n \to ab$ $(n \to \infty)$.*

Доведення.

$$\|a_n b_n - ab\| \leqslant \|a_n b_n - a_n b\| + \|a_n b - ab\| \leqslant$$

$$\leqslant \|a_n\| \cdot \|b_n - b\| + \|a_n - a\| \cdot \|b\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \qquad \square$$

Вправи

1. У кожній банаховій алгебрі є тільки один одиничний елемент.

2. Простори $L_2[0,1]$ і $L_1[0,1]$ не утворюють банахових алгебр щодо операції множення функцій.

3. Простори l_2 і l_1 не утворюють банахових алгебр щодо операції покоординатного множення векторів.

4. Простір W, описаний у прикладі 5, як банахів простір ізоморфний простору l_1. Як потрібно задати операцію множення на l_1, щоб l_1, наділений цією операцією, був ізоморфний W і як банахова алгебра?

5. Для кожного $a \in \mathbf{A}$ означимо оператор $T_a\colon \mathbf{A} \to \mathbf{A}$ формулою $T_a(b) = ab$. Перевірити, що T_a — неперервний лінійний оператор і $\|T_a\| = \|a\|$.
6. Кожна банахова алгебра $\mathbf{A}$ ізоморфна деякій підалгебрі алгебри $L(\mathbf{A})$. Тобто алгебра операторів — це в деякому сенсі універсальний приклад банахової алгебри.
7. Наведіть приклад двох операторів в $\mathbb{R}^2$, що не комутують.

11.1.2. Оборотність в банахових алгебрах

Елемент a банахової алгебри $\mathbf{A}$ називається *оборотним*, якщо існує такий елемент $a^{-1} \in \mathbf{A}$, який називається *оберненим елементом*, що $a^{-1}a = aa^{-1} = e$.

Якщо обернений елемент існує, то він єдиний. Справді, якщо крім a^{-1} деякий елемент $b \in \mathbf{A}$ також буде оберненим до a, то

$$b = be = baa^{-1} = ea^{-1} = a^{-1}.$$

Зазначимо, що якщо елементи $a, b \in \mathbf{A}$ оборотні, то їх добуток оборотний, і $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

Лема 1. *Якщо для елементів $a, b \in \mathbf{A}$ обидва їхні добутки ab і ba оборотні, то й самі елементи a і b оборотні. Зокрема, якщо елементи $a, b \in \mathbf{A}$ комутують і їхній добуток ab оборотний, то a і b оборотні.*

Доведення. З огляду на симетрію умови достатньо перевірити оборотність елемента a. Покажемо, що елемент $g = b(ab)^{-1}$ є оборотним до a. По-перше, $ag = ab(ab)^{-1} = e$. З іншого боку,

$$ga = b(ab)^{-1}a = b(ab)^{-1}aba(ba)^{-1} = ba(ba)^{-1} = e. \qquad \square$$

Лема 2 (про мале збурення одиничного елемента). *Нехай елемент a банахової алгебри $\mathbf{A}$ задовольняє умову $\|a\| < 1$. Тоді елемент $e - a$ оборотний, причому виконується така формула обернення:*

$$(e - a)^{-1} = e + a + a^2 + \dots + a^n + \dots.$$

Доведення. Доведемо формулу обернення. Оскільки $\|a^n\| \leqslant \|a\|^n$, то ряд $e + a + a^2 + \dots + a^n + \dots$ мажорується збіжною геометричною прогресією і, отже, збіжний до деякого елемента $b \in \mathbf{A}$. Нам залишилось перевірити, що $b(e-a) = (e-a)b = e$. Обидві потрібні рівності отримуються простим розкриттям дужок:

$$(e + a + a^2 + \dots)(e - a) = (e + a + a^2 + \dots) - (a + a^2 + \dots) = e;$$

$$(e - a)(e + a + a^2 + \dots) = (e + a + a^2 + \dots) - (a + a^2 + \dots) = e. \qquad \square$$

Формула обернення — це природний аналог формули суми геометричної прогресії. Водночас при використанні подібних аналогій потрібно бути обережним: на відміну від чисел елементи алгебри можуть не комутувати. Можливі й інші ускладнення, пов'язані з необоротністю, неможливістю виразити норму добутку через норми співмножників і т. д.

Теорема 1 (про мале збурення оборотного елемента). *Нехай $a, b \in \mathbf{A}$, a оборотний і $\|b\| < \frac{1}{\|a^{-1}\|}$. Тоді елемент $a - b$ також оборотний. Іншими словами, якщо a оборотний, то ціла куля радіуса $r = \frac{1}{\|a^{-1}\|}$ з центром в a складається з оборотних елементів.*

Доведення. Запишемо елемент $a - b$ у вигляді добутку: $a - b = a(e - a^{-1}b)$. Перший співмножник оборотний за умовою, а другий задовольняє вимоги леми 2:

$$\left\|a^{-1}b\right\| \leqslant \left\|a^{-1}\right\| \cdot \|b\| < 1.$$

Тому другий співмножник також оборотний, що дає нам потрібну оборотність елемента $a - b$. □

Наслідок. *Множина усіх оборотних елементів банахової алгебри* $\mathbf{A}$ *відкрита в* $\mathbf{A}$, *а необоротних, відповідно, замкнена.*

Теорема 2. *Нехай* $a \in \mathbf{A}$ — *оборотний елемент і* $a_n \to a$ $(n \to \infty)$. *Тоді* $a_n^{-1} \to a^{-1}$ $(n \to \infty)$. *Іншими словами, операція переходу до оберненого елемента неперервна в своїй області визначення.*

Доведення. Множенням на a^{-1} задача зводиться до випадку $a = e$. Отож нехай $a_n \to e$ $(n \to \infty)$. Введемо позначення $e - a_n = b_n$. Зафіксуємо номер N, починаючи з якого $\|b_n\| < \frac{1}{2}$. Для $n > N$ маємо:

$$\left\|a_n^{-1} - e\right\| = \left\|(e - b_n)^{-1} - e\right\| = \left\|(e + b_n + b_n^2 + ...) - e\right\| = \left\|b_n + b_n^2 + ...\right\| \leqslant$$

$$\leqslant \|b_n\| \cdot \left\|e + b_n + b_n^2 + ...\right\| \leqslant \|b_n\| \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ...\right) = 2\|b_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \qquad \square$$

Вправи

1. Якщо тільки ряд $e + a + a^2 + ... + a^n + ...$ збігається, має місце формула обернення: $(e - a)^{-1} = e + a + a^2 + ... + a^n + ...$

2. На прикладі оператора в $\mathbb{R}^2$ з матрицею вигляду $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ M & 0 \end{pmatrix}$ покажіть, що у двовимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^2$ існують оператори T з як завгодно великими нормами, для яких, тим не менше, ряд $I + T + T^2 + ...$ збігається. Цим буде показано, що на відміну від скалярного випадку формулу обернення можна застосувати і для деяких елементів з великими нормами.

3. В $L(l_2)$ множина всіх необоротних операторів має непорожню внутрішність.

4. В $L(l_2)$ множина всіх необоротних операторів незамкнена в сенсі поточкової збіжності.

5. Якщо простір X скінченновимірний, то множина всіх необоротних операторів має порожню внутрішність в $L(X)$.

6. $A(\mathbb{T})$ — підалгебра алгебри $C(\mathbb{T})$ (означення див. п. 10.4.3).

7. Наведіть приклад функції $f \in A(\mathbb{T})$, для якої $\frac{1}{f} \in C(\mathbb{T}) \setminus A(\mathbb{T})$.

Цим буде показано, що елемент може бути необоротним в підалгебрі, але при цьому в ширшій алгебрі вже бути оборотним.

8. Наведіть приклад функції $f \in C[0,1]$, яка не оборотна не тільки в $C[0,1]$, але й у жодній ширшій алгебрі.

9. Нехай $a \in \mathbf{A}$ і оператор T_a з вправи 5 п. 11.1.1 необмежений знизу. Тоді елемент a необоротний не тільки в $\mathbf{A}$, але й в будь-якій ширшій банаховій алгебрі.

10. Спираючись на попередню вправу і вправу 11 п. 10.2.3, покажіть, що якщо елемент $f \in C[0,1]$ необоротний в $C[0,1]$, то він необоротний і в будь-якій ширшій банаховій алгебрі.

11. Спираючись на теорему про мале збурення оборотного елемента, доведіть, що якщо a_n — оборотні елементи, $a_n \to a$ $n \to \infty)$ і $\sup_n \left\|a_n^{-1}\right\| < \infty$, то a також оборотний.

Елемент $a \in \mathbf{A}$ називається *оборотним справа*, якщо існує елемент $b \in \mathbf{A}$ (який називається *правим оберненим*), для якого $ab = e$. Аналогічно, $a \in \mathbf{A}$

називається *оборотним зліва*, якщо існує елемент $d \in \mathbf{A}$ (який називається *лівим оберненим*), для якого $da = e$.

12. Якщо елемент $a \in \mathbf{A}$ оборотний і зліва, і справа, то він оборотний, і його правий обернений і лівий обернений збігаються з a^{-1}.

13. На прикладі оператора $S_r \in L(l_2)$ зсуву вправо $S_r(x_1, x_2, ...) = (0, x_1,\ x_2, ...)$ покажіть, що оператор може бути оборотним зліва, але необоротним справа і що лівий обернений не обов'язково єдиний.

14. На прикладі оператора $S_l \in L(l_2)$ зсуву вліво $S_l(x_1, x_2, ...) = (x_2, x_3, ...)$ покажіть, що оператор може бути оборотним справа, але необоротним зліва, і що правий обернений не обов'язково єдиний.

11.1.3. Спектр

Означення. Комплексне число λ називається *точкою спектра* елемента $a \in \mathbf{A}$, якщо елемент $a - \lambda e$ необоротний. Множина таких чисел називається *спектром* елемента a і позначається $\sigma(a)$. Комплексне число, яке не належить до спектра елемента a, називається *регулярною точкою* елемента a.

Теорема 1. *Спектр будь-якого елемента $a \in \mathbf{A}$ має такі властивості:*

- *$\sigma(a)$ замкнений в $\mathbf{A}$;*
- *спектр елемента a обмежений і лежить в замкненому крузі з центром в 0 і радіусом $\|a\|$.*

Доведення. Замкненість. Нехай $\lambda_n \in \sigma(a)$, $\lambda_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda$. Тоді елементи $a - \lambda_n e$ необоротні, і їхня границя $a - \lambda e$ також необоротна з огляду на замкненість множини необоротних елементів банахової алгебри (наслідок з теореми 1 п. 11.1.2). Тобто $\lambda \in \sigma(a)$, і замкненість спектра доведено.

Обмеженість. Нехай $|\lambda| > \|a\|$. Тоді $a - \lambda e = -\lambda(e - \frac{1}{\lambda}a)$, а елемент $e - \frac{1}{\lambda}a$ оборотний за лемою про мале збурення одиничного елемента. Отже, всі комплексні числа, більші за модулем за норму елемента a, — це регулярні точки, відповідно, всі точки спектра не перевищують $\|a\|$ за модулем. $\square$

Вправи

1. Доведіть, що спектр будь-якого елемента $f \in C[0, 1]$ збігається з множиною значень функції f.

2. Дайте опис спектра елемента алгебри $L_\infty[0, 1]$.

Спектральним радіусом елемента a називається величина

$$r(a) = \varlimsup_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n}.$$

Доведіть, що:

3. $\sigma(a) \subset r(a)D \subset \|a\|\, D$, де D — замкнений одиничний круг у комплексній площині (для цього уточніть лему про мале збурення одиничного елемента).

4. У формулі для спектрального радіуса верхню границю можна замінити просто границею.

5. $r(a)$ — це мінімальний радіус круга, в якому лежить спектр елемента a.

6. $\sigma\,(a + te) = \sigma\,(a) + t$; $\sigma\,(tA) = t\sigma\,(A)$.

11.1.4. Резольвента і непорожність спектра

Резольвентою елемента $a \in \mathbf{A}$ називається функція $R_a\colon \mathbb{C}\backslash\sigma(a) \to \mathbf{A}$, яка визначається формулою $R_a(\lambda) = (a - \lambda e)^{-1}$.

Властивості резольвенти: 1. Основна тотожність для резольвенти:

$$R_a(\lambda) - R_a(\mu) = (\lambda - \mu)R_a(\lambda)R_a(\mu).$$

Доведення.

$$(\lambda - \mu)(a - \lambda e)^{-1}(a - \mu e)^{-1} =$$

$$= (a - \lambda e)^{-1}\left((a - \mu e) - (a - \lambda e)\right)(a - \mu e)^{-1} = (a - \lambda e)^{-1} - (a - \mu e)^{-1}. \qquad \square$$

2. Комутативність: $R_a(\lambda)R_a(\mu) = R_a(\mu)R_a(\lambda)$ — очевидним чином випливає з попередньої властивості.

3. Неперервність у кожній точці λ області визначення. Випливає з неперервності операцій додавання, множення і переходу до оберненого елемента (з приводу останнього — див. теорему 2 п. 11.1.2).

4. Резольвента прямує до нуля на нескінченності.

Доведення. Прямування $\lambda \to \infty$ коректне, бо спектр — обмежена множина; у доведенні ми будемо вважати $|\lambda| > 2||a||$. Перепишемо вираз для резольвенти:

$$R_a(\lambda) = -\lambda^{-1}\left(e - \frac{a}{\lambda}\right)^{-1}.$$

Оскільки $|\lambda| > 2||a||$, то $\|\lambda^{-1}a\| < \frac{1}{2}$, і ми можемо застосувати до $e - \lambda^{-1}a$ формулу обернення:

$$R_a(\lambda) = -\lambda^{-1}(e + \lambda^{-1}a + \lambda^{-2}a^2 + \ldots).$$

Переходячи до норм і використовуючи нерівність трикутника, одержимо:

$$|| R_a(\lambda) || < \frac{1}{|\lambda|}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots\right) = \frac{2}{|\lambda|}.$$

Останній вираз, вочевидь, прямує до 0 при $\lambda \to \infty$. $\square$

Означення. Нехай D — відкрита множина на комплексній площині, E — банахів простір. Функція $F\colon D \to E$ називається *диференційовною в точці* $\lambda_0 \in D$, якщо існує

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{F(\lambda) - F(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0}.$$

Ця границя, як і в скалярному випадку, називається похідною функції F в точці λ_0 і позначається $F'(\lambda_0)$. Функція називається *аналітичною* в області D, якщо вона диференційовна в кожній точці області.

Твердження. *Резольвента аналітична в своїй області визначення.*
Доведення. Скористаємось основною тотожністю для резольвенти і обчислимо потрібну границю:

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{R_a(\lambda) - R(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} = \lim_{\lambda \to \lambda_0} R_a(\lambda)R_a(\lambda_0) = (R_a(\lambda_0))^2. \qquad \square$$

Теорема Ліувілля для цілих функцій зі значеннями в банаховому просторі. *Якщо функція $F\colon \mathbb{C} \to E$ аналітична і обмежена, то вона стала.*

Доведення. Нехай $F(z_1) \neq F(z_2)$ для деяких точок $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. За теоремою Гана–Банаха, існує такий функціонал $f \in E^*$, що $f(F(z_1)) \neq f(F(z_2))$. Розглянемо допоміжну функцію $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $g(z) = f(F(z))$. На підставі неперервності функціонал f можна переставляти зі знаком границі, тому функція g аналітична. Крім того,

$$\sup_{z\in\mathbb{C}} |g(z)| \leqslant \|f\| \cdot \sup_{z\in\mathbb{C}} \|F(z)\| < \infty,$$

тому, згідно з теоремою Ліувілля для скалярних функцій, g — стала, тобто $g(z_1) = g(z_2)$. Одержана суперечність доводить теорему. □

Тепер ми готові довести теорему, для якої нам потрібне поняття резольвенти.

Теорема про непорожність спектра. *Спектр будь-якого елемента банахової алгебри непорожній.*

Доведення. Будемо міркувати методом від супротивного. Нехай спектр елемента $a \in \mathbf{A}$ порожній. Тоді областю визначення резольвенти R_a є вся комплексна площина. Оскільки резольвента неперервна і прямує до 0 на ∞, то вона обмежена у всій площині. А оскільки вона аналітична в $\mathbb{C}$, то ми потрапляємо в умови теореми Ліувілля. Тому $R_a = \text{const}$. Але $\lim\limits_{\lambda\to\infty} R_a(\lambda) = 0$, тому $R_a(\lambda) \equiv 0$, що суперечить означенню резольвенти: її значеннями можуть бути тільки оборотні елементи алгебри. □

Зауваження. Застосування теореми Ліувілля є не випадковим. Аналогічна теорема про непорожність спектра квадратної матриці спиралась на існування кореня рівняння $\det(\mathrm{A} - \lambda I) = 0$, яке випливає з основної теореми алгебри; а цю теорему найпростіше доводити з використанням теореми Ліувілля.

Вправи

1. Обчислити спектр і резольвенту одиничного елемента.
2. Нехай елемент $a \in \mathbf{A}$ задовольняє рівняння $a^2 = a$ (такі елементи називаються *ідемпотентами*). Використовуючи формулу обернення, обчислити резольвенту цього елемента. Яким може бути спектр ідемпотента?
3. Нехай елемент $a \in \mathbf{A}$ задовольняє рівняння $a^n = 0$ (такі елементи називаються *нільпотентними*). Використовуючи формулу обернення, обчислити резольвенту цього елемента.
4. Нехай $\lambda \in \sigma(a)$, λ_n — регулярні точки елемента a і $\lambda_n \to \lambda$ $(n \to \infty)$. Тоді $\|R_a(\lambda_n)\| \to \infty$ $(n \to \infty)$.
5. Нехай $\sigma(a) = \{0\}$ для всіх $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ виконується нерівність $\|R_a(\lambda)\| \leqslant \frac{C}{|\lambda|}$, де $C > 0$ — деяка стала. Довести, що $a = 0$.
6. Нехай банахова алгебра $\mathbf{A}$ має таку властивість: всі її ненульові елементи оборотні. Спираючись на теорему про непорожність спектра, доведіть, що в цьому випадку кожен елемент $a \in \mathbf{A}$ має вигляд $a = \lambda e$ з деяким $\lambda \in \mathbb{C}$. Іншими словами, з точністю до ізоморфізму, єдина банахова алгебра, яка є полем — це поле комплексних чисел.

11.1.5. Спектр оператора та його власні числа

Надалі, до переходу до теми «Оператори в гільбертовому просторі», букву X ми використовуватимемо тільки для позначення комплексного банахового простору. У цьому параграфі ми розглядатимемо лінійні неперервні оператори в просторі X, тобто елементи алгебри $L(X)$. *Спектр оператора* — це частковий випадок спектра елемента алгебри: число λ належить до спектру оператора $T \in L(X)$, якщо оператор $T - \lambda I$ необоротний.

Число λ називається *власним числом* оператора $T \in L(X)$, якщо існує такий ненульовий елемент $x \in X$, який називається *власним вектором, що відповідає числу* λ, що $Tx = \lambda x$. У цьому випадку $(T - \lambda I)x = 0$, тобто оператор $T - \lambda I$ неін'єктивний і, отже, необоротний. Тому кожне власне число оператора — це точка спектра. Проте, крім неін'єктивності, причиною необоротності оператора $T - \lambda I$ може бути несюр'єктивність. Тому спектр оператора, взагалі кажучи, не вичерпується його власними числами. Більше того, навіть у досить простих операторів може не бути жодного власного числа, не зважаючи на те, що спектр завжди непорожній.

Приклад 1. Розглянемо оператор $T \in L\left(C\left[0,1\right]\right)$, який діє за правилом $(Tf)(x) = \int_0^x f(t)dt$. Припустимо, що існує власне число λ із власним вектором f. Тоді $\int_0^x f(t)dt = \lambda f(x)$, і, отже, $f(x) = \lambda f'(x)$, $f(0) = 0$. У такої задачі Коші є єдиний розв'язок $f \equiv 0$, тобто в оператора T немає власних чисел.

Зрозуміло, подібні приклади можливі тільки в нескінченновимірному просторі. Як відомо з курсу лінійної алгебри, кожен оператор в $\mathbb{C}^n$ задається квадратною матрицею A, і пошук власних чисел зводиться до розв'язування алгебраїчного рівняння $\det(A - \lambda I) = 0$, яке, у свою чергу, завжди розв'язне.

Нехай λ — власне число оператора $T \in L(X)$. *Власним підпростором*, відповідним власному числу λ, називається множина $\operatorname{Ker}(T - \lambda I)$. Іншими словами, власний підпростір, відповідний власному числу λ, складається з власних векторів, що відповідають власному числу λ, і нуля.

Означення. Підпростір $Y \subset X$ називається *інваріантним підпростором* оператора $T \in L(X)$, якщо $A(Y) \subset Y$.

Власний підпростір — це очевидний приклад інваріантного підпростору. Навпаки, знання інваріантних підпросторів може допомогти при пошуку власних векторів і власних чисел. Наприклад, якщо в оператора $T \in L(X)$ є скінченновимірний інваріантний підпростір Y, то обмеження оператора T на цей підпростір — це вже оператор у скінченновимірному просторі, і в цьому підпросторі в оператора є власні вектори.

Теорема. *Нехай оператори A і T комутують. Тоді будь-який власний підпростір одного з цих операторів буде інваріантним підпростором для іншого з них.*

Доведення. Нехай λ — власне число, а $Y = \operatorname{Ker}(A - \lambda I)$ — відповідний власний підпростір оператора A. Візьмемо довільний власний вектор $x \in Y$ і доведемо, що $Tx \in Y$, тобто Tx також є власним вектором із власним числом λ. Справді,

$$A\left(Tx\right) = T\left(Ax\right) = T\left(\lambda x\right) = \lambda\left(Tx\right). \qquad \square$$

Вправи

1. Перевірте, що $0 \in \sigma(T)$ для оператора T з прикладу 1. Обчисліть резольвенту цього оператора.

2. У скінченновимірному просторі X ін'єктивність і сюр'єктивність лінійного оператора рівносильні.

3. У скінченновимірному просторі спектр оператора і множина його власних чисел збігаються.

4. У скінченновимірному просторі оборотність оператора зліва рівносильна його оборотності справа (не плутати з операторами, які діють з одного простору в інший!).

5. Твердження вправ 2 і 4 не виконуються в просторі l_2 для оператора U зсуву вліво: $U\left(x_1, x_2, ...\right) = \left(x_2, x_3, ...\right)$.

Введемо ще одне поняття. Точка λ називається *апроксимативним власним числом* оператора T, якщо існує така послідовність елементів $x_n \in S\left(X\right)$, що $Tx_n - \lambda x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Елементи x_n при великих номерах будуть «майже» власними векторами оператора T, хоча справжній власний вектор, який відповідає числу λ, може не існувати.

6. Число λ є точкою спектра оператора T тоді і тільки тоді, коли справджується одна з таких можливостей:

- точка λ є власним числом оператора T, тобто оператор $T - \lambda I$ неін'єктивний;
- точка λ — апроксимативне власне число оператора T, тобто оператор $T - \lambda I$ необмежений знизу;
- точка λ — власне число оператора T^*, тобто оператор $(T - \lambda I)^*$ неін'єктивний.

7. Обчисліть спектр і резольвенту одиничного оператора.

8. Нехай T — деякий проектор в просторі X. Опишіть спектр і резольвенту оператора T.

9. Обчисліть спектри операторів:

- оператори зсуву $U(a_1, a_2, ...) = (0, a_1, a_2, ..)$ і $V(a_1, a_2, ...) = (a_2, a_3, ..)$ в просторах послідовностей для просторів $X = l_2$ і $X = l_\infty$.
- оператори зсуву $(T_\tau f)(t) = f(t + \tau)$ у просторах функцій для таких просторів: X — простір неперервних обмежених на осі функцій з sup-нормою; $X = L_2(\mathbb{R})$.

10. Доведіть, що означений вище оператор зсуву U є внутрішньою точкою множини необоротних операторів. Це дозволить розв'язати вправу 3 п. 11.1.2. Загальніший факт: будь-який обмежений знизу необоротний оператор $T \in L(X, Y)$ оточений околом, що складається з необоротних операторів.

11. Доведіть, що точки межі спектра оператора є або власними числами, або апроксимативними власними числами.

12. Доведіть, що і в $L(X, Y)$ (хоча це не алгебра) множина оборотних операторів відкрита.

11.1.6. Матриця оператора

У курсі лінійної алгебри оператори часто визначаються своїми матрицями. Поняття матриці оператора має сенс і для операторів у нескінченновимірному просторі (зрозуміло, із заміною скінчених матриць на нескінченні). Нехай X, Y — банахові простори, оператор $A \in L(X, Y)$, $\{e_n\}$ і $\{g_n\}$ — базиси в X і Y відповідно. Оператор задано, якщо відомі образи Ae_n всіх елементів базису, оскільки лінійна оболонка базису — щільна підмножина в X, а оператор A неперервний. Позначимо через g_n^* координатні функціонали базису $\{g_n\}$ в Y. Кожен елемент простору Y зображується у вигляді ряду $y = \sum_{n=1}^{\infty} g_n^*(y)\, g_n$, зокрема, $Ae_n = \sum_{m=1}^{\infty} g_m^*(Ae_n)\, g_m$. Отже, числа $a_{n,m} = g_m^*(Ae_n)$ цілком визначають оператор A.

Означення. Набір чисел $a_{n,m} = g_n^*(Ae_m)$, $n, m \in \mathbb{N}$ називається *матрицею оператора* A в базисах $\{e_n\}$, $\{g_n\}$. У цих позначеннях $Ae_n = \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} g_m$, тобто n-ний стовпчик матриці A складається з коефіцієнтів розкладу елемента Ae_n за базисом $\{g_m\}$.

Дотепер ми вивчали спектральну теорію, маючи дуже обмежений запас прикладів. Наступні вправи показують, як, використовуючи поняття матриці, можна будувати широкі класи операторів у класичних просторах.

Вправи

1. Нехай числа $a_{n,m}$ утворюють матрицю оператора A в базисах $\{e_n\}$, $\{g_n\}$ і $x = \sum_{m=1}^{\infty} x_m e_m$. Тоді

$$Ax = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{nm} x_m g_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} x_m g_n \right).$$

2. Нехай в канонічному базисі простору l_2 матриця оператора $T \in L(l_2)$ має діагональний вигляд. Доведіть, що спектр такого оператора збігається із замиканням множини діагональних елементів матриці.

3. Використовуючи попередню вправу, доведіть, що будь-яка обмежена непорожня замкнена множина комплексних чисел є спектром деякого оператора.

4. Нехай в умовах вправи 2 всі діагональні елементи матриці оператора T різні. Опишіть всі оператори, які комутують із T.

5. Нехай матриця A має дводіагональний вигляд:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

і т. д. до нескінченності. Доведіть, що в l_2 існує неперервний оператор, для якого A є матрицею в канонічному базисі простору l_2.

6. Обчисліть норму оператора і його спектр. Чи будуть точки спектра власними числами?

7. Доведіть, що числа $a_{n,m}$ утворюють матрицю деякого неперервного оператора в канонічному базисі простору l_1 тоді і тільки тоді, коли величина $\sup_n \sum_m |a_{n,m}|$ скінченна. Виразіть норму такого оператора через елементи його матриці.

8. За аналогією з попереднім описати оператори в просторі c_0. Для цього розглянути матрицю спряженого оператора і використати результат пункту 1.

9. Матриця називається *гільберт-шмідтовою*, якщо $\sum\limits_{n,m \in \mathbb{N}} |a_{nm}|^2 < \infty$. Доведіть, що в цьому випадку вона є матрицею деякого неперервного оператора A в канонічному базисі простору l_2.

10. Наведіть приклад неперервного оператора A в l_2, матриця якого в канонічному базисі — не гільберт-шмідтова.

Зауваження. На жаль, задання оператора матрицею стає не дуже зручним, коли мова йде про нескінченновимірні простори. Перевірити, що матриця справді задає неперервний оператор, часто є непростою справою, деколи зовсім неможливою. Саме тому для операторів у нескінченновимірних просторах матриці застосовуються значно менше, ніж у скінченновимірному випадку.

11.2. Компактні множини в банахових просторах

Важлива задача функціонального аналізу — виявляти нові ефекти, які з'являються при переході від скінченновимірних просторів до нескінченновимірних. Знання цих ефектів дозволяє уникати помилок, що виникають при поверхневому застосуванні аналогій зі скінченновимірним випадком або, скажімо, необґрутованій «апроксимації» нескінченновимірного об'єкта скінченновимірним у задачах числового розв'язання рівнянь або оптимізації в банаховому просторі. Але ще важливіше (особливо у застосуваннях) навчитися виокремлювати класи об'єктів, для яких аналогія зі скінченновимірним випадком, нехай і не в повному обсязі, але все ж таки застосовна. Такі об'єкти часто отримуються заміною скінченновимірності на ту чи іншу умову компактності. Нижче, в підрозділі 11.3, ми вивчимо один з таких об'єктів — клас цілком неперервних (компактних) операторів. Компактність відіграватиме важливу роль у теоремах про нерухомі точки (розділ 16), при вивченні двоїстості між простором і його спряженим, так само як в багатьох інших розділах нашого курсу. Хоча основні властивості компактів в топологічних і метричних просторах ми вже нагадали в розділі 1, буде не зайвим зупинитись на особливостях, які виникають при вивченні компактів в банахових просторах.

11.2.1. Передкомпактність: загальні результати

Так само, як і в довільному повному метричному просторі (теорема 2 п. 1.4.1), для замкненої підмножини A банахового простору X такі умови еквівалентні:

– A — компактна множина;

– A — передкомпакт;

– з будь-якої послідовності елементів множини A можна виділити збіжну підпослідовність.

Проте в банаховому просторі є структури, що відсутні в довільному повному метричному просторі. Це операції суми, множення на скаляр і породжені цими операціями поняття вимірності, лінійного підпростору, лінійного оператора і т. д. На зв'язку передкомпактності з цими лінійними структурами ми зупинимось в цьому пункті.

Теорема 1. *Передкомпактність стійка щодо лінійних операцій:*

(a) якщо A, B — передкомпакти в нормованому просторі, то $A + B$ — передкомпакт;

(b) якщо $A \subset X$ — передкомпакт, $T \in L(X, Y)$, то $T(A)$ — передкомпакт в Y;

(c) зокрема, передкомпактність зберігається при множенні на скаляр.

Доведення. (a) Нехай A_1, B_1 — скінченні $\frac{\varepsilon}{2}$-сітки множин A і B відповідно. Тоді $A_1 + B_1$ — скінченна ε-сітка множини $A + B$.

(b) Якщо A_1 — скінченна $\frac{\varepsilon}{\|T\|}$-сітка множини A, то $T(A_1)$ — скінченна ε-сітка множини $T(A)$.

(c) Множення на фіксований скаляр — неперервний лінійний оператор. □

Теорема 2. *Для обмеженої підмножини A нормованого простору X такі умови еквівалентні:*

(1) A — передкомпакт;

(2) для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує скінченновимірний підпростір $Y \subset X$, яка утворює ε-сітку для A.

Доведення. (1) ⇒ (2). Нехай A_1 — скінченна ε-сітка множини A. Тоді $\operatorname{Lin} A_1$ — скінченновимірний підпростір, який утворює шукану ε-сітку.

(2) ⇒ (1). Нехай підпростір $Y \subset X$ скінченновимірний і є ε-сіткою для A. Позначимо через r таке число, що $A \subset rB_X$. Розглянемо множину $(r + \varepsilon)B_Y$. Це обмежена підмножина скінченновимірного простору Y, отже, вона — передкомпакт. Оскільки Y — ε-сітка для A, для будь-якого $x \in A$ існує $y \in Y$ з $\|x - y\| < \varepsilon$. Але y лежить в $(r + \varepsilon)B_Y$:

$$\|y\| \leqslant \|x\| + \|y - x\| < r + \varepsilon.$$

Отже, множина $(r+\varepsilon)B_Y$ — це теж ε-сітка для A. Тобто для будь-якого $\varepsilon > 0$ ми знайшли для A передкомпактну ε-сітку, що означає передкомпактність множини A. □

Теорема 3. *Опукла оболонка передкомпакта — знову передкомпакт.*

Доведення. Скористаємось попередньою теоремою. Нехай A — передкомпакт, підпростір $Y \subset X$ скінченновимірний і утворює ε-сітку для A. Доведемо, що Y — ε-сітка і для $\mathrm{conv}A$. Нехай $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$ — довільна опукла комбінація елементів x_k множини A. Оскільки Y — це ε-сітка для A, можна вибрати $y_k \in Y$ з $\|x_k - y_k\| < \varepsilon$. Розглянемо $y = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k y_k$. Маємо

$$\|x - y\| = \left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (x_k - y_k) \right\| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \|x_k - y_k\| < \varepsilon \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = \varepsilon.$$

Але $y \in Y$ (Y — лінійний підпростір!), тобто Y — справді ε-сітка для $\mathrm{conv}A$, і $\mathrm{conv}A$ — передкомпакт. □

Теорема 4. *Нехай X, Y — банахові простори, $T_n, T \in L(X,Y)$ і послідовність операторів (T_n) поточково збігається до T. Тоді на будь-якому передкомпакті $A \subset X$ послідовність (T_n) збігається до T рівномірно.*

Доведення. За теоремою Банаха-Штейнгауза норми всіх операторів T_n обмежені зверху деякою сталою $C < \infty$. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ і виберемо для передкомпакта A скінченну $\frac{\varepsilon}{4C}$-сітку B. Множина B скінченна, і в кожній її точці y: $T_n y \to Ty$ ($n \to \infty$). Тому можна вибрати такий номер m, що для будь-якого $n > m$ в кожній точці $y \in B$ виконується нерівність $\|(T_n - T)y\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Оскільки B — це $\frac{\varepsilon}{4C}$-сітка для A, то для будь-якого $x \in A$ існує $y \in Y$ з $\|x - y\| < \frac{\varepsilon}{4C}$. Отже, при будь-якому $n > m$ для будь-якого $x \in A$ маємо оцінку:

$$\|(T_n - T)x\| \leqslant \|(T_n - T)y\| + \|(T_n - T)(x - y)\| <$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \|T_n - T\| \cdot \|x - y\| < \frac{\varepsilon}{2} + 2C\frac{\varepsilon}{4C} = \varepsilon.$$

Цим доведено рівномірну збіжність на A. □

До наступної теореми потрібно поставитись як до важливого попередження: у нескінченновимірному просторі обмежені множини не обов'язково є передкомпактами!

Теорема 5 (Ф. Ріс). *Одинична куля нескінченновимірного нормованого простору не може бути передкомпактом.*

Доведення. Припустимо, що B_X — передкомпакт. Зафіксуємо $\varepsilon \in (0,1)$. Нехай $Y \subset X$ — довільний скінченновимірний підпростір. Оскільки $Y \neq X$, фактор-простір X/Y нетривіальний. Виберемо елемент $[x]$ простору X/Y, який задовольняє умову $\varepsilon < \|[x]\| < 1$. За означенням норми у фактор-просторі, існує представник $z \in [x]$ з $\|z\| < 1$. Тоді $z \in B_X$, але водночас

$$\inf_{y \in Y} \|z - y\| = \|[z]\| = \|[x]\| > \varepsilon,$$

тобто Y не є ε-сіткою для B_X. Ми довели, що ніякий скінченновимірний простір не може бути ε-сіткою передкомпакта B_X, що суперечить теоремі 2. □

Вправи

1. Зведіть пункт (b) теореми 1 до теореми про компактність образу компакта при неперервному відображенні.

2. За допомогою оператора $U\colon X_1 \times X_2 \to X$, $U(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ зведіть пункт (a) теореми 1 до пункту (b) і твердження про компактність декартового добутку компактів.

3. Виведіть таке узагальнення теореми 4: нехай X, Y — метричні простори, $T_n\colon X \to Y$ і сім'я відображень $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ одностайно неперервна. Тоді якщо послідовність (T_n) поточково збігається до відображення T, то на будь-якому передкомпакті $A \subset X$ послідовність (T_n) збігається до T рівномірно.

Означення. Метричний простір X має *властивість маленьких куль* (скорочено $X \in SBP$ від Small Ball Property), якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ простір X можна покрити послідовністю куль $B(x_n, r_n)$ з радіусами, які задовольняють умови $\sup_n r_n < \varepsilon$ і $r_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

4. Якщо X — передкомпакт, то $X \in SBP$.
5. Якщо $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ і всі $X_n \in SBP$, то $X \in SBP$.
6. Якщо X — банахів простір і $X \in SBP$, то X скінченновимірний.
7. Замикання опуклої оболонки компакта — компакт.
8. Наведіть приклад, який показує, що опукла оболонка компакта не обов'язково є компактом.
9. Для будь-якого передкомпакта K в банаховому просторі існує послідовність (x_n), яка прямує до нуля, і K цілком міститься в замиканні опуклої оболонки послідовності (x_n).

11.2.2. Скінченновимірні оператори й апроксимаційна властивість

Неперервний оператор називається *скінченновимірним* або *оператором скінченного рангу*, якщо його образ скінченновимірний. Нам відомі вже різні приклади скінченновимірних операторів: лінійні функціонали, оператори частинних сум ряду Фур'є (п. 10.4.3), оператори частинних сум за базисом Шаудера (п. 10.5.2). Послідовність операторів $T_n \in L(X)$ називається *апроксимативною одиницею*, якщо всі оператори T_n скінченновимірні і $T_n \to I$ поточково. Простір X має *властивість поточкової апроксимації*[1], якщо в X існує апроксимативна одиниця.

Приклади

1. Нехай $\{e_n\}_1^{\infty}$ — базис банахового простору X. Тоді оператори S_n частинних сум утворюють апроксимативну одиницю. Справді, нехай $x \in X$ — довільний елемент, $x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k$ — його розклад за базисом. Тоді $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k$ і $S_n(x) \to x$ $(n \to \infty)$. Відповідно, будь-який простір з базисом має властивість поточкової апроксимації.

2. Для будь-якої функції $f \in C[0,1]$ позначимо через $L_n(f)$ кусково-лінійну неперервну функцію, яка збігається з f в точках 0, $\frac{1}{n}$, $\frac{2}{n}$, $\frac{3}{n}$, ..., 1 і лінійну на відрізках вигляду $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$. Так визначені оператори L_n утворюють апроксимативну одиницю в просторі $C[0,1]$.

3. Введемо позначення $\Delta_{n,k} = \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$, $k = 1, 2, ..., n$. Для будь-якої функції $f \in L_1[0,1]$ означимо

$$E_n(f) = \sum_{k=1}^{n} \left(n \int\limits_{\Delta_{n,k}} f(t)dt \cdot \mathbb{1}_{\Delta_{n,k}} \right).$$

Іншими словами, $E_n(f)$ — кусково-стала функція, яка набуває на кожному з $\Delta_{n,k}$, $k = 1, 2, ..., n$ значення, що дорівнює середньому значенню функції f на відрізку $\Delta_{n,k}$. Так визначені оператори E_n (що називаються *операторами усереднення*) утворюють апроксимативну одиницю в просторі $L_1[0,1]$.

[1] Насправді, є ціла група властивостей, які відносяться до типу *апроксимаційних властивостей* (див. [L-T]). Те, що ми тут називаємо властивістю поточкової апроксимації, правильніше називати *обмеженою апроксимаційною властивістю для сепарабельних просторів.*

Теорема. *Нехай X — банахів простір, що має властивість поточкової апроксимації, і послідовність $T_n \in L(X)$ — деяка фіксована апроксимативна одиниця у просторі X. Тоді для будь-якої множини $D \subset X$ такі дві умови еквівалентні:*

(1) D — передкомпакт;

(2) множина D обмежена, і послідовність (T_n) рівномірно збігається на D до одиничного оператора.

Доведення. Імплікація (1) $\Rightarrow$ (2) — це прямий наслідок з теореми 4 п. 11.2.1. Доведемо зворотну імплікацію. Нехай $T_n \rightrightarrows I$ на D при $n \to \infty$. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує такий номер $m = m(\varepsilon)$, що $\|T_m x - x\| < \varepsilon$ для всіх $x \in D$. Це означає, зокрема, що підпростір $T_m(X)$ — це ε-сітка для D. Оскільки за означенням апроксимативної одиниці всі T_n — оператори скінченного рангу, підпростір $T_m(X)$ скінченновимірний. Для завершення доведення залишається застосувати теорему 2 п. 11.2.1. □

Вправи

1. Доведіть, що якщо оператор задано матрицею, яка має лише скінченну кількість ненульових елементів, то такий оператор має скінченний ранг. Наведіть приклад такої матриці з нескінченною кількістю ненульових елементів, щоб вона визначала скінченновимірний оператор у просторі l_2.

2. Нехай X, Y — банахові простори, $\{y_k\}_{k=1}^n \subset Y$ і $\{f_k\}_{k=1}^n \subset X^*$ — скінченні набори елементів і функціоналів відповідно. Означимо оператор $T \in L(X,Y)$, $T = \sum_{k=1}^n f_k \otimes y_k$ формулою $Tx = \sum_{k=1}^n f_k(x) y_k$[2]. Доведіть, що T — скінченновимірний оператор, і що будь-який оператор скінченного рангу зображується у подібний спосіб, причому і вектори $\{y_k\}_{k=1}^n$, і функціонали $\{f_k\}_{k=1}^n$ в цьому зображенні можуть бути вибрані лінійно незалежними.

3. Перевірте, чи відображення L_n, побудовані у другому прикладі, — справді неперервні лінійні оператори скінченного рангу, які утворюють апроксимативну одиницю в $C[0,1]$.

4. Обґрунтуйте третій приклад за такою схемою: перевірте, що оператори усереднення E_n лінійні і $\dim E_n(L_1[0,1]) = n$; доведіть, що $\|E_n\| = 1$. Доведіть, що для будь-якої неперервної функції f, $E_n f \to f$ $(n \to \infty)$ рівномірно на $[0,1]$ (а отже, і в метриці простору $L_1[0,1]$). Для доведення поточкової збіжності E_n до I на всьому $L_1[0,1]$ скористатись критерієм поточкової збіжності (п. 10.4.2).

5. Доведіть скінченновимірність оператора $T \in L(C[0,1])$, $(Tf)(t) = \int\limits_0^1 (x+t) f(x)\, dx$.

6. Нехай $T \in L(X)$ — скінченновимірний оператор. Тоді образ оператора T — скінченновимірний інваріантний підпростір. Оскільки кожен власний вектор з ненульовим власним числом лежить в $T(X)$, задача пошуку ненульових власних чисел зводиться до вивчення дії оператора T у підпросторі $T(X)$. Спираючись на ці міркування, знайдіть усі ненульові власні числа і відповідні власні вектори оператора з попередньої вправи.

11.2.3. Критерії компактності множин у конкретних просторах

Оскільки в нескінченновимірних просторах вже не виконується знайомий з аналізу скінченновимірний критерій компактності (замкненість + обмеженість), перевірка компактності часто стає нетривіальною задачею. У розв'язанні цієї задачі допомагає знання

---

[2] Значок $\otimes$ читається тут як *тензорний добуток.*

специфіки простору, в якому розглядається потенційний компакт. У кожному конкретному просторі виникає свій критерій компактності. Один з таких критеріїв — теорема Арцела — вже знайомий читачеві. Як ми зазначали в п. 1.4.2, у просторі $C(K)$ неперервних функцій на метричному компакті передкомпактність множини еквівалентна одночасному виконанню двох умов: рівномірної обмеженості й одностайної неперервності. Решта класичних критеріїв компактності спираються на теорему, наведену в попередньому параграфі. Схема одержання таких критеріїв досить проста: потрібно вибрати (якомога вдаліше) апроксимативну одиницю і розписати детально, що означає рівномірна збіжність на множині.

Теорема 1 (критерій компактності в c_0). *Для того, щоб підмножина $D \subset c_0$ була передкомпактом, необхідно і достатньо, щоб існував елемент $z \in c_0$, який покоординатно мажорує всі елементи множини D.*

Доведення. Оскільки і передкомпактність, й існування мажоранти імплікують обмеженість, доведення достатньо проводити для обмежених множин. Розглянемо послідовність операторів $P_n \in L(c_0)$, які діють за правилом $P_n(x_j)_{j=1}^{\infty} = (x_1, ..., x_n, 0, 0, 0, ...)$. Очевидно, P_n утворюють апроксимативну одиницю в c_0. Згідно з теоремою з попереднього пункту, нам потрібно довести, що для обмеженої множини D існування мажоранти $z \in c_0$ еквівалентне рівномірній збіжності на D послідовності P_n до I.

Рівномірна збіжність P_n до I на D означає, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує такий номер $n(\varepsilon)$, що для будь-якого вектора $x = (x_1, ..., x_m, ...) \in D$ і будь-якого $n \geqslant n(\varepsilon)$ виконується нерівність $\|x - P_n x\| \leqslant \varepsilon$. Розписуючи означення норми в c_0 і означення P_n, одержуємо еквівалентне переформулювання: для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує такий номер $n(\varepsilon)$, що для будь-якого $n \geqslant n(\varepsilon)$

$$\sup\{\, |x_j| : x = (x_1, x_2, ...) \in D, j \geqslant n+1\} \leqslant \varepsilon.$$

Якщо ввести позначення $y_n = \sup\{\, |x_j| : x = (x_1, x_2, ...) \in D, j \geqslant n\}$, остання умова означає, що $y_n \to 0$ $(n \to \infty)$, тобто вектор $y = (y_1, ..., y_m, ...)$ — елемент простору c_0. Залишається зазначити, що прямування y_n до нуля еквівалентне існуванню шуканої мажоранти. Справді, вектор $y = (y_1, ..., y_m, ...)$ — елемент простору c_0 і $y_n \geqslant |x_n|$ для будь-якого вектору $x = (x_1, ..., x_m, ...) \in D$, тобто y — це спільна мажоранта всіх елементів множини D.

Навпаки, якщо у D існує мажоранта $z = (z_1, z_2, ...) \in c_0$, то

$$y_n \leqslant \sup\{\, |z_j| : j \geqslant n\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \qquad \square$$

Застосувавши такі ж оператори $P_n(x_j)_{j=1}^{\infty} = (x_1, ..., x_n, 0, 0, 0, ...)$ в просторі l_p, одержуємо такий результат.

Теорема 2 (критерій компактності в l_p). *Нехай $1 \leqslant p < \infty$. Для того, щоб обмежена підмножина $D \subset l_p$ була передкомпактом, необхідно і достатньо, щоб для будь-якого $\varepsilon > 0$ існував такий номер $n(\varepsilon)$, що $\sum\limits_{k=n(\varepsilon)}^{\infty} |x_k|^p \leqslant \varepsilon$ для будь-якого $x = (x_1, ..., x_m, ...) \in D$.*

З розгляду операторів частинних сум випливає такий критерій компактності в просторі з базисом:

Теорема 3. *Нехай X — банахів простір з базисом $\{e_n\}_1^{\infty}$. Для того, щоб обмежена підмножина $D \subset X$ була передкомпактом, необхідно і достатньо, щоб для будь-якого $\varepsilon > 0$ існував такий номер $n(\varepsilon)$, що $\left\| \sum\limits_{k=n(\varepsilon)}^{\infty} x_k e_k \right\| \leqslant \varepsilon$ для будь-якого $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k e_k \in D$.*

У такий самий спосіб можна отримати критерій компактності в $L_1[0,1]$, спираючись на оператори усереднення E_n з третього прикладу апроксимативної одиниці, наведеного в попередньому пункті. Цей критерій буде правильним і в багатьох випадках достатньо зручним. Проте, доклавши невеликих зусиль, можна придумати елегантніше формулювання. Всі функції $f \in L_1[0,1]$ вважатимемо визначеними не тільки на відрізку, але і на всій осі. Для цього продовжимо їх періодично з періодом 1. Для кожного $\tau \in \mathbb{R}$ означимо *оператор зсуву* $L_\tau \colon L_1[0,1] \to L_1[0,1]$ формулою $(L_\tau f)(t) = f(t+\tau)$. Як легко бачити, L_τ — бієктивна ізометрія; зокрема, $\|L_\tau\| = 1$.

Лема. *$L_\tau f \xrightarrow[\tau\to 0]{} f$ для будь-якого $f \in L_1[0,1]$.*

Доведення. Оскільки оператори L_τ обмежені в сукупності, то поточкову збіжність до одиничного оператора достатньо довести не на всьому $L_1[0,1]$, а на деякій повній підмножині цього банахового простору. За таку повну підмножину візьмемо тригонометричну систему $\{e^{int}\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Маємо

$$\left\|L_\tau e^{int} - e^{int}\right\| = \int_0^1 \left|e^{in(t+\tau)} - e^{int}\right| dt = \int_0^1 \left|e^{in\tau} - 1\right| dt = \left|e^{in\tau} - 1\right| \xrightarrow[\tau\to 0]{} 0.$$

□

Доведену лему можна переформулювати у такий спосіб: для будь-якої функції $f \in L_1[0,1]$ і будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що для будь-якого $\tau \in [-\delta,\delta]$ виконується нерівність $\int_0^1 |f(t+\tau) - f(t)|\, dt < \varepsilon$.

Така властивість функції f називається неперервністю в середньому.

Означення. Сім'я функцій $D \subset L_1[0,1]$ називається *одностайно неперервною в середньому*, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що для будь-якої функції $f \in D$ і будь-якого $\tau \in [-\delta,\delta]$ виконується нерівність $\int\limits_0^1 |f(t+\tau) - f(t)|\, dt < \varepsilon$.

Теорема 4 (критерій компактності в $L_1[0,1]$). *Для того, щоб обмежена підмножина $D \subset L_1[0,1]$ була передкомпактом, необхідно і достатньо, щоб вона була одностайно неперервною в середньому.*

Доведення. Нехай D — передкомпакт. Оскільки, згідно леми, $L_\tau \to I$ поточково, $L_\tau \to I$ рівномірно на D. Ця рівномірна збіжність — просто інший запис потрібної одностайної неперервності в середньому.

Тепер навпаки. Нехай дано одностайну неперервність в середньому множини D. Доведемо, що в цьому випадку оператори усереднення E_n з прикладу 3 п. 11.2.2 рівномірно на D збігаються до одиничного оператора. Оскільки послідовність (E_n) — апроксимативна одиниця в $L_1[0,1]$, то цим буде доведено передкомпактність множини D. Отже, для будь-якого $\varepsilon >\ 0$ візьмемо $\delta > 0$ з означення одностайної неперервності в середньому: $\int_0^1 |f(t+\tau) - f(t)|\, dt < \varepsilon$ для всіх $f \in D$ і всіх $\tau \in [-\delta,\delta]$. Тоді для будь-якого $n > \frac{1}{\delta}$ і будь-якого $f \in D$ маємо:

$$\|E_n(f) - f\| = \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^n n \int_{\Delta_{n,k}} f(x)dx \mathbb{1}_{\Delta_{n,k}}(t) - f(t) \right| dt =$$

$$= \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^n n \left(\int_{\Delta_{n,k}} [f(x) - f(t)]dx \right) \mathbb{1}_{\Delta_{n,k}}(t) \right| dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 \sum_{k=1}^{n} n \int_{\Delta_{n,k}} |f(x) - f(t)| dx \mathbb{1}_{\Delta_{n,k}}(t) dt = n \sum_{k=1}^{n} \int_{\Delta_{n,k}} \int_{\Delta_{n,k}} |f(x) - f(t)| \, dx dt.$$

Скориставшись тим, що всі пари $(x,t) \in \bigcup_{k=1}^{n} \Delta_{n,k} \times \Delta_{n,k}$ задовольняють нерівності $0 \leqslant t \leqslant 1$, $t - \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant t + \frac{1}{n}$, і зробивши заміну змінних $x \to t + \tau$, завершимо оцінку:

$$\|E_n(f) - f\| \leqslant n \int_{[-1/n, 1/n]} \int_0^1 |f(t+\tau) - f(t)| \, dt d\tau < 2\varepsilon. \qquad \square$$

Вправи

1. В означеннях неперервності і одностайної неперервності в середньому замість $\tau \in [-\delta, \delta]$ можна писати $\tau \in [0, \delta]$.

2. В l_∞ оператори P_n, які діють за правилом $P_n(x_j)_{j=1}^{\infty} = (x_1, ..., x_n, 0, 0, ...)$, не утворюють апроксимативної одиниці.

3. В l_∞ немає жодної апроксимативної одиниці (зазначимо, що жодного зручного критерію компактності в l_∞ також не відомо).

4. Наведіть приклад передкомпакта $D \subset l_p$, який не має спільної мажоранти $z \in l_p$.

5. Для даних множин в $C[0,1]$ з'ясуйте, чи будуть вони (a) обмеженими, (b) опуклими, (c) замкненими, (d) передкомпактними. Знайдіть (e) внутрішність і (f) межу множин.

(i) Множина всіх неспадних функцій $f \in C[0,1]$, які задовольняють умову $0 \leqslant f \leqslant 1$.

(ii) Множина всіх неспадних функцій $f \in C[0,1]$, які задовольняють умови $f \geqslant 0$ і $\int_{[0,1]} f(t) dt \leqslant 1$.

(iii) Множина всіх неперервно диференційовних функцій, які задовольняють умови $f(0) = 0$ і $\int_0^1 |f'(t)| dt \leqslant 1$.

(iv) Множина всіх неперервно диференційовних функцій, які задовольняють умови $f(0) = 0$ і $\int_0^1 |f'(t)|^2 dt \leqslant 1$.

6. Для даних множин в $L_1[0,1]$ з'ясуйте, чи будуть вони (a) обмеженими, (b) опуклими, (c) замкненими, (d) передкомпактними. Знайдіть (e) внутрішність і (f) межу множин.

(i) Множина всіх неспадних функцій $f \in L_1[0,1]$, які задовольняють умови $0 \leqslant f \leqslant 1$.

(ii) Множина всіх неспадних функцій $f \in L_1[0,1]$, які задовольняють умови $f \geqslant 0$ і $\int_{[0,1]} f(t) dt \leqslant 1$.

(iii) Множина всіх неперервно диференційовних функцій, які задовольняють умови $f(0) = 0$ і $\int_0^1 |f'(t)| dt \leqslant 1$.

(iv) Множина всіх неперервно диференційовних функцій, які задовольняють умови $f(0) = 0$ і $\int_0^1 |f'(t)|^2 dt \leqslant 1$.

11.3. Компактні (цілком неперервні) оператори

У цьому підрозділі літери X, Y і Z будуть використовуватись винятково для позначення банахових просторів.

11.3.1. Означення і приклади

Означення. Оператор $T\colon X \to Y$ називається *компактним* або *цілком неперервним*, якщо образ $T(B_X)$ одиничної кулі простору X є передкомпактом у просторі Y. Сім'я всіх компактних операторів, які діють з простору X у простір Y, позначається $K\left(X, Y\right)$.

Оскільки будь-яка обмежена множина міститься в деякій кулі, образ будь-якої обмеженої множини під дією компактного оператора буде міститись у множині вигляду $rT(B_X)$ і, отже, буде передкомпактом.

Приклад 1. Оператор інтегрування з ядром $T\colon C[0,1] \to C[0,1]$:

$$(Tf\left(t\right))\left(x\right) = \int\limits_0^1 K\left(t, x\right) f\left(t\right) dt,$$

де ядро $K\colon [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{C}$ неперервне за сукупністю змінних[3].

Для перевірки компактності оператора інтегрування, тобто передкомпактності в $C[0,1]$ множини $T(B_{C[0,1]})$, скористаємось теоремою Арцела. По-перше,

$$\|Tf\| \leqslant \max_{x\in[0,1]} \int\limits_0^1 \left|K\left(t, x\right)\right| \cdot \left|f\left(t\right)\right| \, dt \leqslant \|f\| \cdot \max_{t,x\in[0,1]} \left|K\left(t, x\right)\right|,$$

що доводить обмеженість множини $T(B_{C[0,1]})$. Для доведення одностайної неперервності множини спочатку для будь-якого $\varepsilon > 0$ виберемо $\delta\left(\varepsilon\right) > 0$ так, щоб для будь-яких $x_1, x_2 \in [0,1]$ з $|x_1 - x_2| < \delta\left(\varepsilon\right)$ виконувалась оцінка $\left|K\left(t, x_1\right) - K\left(t, x_2\right)\right| < \varepsilon$. Нехай тепер $g \in T\left(B_{C[0,1]}\right)$ — довільний елемент. Тоді g має вигляд $g = Tf$, де $f \in B_{C[0,1]}$. Відповідно, для будь-яких чисел $x_1, x_2 \in [0,1]$, $|x_1 - x_2| < \delta\left(\varepsilon\right)$ маємо

$$|g(x_1) - g(x_2)| = \left|\left(Tf\right)\left(x_1\right) - \left(Tf\right)\left(x_2\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^1 \left|K\left(t, x_1\right) - K\left(t, x_2\right)\right| \cdot \left|f\left(t\right)\right| \, dt < \varepsilon \cdot \int\limits_0^1 \left|f\left(t\right)\right| dt \leqslant \varepsilon \cdot \|f\| \leqslant \varepsilon,$$

тобто множина $T(B_{C[0,1]})$ одностайно неперервна.

Приклад 2. Якщо простір X нескінченновимірний, то одиничний оператор в X — це не компактний оператор. Справді, $I(B_X) = B_X$, а одинична куля нескінченновимірного простору не є передкомпактом.

Вправи

1. Доведіть, що будь-який скінченновимірний оператор компактний.

2. Діагональний оператор $T \in L\left(l_p\right)$ (тобто матриця якого в канонічному базисі має діагональний вигляд) є цілком неперервним тоді і тільки тоді, коли діагональні елементи його матриці утворюють послідовність, яка прямує до нуля.

3. Обчисліть норму оператора з другої вправи.

4. Доведіть, для оператора інтегрування з ядром в $C[0,1]$ формулу

$$\|T\| = \max_{x\in[0,1]} \int\limits_0^1 \left|K\left(t, x\right)\right| dt$$

(див. приклад 1).

[3]Не варто, звичайно, одну і ту саму літеру використовувати для позначення, як класу компактних операторів, так і ядра в операторі інтегрування з ядром, не кажучи вже про використання цієї літери для позначення компакта, коли йде мова про простори. Але всі ці позначення є загальноприйнятими. Щоб дати змогу читачеві насолодитися, ми могли б, як це прийнято, компактний оператор теж позначати літерою K. Але — доброго потрошки.

5. Доведіть, що оператор інтегрування з ядром із прикладу 1 компактний як оператор, який діє з $L_1[0,1]$ в $C[0,1]$.
6. Перевірте компактність оператора інтегрування з прикладу п. 11.1.5.
7. Нехай $K\colon [0,1]\times[0,1]\to\mathbb{C}$ функція двох змінних, які задовольняють умові: для будь-якого $x\in[0,1]$ функція $K_x(t)=K\,(t,x)$ інтегровна за змінною t. Нехай відображення $x\mapsto K_x$ неперервне як відображення відрізка $[0,1]$ в $L_1[0,1]$. Тоді оператор інтегрування з ядром $K\,(t,x)$ — компактний оператор в $C[0,1]$.

11.3.2. Властивості компактних операторів

Теорема 1. *Множина компактних операторів $K\,(X,Y)$ має такі властивості:*

(1) $K\,(X,Y)$ — лінійний підпростір в $L\,(X,Y)$.

(2) $K\,(X,Y)$ — операторний ідеал, тобто якщо $T\in K\,(X,Y)$, то добутки AT і TA компактні для будь-якого неперервного оператора A, для якого має сенс відповідна композиція.

(3) Множина $K\,(X,Y)$ замкнена в $L\,(X,Y)$ в сенсі збіжності за нормою[4].

Доведення. (1). Стійкість щодо множення на скаляр очевидна, а стійкість щодо додавання випливає зі співвідношення $(T_1+T_2)(B_X)\subset T_1(B_X)+T_2(B_X)$ і того, що сума передкомпактів — передкомпакт.

(2). Нехай $A\in L\,(Z,X)$. Тоді будь-яка обмежена підмножина простору Z під дією оператора A переходить в обмежену множину, яку, у свою чергу, оператор T переводить у передкомпакт. Тому оператор TA компактний. Нехай тепер $A\in L\,(Y,Z)$. Тоді будь-яка обмежена підмножина простору X переходить під дією оператора T в передкомпакт, який, у свою чергу, переводиться оператором A також у передкомпакт.

(3). Нехай послідовність компактних операторів T_n збігається до оператора T. Потрібно довести компактність граничного оператора. Для цього зафіксуємо $\varepsilon>0$ і побудуємо передкомпактну ε-сітку для $T(B_X)$. Виберемо такий номер n, що $\|T-T_n\|<\varepsilon$. Розглянемо передкомпакт $K=T_n\,(B_X)$. Для будь-якого $x\in B_X$ маємо

$$\|Tx-T_nx\|\leqslant\|T-T_n\|\cdot\|x\|<\varepsilon.$$

Отже, K утворює шукану ε-сітку. □

Наслідок. *Якщо компактний оператор $A\in L(X,Y)$ оборотний, то простори X і Y скінченновимірні.*

Доведення. У цьому випадку $I_X=A^{-1}A$, $I_Y=A\,A^{-1}$, де I_X і I_Y — одиничні оператори в просторах X і Y відповідно. Отже, за властивістю (2), I_X і I_Y — компактні оператори, що для нескінченновимірних X і Y неможливо. □

Наступна теорема показує, що в широкому класі просторів (що охоплює практично всі простори, які використовуються в застосуваннях) компактні оператори можуть бути апроксимовані за нормою скінченновимірними операторами. Теорія компактних операторів народилась із досліджень Фредгольма з теорії інтегральних рівнянь. У цих дослідженнях вивчення інтегральних операторів базувалось на наближенні цих операторів скінченновимірними. Сучасний виклад, загальніший і технічно менш складний,

[4]Звертаємо увагу читача, що замкненості в сенсі поточкової збіжності тут немає.

базується на інших ідеях, які належать насамперед Ф. Рісу. Тим не менше, апроксимація скінченновимірними буває корисною при вивченні конкретних операторів, зокрема, в задачах числового розв'язання рівнянь, які містять компактні оператори.

Теорема 2. *Нехай Y — простір з властивістю поточкової апроксимації (наприклад, простір з базисом), $T \in K(X, Y)$ і оператори S_n утворюють апроксимативну одиницю в Y. Тоді оператори $T_n = S_n T$ утворюють послідовність скінченновимірних операторів, збіжну за нормою до оператора T.*

Доведення. Оператори T_n скінченновимірні, оскільки скінченновимірні оператори S_n. Крім того, послідовність операторів (S_n) обмежена і поточково збігається до тотожного оператора I на передкомпакті $T(B_X)$, отже, справджується і рівномірна збіжність на $T(B_X)$. Отже,

$$\|T_n - T\| = \sup_{x \in B_X} \|T_n x - Tx\| = \sup_{x \in B_X} \|(S_n - I)Tx\| =$$

$$= \sup_{y \in T(B_X)} \|(S_n - I)y\| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0. \qquad \square$$

Теорема 3 (теорема Шаудера про компактність спряженого оператора). *Нехай X, Y — банахові простори, $T \in K(X, Y)$. Тоді $T^* \in K(Y^*, X^*)$.*

Доведення. Згідно з означенням, нам потрібно довести передкомпактність множини $G = T^*(B_{Y^*})$ в X^*. Введемо позначення $K = \overline{T(B_X)}$. За умовою, K — компакт в Y. Розглянемо простір $C(K)$ неперервних функцій на цьому компакті та відображення $U\colon G \to C(K)$, яке діє за правилом $U(T^*f) = f|_K$, тобто функціоналу $T^*f \in X^*$ відповідає обмеження функціонала $f \in Y^*$ на K. Доведемо, що U — ізометрія. Нехай T^*f_1, T^*f_2 — два довільних елемента множини G. Маємо

$$\|T^*f_1 - T^*f_2\| = \|T^*(f_1 - f_2)\| = \sup_{x \in B_X} |T^*(f_1 - f_2)x| =$$
$$= \sup_{x \in B_X} |(f_1 - f_2)(Tx)| = \sup_{y \in T(B_X)} |(f_1 - f_2)y| =$$
$$= \sup_{y \in K} |(f_1 - f_2)y| = \| f_1|_K - f_2|_K\|_{C(K)}.$$

Цією оцінкою доведено також і коректність означення відображення U: якщо $T^*f_1 = T^*f_2$, то

$$\|U(T^*f_1) - U(T^*f_2)\| = \| f_1|_K - f_2|_K\| = 0,$$

тобто $U(T^*f_1) = U(T^*f_2)$.

З огляду на ізометричність відображення U передкомпактність множини G рівносильна передкомпактності в $C(K)$ його образу $U(G) = \{f|_K : f \in B(Y^*)\}$. Множина $U(G)$ рівномірно обмежена, оскільки для будь-якого $f \in B(Y^*)$

$$\|f|_K\|_{C(K)} = \sup_{x \in B_X} |f|_K(Tx)| \leqslant \|f\| \cdot \sup_{x \in B_X} \|Tx\| \leqslant \|T\|.$$

З іншого боку, множина $U(G)$ одностайно неперервна, оскільки її елементи — це функції, які задовольняють умову Ліпшиця зі сталою 1:

$$|f|_K(y_1) - f|_K(y_2)| \leqslant |f(y_1) - f(y_2)| \leqslant \|f\| \cdot |y_1 - y_2| \leqslant \|y_1 - y_2\|.$$

Для завершення доведення залишилось застосувати теорему Арцела. $\square$

Вправи

1. Нехай T — оператор інтегрування з ядром (див. приклад 1 і вправу 4 п. 11.3.1), причому ядро має вигляд $K(t,\tau) = \sum\limits_{j=1}^{n} f_j(t)\, g_j(\tau)$. Доведіть, що такий оператор має скінченний ранг.

2. Доведіть, що оператор інтегрування з ядром із прикладу 1 п. 11.3.1 може бути наближений з будь-якою точністю операторами інтегрування з ядром, яке має скінченний ранг.

3. Знайдіть для оператора з вправи 1 зображення вигляду $T = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k \otimes\, y_k$, як у вправі 2 п. 11.2.2.

4. Спряжений оператор до скінченновимірного оператора знову має скінченний ранг.

5. Для скінченновимірного оператора $A \in L(X, Y)$

$$\operatorname{codim} \operatorname{Ker} A = \operatorname{codim} \operatorname{Ker} A^* = \dim A(X) = \dim A^*(X^*).$$

Якщо оператор має нескінченний ранг, всі ці чотири характеристики також нескінченні (означення ковимірності див. п. 5.3.3).

6. Образ компактного оператора $A \in L(X, Y)$ замкнений тоді і тільки тоді, коли оператор скінченновимірний (тобто, зазвичай, образ компактного оператора незамкнений).

7. Наведіть приклад некомпактного оператора, який має незамкнений образ.

8. Доведіть таку теорему, що належить І. К. Даугавету: нехай $T\colon C[0,1] \to C[0,1]$ — компактний оператор. Тоді $\|I + T\| = 1 + \|T\|$. Детальніше про цю теорему і її роль в теорії банахових просторів див. [Kad2], [KSSW].

9. Доведіть, що *рівність Даугавета* $\|I + T\| = 1 + \|T\|$ для оператора T в просторі l_2 виконується тоді і тільки тоді, коли $\|T\| \in \sigma(T)$.

11.3.3. Оператори вигляду I–T, де T — компактний оператор

При вивченні спектра цілком неперервного оператора центральне місце має таке твердження.

Теорема. *Нехай $T \in K(X, X)$. Тоді:*

(1) образ оператора $I - T$ — замкнений підпростір.

(2) Якщо оператор вигляду $I - T$ ін'єктивний, то він сюр'єктивний.

(3) Якщо оператор вигляду $I - T$ сюр'єктивний, то він ін'єктивний.

Зазначимо, що разом властивості (2) і (3) означають, що оператор $I - T$ або оборотний, або одночасно і не ін'єктивний, і не сюр'єктивний. Цей підрозділ присвячено доведенню цих властивостей, причому кожна з властивостей (1)–(3) буде виокремлена у твердження.

Твердження 1. *Нехай $T \in K(X, X)$. Тоді образ оператора $A = I - T$ є замкненим підпростором.*

Доведення. Будемо міркувати методом від супротивного. Позначимо $\operatorname{Ker} A$ через Y. Згідно з критерієм, доведеним у теоремі 5 п. 10.2.3, незамкненість образу означає, що існує послідовність (x_n) в X з такими властивостями:

1. $\operatorname{dist}(x_n, Y) = 1$;
2. $\|Ax_n\| \to 0$ $(n \to \infty)$;

3. $\|x_n\| \to 1$.

На підставі компактності оператора T послідовність (Tx_n) утворює передкомпакт в X. Перейшовши за потреби до підпослідовності, ми можемо досягти, щоб послідовність (Tx_n) мала границю. Позначимо цю границю через s. Оскільки

$$x_n = Ax_n + Tx_n \xrightarrow[n\to\infty]{} s,$$

то $\operatorname{dist}(s, Y) = 1$. З іншого боку, $As = \lim\limits_{n\to\infty} Ax_n = 0$, тобто s лежить у підпросторі Y — ядрі оператора A. Отримана суперечність завершує доведення. □

Твердження 2. *Якщо оператор вигляду $A = I - T$, де $T \in K(X, X)$, ін'єктивний, то він і сюр'єктивний.*

Доведення. Будемо міркувати методом від супротивного. Нехай $A(X) \neq X$. Розглянемо підпростори $Y_n = A^n(X)$, $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$. Спочатку доведемо, що ці підпростори утворюють послідовність $Y_0 \supset Y_1 \supset Y_2 \supset \ldots$ строго вкладених підпросторів. Для цього застосуємо метод математичної індукції.

Строге вкладення $Y_0 \supset Y_1$ очевидне, бо $Y_0 = X$; $Y_1 = A(X)$. Нехай $Y_{n-1} \supset Y_n$ строго. Ін'єктивний оператор A зберігає строгі вкладення, тому

$$Y_n = A(Y_{n-1}) \supset A(Y_n) = Y_{n+1}.$$

Продовжимо наші міркування. На підставі доведених строгих вкладень існують функціонали $f_n \in S(Y_n^*)$, $f_n(Y_{n+1}) = 0$, $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$. Доозначимо ці функціонали на весь X зі збереженням норми. Згідно з теоремою про компактність спряженого, оператор T^* переводить множину $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ у передкомпакт. Доведемо тепер, що послідовність $(T^* f_n)$ — відокремлена, тобто $\inf\limits_{m\neq n\in\mathbb{N}} \|T^* f_m - T^* f_n\| > 0$. Цим ми прийдемо до суперечності з передкомпактністю і завершимо доведення теореми. Нехай $n > m$. Тоді

$$\begin{aligned}
\|T^* f_m - T^* f_n\| &\geqslant \|T^* f_m - T^* f_n\|_{Y_n^*} = \\
&= \sup_{x\in B_{Y_n}} |((T^* - I^*)f_n + f_n + (I^* - T^*)f_m - f_m)(x)| = \\
&= \sup_{x\in B_{Y_n}} |f_n((T - I)x) + f_m((I - T)x) + f_n(x) - f_m(x)| = \\
&= \sup_{x\in B_{Y_n}} |-f_n(A(x)) + f_m(A(x)) + f_n(x) - f_m(x)| = \\
&= \sup_{x\in B_{Y_n}} |f_n(x)| = \|f_n\|_{Y_n^*} = 1.
\end{aligned}$$

Тут використовувалось те, що $Ax \in Y_{n+1}$ при $x \in Y_n$ і функціонали f_j дорівнюють 0 на підпросторах з більшим індексом. □

Зазначимо важливий наслідок з отриманого твердження.

Наслідок. *Нехай оператор вигляду $A = I - T$, де T — компактний, необоротний. Тоді оператор A неін'єктивний.*

Доведення. Нехай оператор A ін'єктивний. За попереднім твердженням, він буде сюр'єктивним, а ін'єктивність і сюр'єктивність разом означають оборотність. □

Твердження 3. *Якщо оператор вигляду $A = I - T$, де $T \in K(X, X)$ сюр'єктивний, то він також ін'єктивний.*

Доведення. Нехай оператор A сюр'єктивний, тоді A^* ін'єктивний (наслідок 1 п. 9.4.1). Оскільки A^* — знову оператор вигляду «одиничний мінус компактний», то, згідно з попередньою теоремою, оператор A^* буде і сюр'єктивним. Отже, оператор A ін'єктивний (наслідок 2 п. 9.4.1), що й потрібно довести. □

Зауваження. Основні результати цього розділу є частковими випадками загальної теореми Фредгольма, сформульованої нижче у вправі 2 п. 11.3.3. Фредгольм вивчав відповідні явища для інтегральних операторів. На загальний випадок цілком неперервних операторів теореми Фредгольма перенесені Ф. Рісом.

Вправи

1. Доведіть, що для оператора вигляду $A = I - T$, де T — компактний, такі умови еквівалентні:

- рівняння $Ax = b$ розв'язне за будь-якої правої частини;
- однорідне рівняння $Ax = 0$ не має ненульових розв'язків;
- рівняння $Ax = b$ розв'язне за будь-якої правої частини, причому розв'язок єдиний.

2. **Теорема Фредгольма.** Нехай $A = I - T$, де оператор $T \in L(X)$ компактний. Тоді

$$\dim \operatorname{Ker} A = \dim \operatorname{Ker} A^* = \operatorname{codim} A\,(X) = \operatorname{codim} A^*\,(X^*)\,.$$

Оператори вигляду «скалярний + компактний». Оператор $A \in L(X)$ називається *оператором вигляду «скалярний + компактний»*, якщо він зображається у вигляді $A = \lambda I + T$, де $T \in K(X, X)$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

3. У оператора в нескінченновимірному просторі не може бути двох різних зображень у вигляді $A = \lambda I + T$ «скалярний + компактний».

4. Оператори вигляду «скалярний + компактний» утворюють підалгебру в $L(X)$.

5. Нехай T — діагональний оператор в l_2 (див. вправу 2 п. 11.1.6), λ_n — діагональні елементи його матриці в канонічному базисі $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ простору l_2 (іншими словами, $Te_n = \lambda_n e_n$, $n = 1, 2, \ldots$). Довести, що T зображується у вигляді «скалярний + компактний» тоді і тільки тоді, коли послідовність (λ_n) має границю.

6. Нехай T — проектор. Оператор T зображується у вигляді «скалярний + компактний» тоді і тільки тоді, коли або образ, або ядро оператора T має скінченну вимірність.

Лінійний функціонал f, заданий на банаховій алгебрі $\mathbf{A}$, називається *мультиплікативним функціоналом* (інший термін — *комплексний гомоморфізм*), якщо $f(e) = 1$, і $f(xy) = f(x)f(y)$ для будь-яких $x, y \in \mathbf{A}$.

7. Мультиплікативний функціонал може перетворюватись в нуль тільки на необоротних елементах алгебри.

8. Будь-який мультиплікативний функціонал, заданий на банаховій алгебрі, неперервний і його норма дорівнює 1.

9. Побудуйте мультиплікативний функціонал на алгебрі операторів вигляду «скалярний + компактний», які діють у банаховому просторі X.

10. Доведіть, що на $L(l_2)$ не існує мультиплікативних функціоналів.

11. Для мультиплікативних функціоналів не виконується аналог теореми Гана–Банаха: не кожен мультиплікативний функціонал, заданий на підалгебрі, можна продовжити на всю банахову алгебру зі збереженням лінійності і мультиплікативності.

12. Нехай X — нескінченновимірний банахів простір. Говоритимемо, що X — *скупий простір*, якщо кожен неперервний оператор $A \in L(X)$ зображується у вигляді «скалярний + компактний». Доведіть, що серед просторів $C(K)$, l_p і L_p немає скупих.

11.3.4. Структура спектра компактного оператора

Теорема. *Нехай $T \in L(X)$ — компактний оператор у нескінченновимірному банаховому просторі. Тоді:*

1. *Спектр оператора T або скінченний, або складається з послідовності точок, які прямують до 0.*
2. *Нуль належить до спектра.*
3. *Якщо $\lambda \neq 0$ належить до спектра, то λ — власне число оператора; власні підпростори, відповідні ненульовим власним числам, скінченновимірні.*

Доведення. Почнемо з доведення останньої властивості. Нехай $\lambda \neq 0$ належить до спектра. Тоді оператор $(T - \lambda I) = -\lambda\,(I - \lambda^{-1}T)$ необоротний. Отже, за наслідком із твердження 2 п. 11.3.3 він не ін'єктивний, тобто існує ненульовий елемент $x \in X$, на якому $(T - \lambda I)\,x = 0$. Це й означає, що x — власний вектор, а λ — власне число оператора T. Далі, нехай Y — власний підпростір, відповідний числу λ. З огляду на те, що обмеження оператора T на підпростір Y — бієктивний компактний оператор, наслідок з теореми 1 п. 11.3.2 дає потрібну скінченновимірність.

Належність нуля до спектра, тобто необоротність оператора T, випливає з того ж наслідку з теореми 1 п. 11.3.2.

Доведемо, нарешті, пункт 1. Міркуватимемо від супротивного. Нехай спектр оператора T нескінченний і має ненульову граничну точку μ. Нехай, далі, $\lambda_k \neq \mu$ — це послідовність власних чисел, що прямує до μ, а x_k — відповідні власні вектори. Введемо в розгляд підпростір $Y = \overline{\mathrm{Lin}\{x_k\}_{k=1}^{\infty}}$ і оператор $A \in L\,(Y)$ — обмеження на Y оператора $I - \frac{1}{\mu}T$. Зазначимо, що $Ax_k = \left(1 - \frac{\lambda_k}{\mu}\right)x_k$. Тому образ оператора A містить усі вектори x_k, тобто образ щільний в Y.

Згідно з основною теоремою п. 11.3.3, образ замкнений, тобто оператор A сюр'єктивний і, отже, бієктивний. Але це неможливо, оскільки оператор необмежений знизу:

$$\frac{\|Ax_k\|}{\|x_k\|} = \left|1 - \frac{\lambda_k}{\mu}\right| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0. \qquad \square$$

Вправи

1. Доведіть, що компактний оператор не може бути внутрішньою точкою множини необоротних операторів в $L\,(X)$. Застосувати цей факт для розв'яання вправи 5 п. 11.1.2.

Знайдіть спектри таких операторів:

2. Оператор інтегрування з прикладу п. 11.1.5.

3. $T \in L\,(C\,[0,1])$, $Tf\,(t) = \int\limits_0^1 (x+t)f\,(x)\,dx$.

4. $T \in L\,(C\,[0,1])$, $Tf\,(t) = f\,(t) + \int\limits_0^1 (x+t)f\,(x)\,dx$.

5. $T \in L\,(C\,[0,2\pi])$, $Tf\,(t) = \int\limits_0^{2\pi} \cos\,(x+t)f\,(x)\,dx$.

6. $T \in L\,(C\,[0,1])$, $Tf\,(t) = \int\limits_0^1 (x+t)f\,(t)\,dx$.

Коментарі до вправ

Література за темою «Банахові алгебри»: підручники [Wer, розд. 9] і [Rud, розд. 10].

11.1.1

Вправа 2. Добуток може не лежати в тому ж просторі.

Вправа 3. Відсутній одиничний елемент.

11.1.4

Вправа 4. Скористатись вправою 11 п. 11.1.2.

11.1.3

Вправа 6. Див. вправи 6, 7 п. 10.2.3.

11.1.6

Вправа 5. Див. вказівки в кінці п. 12.3.5 (відразу після доведення теореми про ізоморфізм).

11.2.1

Вправи 4–6. Детальніше про цю властивість див. статтю [B-K]. Як повідомив нам Збіґнев Ліпецкі (Zbigniew Lipecki), під іншими назвами цю властивість вивчали раніше автори: E. Szpilrajn-Marczewski, Fund. Math. 15 (1930), 126–127 і Fund. Math. 22 (1934), 303–311; R. Duda and R. Telgarsky, Czechoslovak Math. J. 18(93) (1968), 66–82; Ch. Bandt, Mathematika 28 (1981), 206–210.

Вправа 9. Див. [L-T, V.1, Proposition 1.e.2].

11.2.2

Вправа 2. Доведення потребує тільки друга частина твердження. Нехай T — скінченновимірний оператор, $\{y_k\}_{k=1}^n$ — базис скінченновимірного простору $T(X)$. Далі, нехай $g_k \in T(X)^*$ — координатні функціонали, що відповідають базису $\{y_k\}_{k=1}^n$. Маємо

$$Tx = \sum_1^n g_k\,(Tx) y_k,$$

тобто за шукані $\{f_k\}_{k=1}^n$ можна взяти $f_k(x) = g_k\,(Tx)$.

Вправа 5. На підставі рівності

$$(Tf)\,(t) = \int\limits_0^1 xf\,(x)\,dx + t\int\limits_0^1 f\,(x)\,dx$$

образ оператора міститься в двовимірному просторі функцій вигляду $g(t) = a + bt$.

11.3.2

Вправа 5. Скориставшись зображенням $Ax = \sum_{k=1}^n f_k\,(x) y_k$ з лінійно незалежними наборами $\{y_k\}_{k=1}^n$ і $\{f_k\}_{k=1}^n$ (вправа 2 п. 11.2.2 і коментарем до неї), знайдіть вираз для A^*. Звідси виведіть, що $\dim A\,(X) = \dim A^*\,(X^*) = n$. Щоб переконатись, що ковимірність ядра дорівнює ковимірності образу, скористайтесь ін'єктивізацією лінійного оператора
(п. 5.2.2).

Вправа 6. Якщо образ скінченновимірний, то він замкнений, оскільки скінченновимірний підпростір замкнений у будь-якому ширшому просторі. Навпаки, припустимо, що образ замкнений. Тоді $A\,(X)$ — банахів простір. За теоремою про відкрите відображення, образ одиничної кулі — відкрита множина в $A\,(X)$, тому передкомпакт $A\,(B\,(X))$ містить деяку кулю U простору $A\,(X)$. Тоді ця куля U — передкомпакт, отже, одинична куля простору $A\,(X)$, який утворюється з U паралельним перенесенням і множенням на скаляр, у свою чергу, передкомпакт. Отже, $A\,(X)$ — скінченновимірний простір.

11.3.3

Вправа 2. Див. [L-S, гл. 6, с. 281-284]. Вказівка: міркуванням з твердження 2 п. 11.3.3 одержати, що серед підпросторів $Y_n = A^n\,(X)$, $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, може бути лише скінченне число попарно різних. Переконайтесь, що підпростір $Y = \bigcap_n Y_n$ — це підпростір скінченної ковимірності, який оператором A бієктивно відображається сам у себе. Розгляньте підпростір $Z = \bigcup_n \operatorname{Ker} A^n$. Доведіть, що $X = Y \oplus Z$. Подивіться, як A діє на кожний з цих доданків.

Вправа 12. На час написання цього підручника питання існування просторів з такою властивістю залишалось відкритим.

11.3.4

Вправа 2. $\sigma(T) = \{0\}$. Справді, оператор цілком неперервний, отже, $0 \in \sigma(T)$. Ненульових точок у спектрі немає, оскільки, за теоремою п. 11.3.4, такі точки були б власними числами, а власних чисел, як показано в п. 11.1.5, у цього оператора немає.