Розділ 10. Класичні теореми про неперервні оператори

10.1. Відкриті відображення

Нехай X, Y — банахові простори, $T \in L(X, Y)$. За означенням, оператор T здійснює *відкрите відображення*, якщо образ $T(A)$ будь-якої відкритої множини $A \subset X$ — відкрита множина в Y. Оператори, які здійснюють відкрите відображення, називають ще *відкритими операторами.*

Зазначимо елементарні властивості відкритих операторів.

– Відкритий оператор сюр'єктивний. Справді, повний образ $T(X)$ оператора відкритий в Y і утворює лінійний підпростір. Отже, $T(X)$ містить лінійну оболонку деякої кулі в Y, тобто $T(X) = Y$.

– Якщо відкритий оператор ін'єктивний, то він бієктивний, і T^{-1} — неперервний оператор. (Одразу випливає з означення неперервності через прообрази відкритих множин.)

10.1.1. Критерій відкритості відображення

Теорема. *Оператор $T \in L(X, Y)$ здійснює відкрите відображення тоді і тільки тоді, коли образ $T(B_X)$ одиничної кулі містить деяку кулю вигляду rB_Y, $r > 0$.*

Доведення. Необхідність умови випливає з того, що образ $T(B_X)$ одиничної кулі під дією відкритого відображення — відкрита множина, яка містить нульовий елемент простору Y.

Перевіримо достатність. Нехай $A \subset X$ — довільна відкрита підмножина, $x_0 \in A$. Виберемо $t > 0$ у такий спосіб, щоб куля $B_X(x_0, t) = x_0 + tB_X$ також містилась в A. Тоді

$$T(A) \supset Tx_0 + tT(B_X) \supset Tx_0 + trB_Y,$$

тобто будь-яка точка Tx_0 множини $T(A)$ входить туди разом з деяким околом. Отже, $T(A)$ відкрита, що, з огляду на довільність вибору множини A, спричиняє відкритість оператора T. □

Наведений учбовий текст є витягом з підручнику
Кадець В.М. Курс функціонального аналізу та теорії міри. – Львів: Видавець І.Е. Чижиков, 2012. – 590 с. – (Серія “Університетська бібліотека”) ISBN 978-966-2645-03-3
Усі посилання на теореми, вправи, означення, такі що не увійшли до цього тексту – це посилання на підручник.

Вправи

1. Нехай X — нормований простір, X_1 — замкнений підпростір в X. Тоді фактор-відображення $q\colon X \to X/X_1$ — відкритий оператор.

2. Чи утворює множина відкритих операторів з нормованого простору X у нормований простір Y лінійний підпростір в $L(X,Y)$? Чи буде ця множина замкненою в $L(X,Y)$? відкритою?

10.1.2. Кулеподібні множини

Підмножина A банахового простору X називається *кулеподібною*, якщо для будь-якої послідовності $x_n \in A$ і будь-яких скалярів λ_n, які задовольняють умову $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \leqslant 1$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n$ збігається до елемента множини A.

Перевірку перелічених нижче властивостей кулеподібних множин залишаємо читачеві як вправу.

1. Кулеподібні множини обмежені.
2. Кожна замкнена опукла обмежена врівноважена множина в банаховому просторі кулеподібна.
3. Відкрита одинична куля банахового простору — кулеподібна множина. Отже, кулеподібна множина може бути незамкнена.
4. Образ кулеподібної множини під дією неперервного лінійного оператора — знову кулеподібна множина.

Теорема. *Нехай замикання $\bar{A}$ кулеподібної множини A в банаховому просторі X містить кулю rB_X, де r — деяке додатне число. Тоді сама множина A містить цю кулю.*

Доведення. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що $r = 1$ (до цього випадку можна звести заміною множини A на $\frac{1}{r}A$). Зафіксуємо $x \in B_X$ і доведемо, що $x \in A$. Задамо додатне число ε, яке задовольняє умову $\frac{1}{1-\varepsilon}x \in B_X$, і покладемо $x_0 = \frac{1}{1-\varepsilon}x$. За умовою, $x_0 \in \bar{A}$. Виберемо $y_0 \in A$, яке наближає x_0 з точністю до ε: $\|x_0 - y_0\| < \varepsilon$. Вектор $x_1 = x_0 - y_0$ лежить в εB_X, що, в свою чергу, міститься в $\varepsilon \bar{A}$. Виберемо $y_1 \in A$ у такий спосіб, що $\|x_1 - \varepsilon y_1\| < \varepsilon^2$. Тоді елемент

$$x_2 = x_1 - \varepsilon y_1 = x_0 - y_0 - \varepsilon y_1$$

лежить в $\varepsilon^2 \bar{A}$. Продовжуючи цей процес, побудуємо такі вектори $y_n \in A$, що $\|x_0 - y_0 - \varepsilon y_1 - ... -$ ε^{n+1}. За такої побудови ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n y_n$ збігається до x_0. Отже, з огляду на кулеподібність множини A елемент

$$x = (1-\varepsilon)x_0 = \sum_{0}^{\infty} (1-\varepsilon)\varepsilon^n y_n$$

лежить в A, що і потрібно було довести. □

Вправа

Нехай X — сепарабельний банахів простір. Використовуючи властивості кулеподібних множин і вправу 4 п. 6.4.2, довести, що існує неперервний лінійний оператор $T\colon l_1 \to X$, для якого $T\left(B_{l_1}\right) = B_X$. Звідси випливає фактор-універсальність простору l_1: для будь-якого сепарабельного банахового простору X існує такий підпростір $Y \subset l_1$, що фактор l_1/Y ізометричний простору X (див. вправу 7 п. 6.4.2).

Зауваження. Ідея розгляду кулеподібних множин і їх використання в розв'язуванні наведеної вище вправи, так само як і в наведеному нижче доведенні теореми Банаха про відкрите відображення, взято зі статті Т. Банаха, В. Лянце і Я. Микитюка [BLM].

10.1.3. Теорема Банаха про відкрите відображення

Теорема. *Нехай X, Y — банахові простори, $T \in L(X, Y)$ — сюр'єктивний оператор. Тоді T здійснює відкрите відображення.*

Доведення. Введемо до розгляду множину $A = T(B_X)$. Згідно з критерієм відкритості відображення (див. 10.1), достатньо довести, що A містить деяку кулю вигляду rB_Y, $r > 0$. Оскільки A — кулеподібна множина (див. 10.1.2, пп. 3 і 4), то на підставі теореми достатньо довести, що замикання $\bar{A}$ множини A містить кулю вигляду rB_Y. У цьому допоможе теорема Бера. Скористаємось сюр'єктивністю оператора T і запишемо простір Y у вигляді

$$Y = T(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} T(nB_X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} nA.$$

За теоремою Бера, отримуємо, що A не може бути ніде не щільною в Y, тобто $\bar{A}$ містить деяку кулю вигляду $y_0 + rB_Y$. Звідси на підставі опуклості і симетричності множини $\bar{A}$ виводимо, що

$$\bar{A} \supset \frac{1}{2}(\bar{A} - \bar{A}) \supset \frac{1}{2}\left((y_0 + rB_Y) - (y_0 + rB_Y)\right) \supset rB_Y.$$

Теорему доведено. □

10.2. Оборотність оператора й ізоморфізми

10.2.1. Ізоморфізми. Еквівалентні норми

Означення 1. Нехай X, Y — нормовані простори. Оператор $T\colon X \to Y$ називається *ізоморфізмом*, якщо він неперервний, бієктивний і обернений до нього оператор $T^{-1}\colon Y \to X$ також неперервний. Нормовані простори X і Y називаються ізоморфними (позначення: $X \approx Y$), якщо існує ізоморфізм $T\colon X \to Y$ цих просторів.

Частковий випадок ізоморфізму — ізометрія — розглядався вище, в розділі 6. Як випливає з означення, ізоморфізм зберігає всі топологічні структури: він переводить відкриті множини у відкриті, замкнені — в замкнені, збіжні послідовності і напрямленості — у збіжні. Наступна теорема подає ще один приклад структури, що зберігається при ізоморфізмі.

Теорема 1. *Нехай X, Y — ізоморфні нормовані простори й X повний. Тоді Y — теж повний простір.*

Доведення. За умовою, існує ізоморфізм $T\colon X \to Y$. Для доведення повноти простору Y розглянемо довільну послідовність Коші $y_n \in Y$. Покладемо $x_n = T^{-1}y_n$. З огляду на неперервність оператора T^{-1} вектори x_n також утворюють послідовність Коші:

$$\|x_n - x_m\| = \left\|T^{-1}(y_n - y_m)\right\| \leqslant \left\|T^{-1}\right\| \cdot \|y_n - y_m\| \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0.$$

Оскільки X — повний простір, послідовність (x_n) має границю. Позначимо цю границю через x. За неперервністю оператора T,

$$Tx = \lim_{n\to\infty} Tx_n = \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Тобто послідовність y_n має границю. □

Теорема 2. *Нехай X, Y — скінченновимірні нормовані простори і $\dim X = \dim Y$. Тоді $X \approx Y$.*

Доведення. На підставі рівності вимірностей існує бієктивний лінійний оператор $T\colon X \to Y$. Згідно теореми 2 п. 9.2.1, кожний лінійний оператор на скінченновимірному просторі неперервний. Зокрема, неперервні оператори T і T^{-1}, тобто T — ізоморфізм. □

Наслідок 1. *Кожний скінченновимірний нормований простір повний. Кожний скінченновимірний підпростір будь-якого нормованого простору замкнений.*

Доведення. Нехай X — скінченновимірний нормований простір, для якого $\dim X = n$. За попередньою теоремою, простір $\mathbb{R}^n$ (у комплексному випадку — $\mathbb{C}^n$), наділений стандартною нормою $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2}$, ізоморфний простору X. Оскільки $\mathbb{R}^n$ повний у вказаній нормі, теорема 1 дає нам повноту і простору X. Замкненість скінченновимірного підпростору — це частковий випадок загального твердження про замкненість повного підпростору метричного простору. □

На відміну від скінченновимірних, більша частина згадуваних нами нескінченновимірних просторів попарно не ізоморфні. Так, серед всіх просторів $L_p[0,1]$ і l_q при $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$ є тільки дві пари ізоморфних просторів: $L_2[0,1] \approx l_2$ (цей факт буде обґрунтовано в розділі 12) і $L_\infty[0,1] \approx l_\infty$ (доведення цієї нетривіальної теореми А. Пелчиньського наведено, наприклад, у першому томі книги Лінденштраусса і Цафрірі [L-T, с. 111].

Означення 2. Дві норми $\| \ \|_1$ і $\| \ \|_2$ на лінійному просторі X називаються *еквівалентними* (позначення — $\| \ \|_1 \sim \| \ \|_2$), якщо існують такі дві сталі $C_1, C_2 > 0$, що

$$C_1 \|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant C_2 \|x\|_1$$

для всіх $x \in X$.

Теорема 3. *Для норм $\| \ \|_1$ і $\| \ \|_2$ на лінійному просторі X такі умови рівносильні:*

(1) $\| \ \|_1 \sim \| \ \|_2$;

(2) тотожний оператор I на X, що розглядається як оператор, який діє з нормованого простору $(X, \| \ \|_1)$ в нормований простір $(X, \| \ \|_2)$, є ізоморфізмом;

(3) норми $\| \ \|_1$ і $\| \ \|_2$ задають ту саму топологію на X.

Доведення. Для неперервності I як оператора діє з $(X, \| \ \|_1)$ в $(X, \| \ \|_2)$, необхідно і достатньо існування сталої $C_2 > 0$, для якої $\|x\|_2 \leqslant C_2 \|x\|_1$ для всіх $x \in X$. Для неперервності ж оператора I^{-1} необхідно і достатньо існування сталої $C_1 > 0$, для якої $C_1 \|x\|_1 \leqslant \|x\|_2$ при всіх $x \in X$. Цим доведено рівносильність умов (1) і (2). Умова (3) означає, що в $(X, \| \ \|_1)$ і $(X, \| \ \|_2)$ один і той самий набір відкритих множин. Інакше це можна сформулювати так: множина A відкрита в $(X, \| \ \|_1)$ тоді і тільки тоді, коли множина $I(A)$ відкрита в $(X, \| \ \|_2)$. З огляду на бієктивність оператора I це рівносильне до умови (2) одночасної неперервності операторів I і I^{-1}. □

Теорема 4. *Нехай X — скінченновимірний лінійний простір. Тоді всі норми на X еквівалентні.*

Доведення. Оскільки кожний оператор на скінченновимірному просторі неперервний, для будь-яких норм $\| \ \|_1$ і $\| \ \|_2$ на X оператор I з пункту (2) попередньої теореми 3 — ізоморфізм. Отже, $\| \ \|_1 \sim \| \ \|_2$. □

Вправи

1. На будь-якій множині нормованих просторів відношення $\approx$ ізоморфізму — це відношення еквівалентності.

2. Нехай X, Y — нормовані простори. Якщо оператор $T\colon X \to Y$ — ізоморфізм, то і спряжений оператор $T^*\colon Y^* \to X^*$ — ізоморфізм. У неповних просторах обернене твердження невірне (для випадку банахових просторів див. нижче вправу 4 п. 10.2.3)

3. На множині усіх норм, заданих на фіксованому лінійному просторі, відношення «норми еквівалентні» — це відношення еквівалентності.

4. На будь-якому нескінченновимірному лінійному просторі існують нееквівалентні між собою норми.

5. Для кожної пари з перерахованих нижче трьох норм на $\mathbb{R}^n$ довести їх еквівалентність і обчислити найкращі можливі сталі C_1, C_2 з означення еквівалентних норм: $\|x\|_1 = \sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|$, $\|x\|_2 = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^2}$, $\|x\|_\infty = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} |x_k|$.

6. Для кожної пари з наведених нижче трьох норм на $C[0,1]$ довести їх нееквівалентність: $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,dt$, $\|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(t)|^2\,dt\right)^{1/2}$, $\|f\|_\infty = \max\limits_{t\in[0,1]} |f(t)|$.

10.2.2. Теорема Банаха про обернений оператор

Теорема. *Нехай X, Y — банахові простори, $T \in L(X,Y)$ — бієктивний оператор. Тоді оператор T^{-1} неперервний, тобто T — ізоморфізм.*

Доведення. Оскільки T, зокрема, сюр'єктивний, T здійснює відкрите відображення. Як ми вже зазначали, якщо відкритий оператор бієктивний, то T^{-1} — неперервний оператор. □

Теорема про обернений оператор допускає таке корисне переформулювання: нехай X, Y — банахові простори, $T \in L(X,Y)$. Припустимо, що для будь-якої правої частини $b \in Y$ рівняння $Tx = b$ має розв'язок, і цей розв'язок єдиний. Тоді розв'язок неперервно залежить від правої частини. Іншими словами, має місце *стійкість розв'язку* щодо малих збурень правої частини.

Вправи

1. Використовуючи ін'єктивізацію оператора (п. 5.2.2 і вправи 5–6 п. 6.4.2), виведіть теорему про відкрите відображення з теореми про обернений оператор.

2. Нехай на лінійному просторі X задано норми $\|\ \|_1$ і $\|\ \|_2$; $\|\ \|_1 \leqslant \|\ \|_2$ і за кожною з цих двох норм простір X повний. Тоді $\|\ \|_1 \sim \|\ \|_2$.

3. Виберемо у нескінченновимірному банаховому просторі X лінійно незалежну послідовність векторів $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ і виберемо множину $A \subset X$ так, щоб $A \cup \{e_n\}_{n=1}^\infty$ утворювала базис Гамеля простору X. Означимо оператор $T\colon X \to X$ за таким правилом. На елементах множини A покладемо $Tx = x$, на векторах $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ покладемо $Te_n = \frac{1}{n}e_n$, а на решту простору продовжимо оператор за лінійністю. Доведіть, що T — бієктивний лінійний оператор, але не ізоморфізм. Яка з умов теореми про обернений оператор не виконується для T?

4. На будь-якому нескінченновимірному банаховому просторі існує норма, не еквівалентна вихідній, в якій, проте, простір залишається повним.

Вправи, що наводяться нижче, встановлюють, зокрема, істотність умови повноти просторів у теоремі про обернений оператор, а отже, і в теоремі про відкрите відображення.

5. Нехай $\mathcal{P}$ — простір всіх поліномів (як завгодно великого степеня) з дійсними коефіцієнтами, наділений нормою $\|a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n\| = |a_0| + \ldots + |a_n|$. Оператор $T \colon \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ задамо рівністю $T\left(a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n\right) = a_0 + \frac{a_1}{2} t + \ldots + \frac{a_1}{n} t^n$. Доведіть, що T неперервний, а T^{-1} розривний.

6. В умовах вправи 6 п. 10.2.1 перевірте, що $\| \ \|_1 \leqslant \| \ \|_\infty$. Спираючись на нееквівалентність цих норм, покажіть, що в теоремі про обернений оператор не можна обмежитися вимогою повноти тільки простору X, не накладаючи ніяких додаткових обмежень на Y.

7. У нескінченновимірному дійсному банаховому просторі X виберемо базис Гамеля A. Домноживши, при потребі, елементи цього базису на додатні коефіцієнти, можна досягти, щоб виконувалось включення $A \subset B_X$. Візьмемо за одиничну кулю нової норми $\| \ \|_1$ множину $\operatorname{conv}(A \cup (-A))$. Знайдіть явний вираз цієї норми через коефіцієнти розкладу за базисом Гамеля A. Доведіть, що $\| \ \|_1$ мажорує вихідну норму, але в $\| \ \|_1$ простір X неповний. Спираючись на цей приклад, покажіть, що в теоремі про обернений оператор не можна обмежитись вимогою повноти тільки простору Y, не накладаючи ніяких додаткових обмежень на X.

10.2.3. Обмежені знизу оператори. Критерій замкненості образу

Нехай X, Y — нормовані простори. Оператор $T \in L(X, Y)$ називається *обмеженим знизу*, якщо існує така стала $c > 0$, що $\|Tx\| \geqslant c\,\|x\|$ для всіх $x \in X$. Зазначимо відразу, що кожний обмежений знизу оператор ін'єктивний. Справді, якщо $Tx = 0$ для деякого $x \in X$, то нерівність $0 = \|Tx\| \geqslant c\,\|x\|$ означає, що $x = 0$. Приклади ін'єктивних, але не обмежених знизу операторів читач знайде у вправах.

Теорема 1. *Оператор T необмежений знизу тоді і тільки тоді, коли існує послідовність $x_n \in S(X)$, для якої $Tx_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ $(n \to \infty)$.*

Доведення. Якщо оператор обмежений знизу з деякою сталою $c > 0$ і $x_n \in S(X)$, то на підставі нерівності $\|Tx_n\| \geqslant c\,\|x_n\| = c$ образи елементів x_n не можуть прямувати до нуля. Навпаки, якщо оператор необмежений знизу, то, зокрема, він не буде обмеженим знизу з константою $c = 1/n$. Тобто для будь-якого n існує елемент y_n з $\|Ty_n\| < \frac{1}{n}\,\|y_n\|$. Покладемо $x_n = \frac{y_n}{\|y_n\|}$. Це і буде шуканою послідовністю: $x_n \in S(X)$ і $\|Tx_n\| < \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. □

Теорема 2. *Оператор T буде обмеженим знизу тоді і тільки тоді, коли T здійснює ізоморфізм нормованих просторів X і $T(X)$.*

Доведення. Якщо T обмежений знизу, то він ін'єктивний. Отже, як оператор, який діє з X в $T(X)$, T бієктивний. Нехай $c > 0$ — стала з означення обмеженості знизу. Тоді для будь-якого $y \in T(X)$ маємо

$$\left\|T^{-1} y\right\| \leqslant \frac{1}{c} \left\|T\left(T^{-1} y\right)\right\| = \frac{1}{c}\,\|y\|,$$

тобто оператор $T^{-1} \colon T(X) \to X$ неперервний. Навпаки, якщо T — ізоморфізм просторів X і $T(X)$, то існує $T^{-1} \colon T(X) \to X$ і $\|T^{-1}\| < +\infty$. Тоді для будь-якого $x \in X$ маємо

$$\|x\| = \left\|T^{-1}(Tx)\right\| \leqslant \left\|T^{-1}\right\| \|Tx\|,$$

тобто T обмежений знизу зі сталою $c = \frac{1}{\|T^{-1}\|}$. □

На підставі останньої теореми обмежені знизу оператори називають ще *ізоморфними вкладеннями.*

Теорема 3. *Якщо X — банахів простір і оператор $T \in L(X, Y)$ обмежений знизу, то образ оператора замкнений в Y.*

Доведення. За попередньою теоремою, підпростір $T(X)$ ізоморфний простору X. Отже, $T(X)$ повний, а повнота підпростору обумовлює його замкненість. □

У банахових просторах для ін'єктивних операторів справджується й обернена теорема.

Теорема 4. *Якщо X, Y — банахові простори й ін'єктивний оператор $T \in L(X, Y)$ має замкнений образ, то оператор T обмежений знизу.*

Доведення. Оскільки замкнений підпростір повного простору сам повний, $T(X)$ — банахів простір. За теоремою Банаха про обернений оператор, T — ізоморфізм просторів X і $T(X)$. □

Нагадаємо (п. 5.2.2, а також вправи 5, 6 п.6.4.3), що *ін'єктивізацією* оператора $T \in L(X, Y)$ називається оператор $\tilde{T} \colon X/\mathrm{Ker}T \to Y$, який діє на будь-який елемент фактор-простору за правилом $\tilde{T}[x] = Tx$. Оператор $\tilde{T}$ неперервний і $\|\tilde{T}\| = \|T\|$. Оскільки образ ін'єктивізації збігається з образом вихідного оператора, отримуємо таке твердження.

Наслідок. *Нехай X, Y — банахові простори. Оператор $T \in L(X, Y)$ має замкнений образ тоді і тільки тоді, коли його ін'єктивізація — оператор $\tilde{T}$ — обмежена знизу. Іншими словами, образ оператора T незамкнений тоді і тільки тоді, коли існує послідовність $[x_n] \in S(X/\mathrm{Ker}T)$, для якої $Tx_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.*

Скориставшись тим, що $\|[x_n]\| = \mathrm{dist}\,(x_n, \mathrm{Ker}T)$, переформулюємо останнє твердження без використання терміна *фактор-простір.*

Теорема 5. *Нехай X, Y — банахові простори. Оператор $T \in L(X, Y)$ має незамкнений образ тоді і тільки тоді, коли існує послідовність $x_n \in X$ з такими властивостями:*

1. $\mathrm{dist}\,(x_n, \mathrm{Ker}T) = 1$;
2. $\|Tx_n\| \to 0$ $(n \to \infty)$.

Якщо норма класу еквівалентності дорівнює одиниці, то там є представники з нормами, як завгодно близькими до одиниці. Тому можна додати ще одну властивість:

3. $\|x_n\| \to 1$ $(n \to \infty)$.

Вправи

Нехай X, E — банахові простори, $T \in L(X, E)$.

1. Для того, щоб оператор T^* був обмежений знизу зі сталою c, необхідно і достатньо, щоб виконувалось включення $T(B_X) \supset cB_E$.

2. Для того, щоб оператор T був обмежений знизу зі сталою c, необхідно і достатньо, щоб виконувалось включення $T^*(B_{E^*}) \supset cB_{X^*}$.

3. Для того, щоб оператор T^* був сюр'єктивним, необхідно і достатньо, щоб оператор T був обмеженим знизу.

4. Для того, щоб оператор T був сюр'єктивним, необхідно і достатньо, щоб оператор T^* був обмеженим знизу.

5. Для того, щоб оператор T був ізоморфізмом, необхідно і достатньо, щоб оператор T^* був ізоморфізмом.

6. Теорема. Для необоротності оператора $T \in L(X, E)$ необхідно і достатньо, щоб виконувалась одна з таких взаємовиключних можливостей:

– оператор T не ін'єктивний;

– оператор T ін'єктивний, але не обмежений знизу;

– оператор T обмежений знизу, але не сюр'єктивний.

7. Остання з перелічених у попередній вправі можливостей означає, зокрема, неін'єктивність оператора T^*.

8. На прикладі оператора інтегрування: $T\colon C[0,1] \to C[0,1]$, $(Tf)(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau$ переконайтесь, що неперервний лінійний оператор може бути ін'єктивним, але не обмеженим знизу. Зіставте цей приклад із результатом вправи 2 п. 6.4.1.

Нехай $g \in C[0,1]$ — фіксована функція, а оператор $T_g\colon C[0,1] \to C[0,1]$ означається рівністю $T_g(f) = f \cdot g$. Перевірте, що:

9. Оператор T_g неперервний і $\|T_g\| = \|g\|$.

10. Оператор T_g є ін'єктивним тоді і тільки тоді, коли множина $g^{-1}(0)$ не має внутрішніх точок.

11. Оператор T_g є обмеженим знизу тоді і тільки тоді, коли функція g ніде не перетворюється на нуль.

12. Нехай тепер оператор T_g множення на функцію $g \in C[0,1]$ розглядається як оператор з $L_1[0,1]$ в $L_1[0,1]$. Чому дорівнює норма такого оператора? Як в цьому випадку записуються критерії ін'єктивності і обмеженості знизу? критерій замкненості образу? Чи зміняться відповіді для $g \in L_\infty[0,1]$?

10.3. Графік оператора

10.3.1. Теорема про замкнений графік

Нехай X, Y — нормовані простори. Тоді декартів добуток $X \times Y$ є лінійним простором щодо операцій покоординатного додавання і множення на скаляр. Означимо норму на $X \times Y$ формулою $\|(x,y)\| = \|x\| + \|y\|$. Легко бачити, що цей вираз задовольняє аксіоми норми; що збіжність у цій нормі еквівалентна покоординатній збіжності $(x_n, y_n) \to (x,y)$ в $X \times Y$ тоді і тільки тоді, коли $x_n \to x$ в X і $y_n \to y$ в Y; і що для банахових просторів X і Y декартів добуток $X \times Y$ — банахів простір.

Графіком лінійного оператора $T\colon X \to Y$ називається множина $\Gamma(T) = \{(x, Tx) : x \in X\}$. Пропонуємо читачеві самостійно перевірити, що графік лінійного оператора — це лінійний підпростір простору $X \times Y$.

Теорема (теорема про замкнений графік). *Нехай X, Y — банахові простори. Лінійний оператор $T\colon X \to Y$ неперервний тоді і тільки тоді, коли графік цього оператора замкнений в $X \times Y$.*

Зазвичай цю теорему застосовують в такому, більш детальному формулюванні: T неперервний тоді і тільки тоді, коли для будь-якої послідовності $x_n \in X$, якщо $x_n \to x$ в X і $Tx_n \to y$ в Y при $n \to \infty$, то $y = Tx$ (іншими словами, якщо послідовність (x_n, Tx_n) точок графіка прямує до точки $(x,y) \in X \times Y$, то $(x,y) \in \Gamma(T)$).

Доведення. Нехай T неперервний і $x_n \to x$. Тоді $Tx_n \to Tx$. Якщо до того ж $Tx_n \to y$, то $y = Tx$.

Навпаки, нехай $\Gamma(T)$ — замкнений підпростір простору $X \times Y$. Тоді $\Gamma(T)$ — банахів простір. Розглянемо допоміжний оператор $U\colon \Gamma(T) \to X$, який діє за правилом $U(x, Tx) = x$. З огляду на нерівність

$$\|U(x,Tx)\| = \|x\| \leqslant \|x\| + \|Tx\| = \|(x,Tx)\|$$

оператор U неперервний (і $\|U\| \leqslant 1$). Оскільки U бієктивний, то за теоремою про обернений оператор, $\|U^{-1}\|$ скінченна. Відповідно,

$$\|Tx\| \leqslant \|(x, Tx)\| = \left\|U^{-1}x\right\| \leqslant \left\|U^{-1}\right\| \cdot \|x\|,$$

що означає потрібну неперервність оператора T. □

Вправи

1. Перевірте, чи означення декартового добутку нормованих просторів і графіка оператора узгоджується з означеннями, розглянутими у вправах 4–7 п. 1.3.1.
2. Згідно з вправою 6 п. 1.3.1 для нелінійних відображень теорема про замкнений графік, взагалі кажучи, не буде справджуватись. Де в доведенні теореми про замкнений графік використовувалась лінійність оператора T?
3. Наведіть приклад, який показує істотність умови повноти просторів у теоремі про замкнений графік.
4. Простір $l_1 \times l_1$ ізометричний простору l_1.
5. Простір $c_0 \times c_0$ ізоморфний, але не ізометричний простору c_0.
6. Такі норми на $X \times Y$ еквівалентні вихідній: $\|(x,y)\|_\infty = \max\{\|x\|, \|y\|\}$, $\|(x,y)\|_2 = \left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)^{1/2}$.

10.3.2. Доповнювані підпростори

Нехай X — лінійний простір, X_1 і X_2 — підпростори цього простору. Будемо говорити, що X *розкладається у пряму суму підпросторів* X_1 і X_2 (скорочений запис: $X = X_1 \oplus X_2$), якщо для будь-якого елемента $x \in X$ існує **єдине** зображення у вигляді суми $x = x_1 + x_2$ з $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$.

Теорема 1. *Для виконання співвідношення $X = X_1 \oplus X_2$ необхідно і достатньо, щоб одночасно виконувались такі дві умови:*

(1) $X = X_1 + X_2$, тобто для будь-якого $x \in X$ існує зображення у вигляді $x = x_1 + x_2$, з $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$;

(2) $X_1 \cap X_2 = \{0\}$, тобто підпростори мають тривіальний перетин.

Доведення. Доведемо, що умова (2) еквівалентна єдиності зображення вигляду $x = x_1 + x_2$. Нехай дано єдиність. Розглянемо довільний елемент $x \in X_1 \cap X_2$. Запишемо дві рівності $0 = 0 + 0$ і $0 = x + (-x)$. В обидвох рівностях перший доданок лежить в X_1, а другий — в X_2. На підставі єдиності $x = 0$.

Навпаки, нехай $X_1 \cap X_2 = \{0\}$. Припустимо, що для деякого $x \in X$ є два розклади $x = x_1 + x_2$ і $x = \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2$, де $x_1, \tilde{x}_1 \in X_1$, а $x_2, \tilde{x}_2 \in X_2$. Тоді $x_1 - \tilde{x}_1 \in X_1$, і водночас $x_1 - \tilde{x}_1 = \tilde{x}_2 - x_2 \in X_2$. Отже, $x_1 - \tilde{x}_1 \in X_1 \cap X_2 = \{0\}$, тобто $x_1 = \tilde{x}_1$. Аналогічно, $x_2 = \tilde{x}_2$, і єдиність зображення доведено. □

Нагадаємо (п. 6.5.2), що лінійний оператор $P\colon X \to X$ називається проектором на підпростір X_1, якщо $P(X) \subset X_1$ і $Px = x$ для будь-якого $x \in X_1$. Очевидно, якщо P — проектор, то $P(Px) = Px$ для будь-якого $x \in X$, тобто $P^2 = P$.

Теорема 2. *Нехай оператор $P\colon X \to X$ задовольняє рівність $P^2 = P$. Тоді оператор P — це проектор на підпростір $P(X)$; оператор $Q = I - P$ — проектор на підпростір $\mathrm{Ker}P$ і $X = P(X) \oplus \mathrm{Ker}P$.*

Доведення. Нехай $y \in P(X)$ — довільний елемент образу. Тоді y має вигляд Px, $x \in X$, і
$$Py = P(Px) = P^2x = Px = y.$$
Цим доведено, що P — це проектор на $P(X)$. Оскільки для оператора Q співвідношення $Q^2 = Q$ також правильне:
$$(I - P)^2 = I - 2P + P^2 = I - P,$$
то Q — це проектор на $Q(X)$. Покажемо, що $Q(X) = \operatorname{Ker} P$. Справді,
$$x \in \operatorname{Ker} P \Leftrightarrow Px = 0 \Leftrightarrow Qx = x \Leftrightarrow x \in Q(X).$$

Залишилось перевірити рівність $X = P(X) \oplus \operatorname{Ker} P$. По-перше, для будь-якого $x \in X$ маємо зображення $x = Px + Qx$. Оскільки $Px \in P(X)$, $Qx \in \operatorname{Ker} P$, цим доведено співвідношення $X = P(X) + \operatorname{Ker} P$.

З огляду на теорему 1, для завершення доведення залишилось встановити, що $P(X) \cap \operatorname{Ker} P = \{0\}$. Припустимо, що $x \in P(X) \cap \operatorname{Ker} P$. Тоді, з одного боку, $x \in P(X)$, тобто $x = Px$, а з іншого — $x \in \operatorname{Ker} P$, тобто $P\,x = 0$. Отже, $x = 0$. □

Нехай X — лінійний простір, X_1 і X_2 — підпростори цього простору і $X = X_1 \oplus X_2$. Означимо оператор $P\colon X \to X$ за таким правилом. Для будь-якого $x \in X$ спочатку знайдемо розклад $x = x_1 + x_2$, де $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$ (цей розклад за умовою існує і єдиний), а потім покладемо $P(x) = x_1$. Якщо $x = x_1 + x_2$ — розклад вектора x, $y = y_1 + y_2$ — розклад вектора y, то $ax + by = (ax_1 + by_1) + (ax_2 + by_2)$ — розклад вектора $ax + by$. Відповідно,
$$P(ax + by) = ax_1 + by_1 = aPx + bPy,$$
і P — лінійний оператор. Далі, за означенням, $P(X) \subset X_1$, і для будь-якого $x_1 \in X_1$ розклад $x_1 = x_1 + 0$ означає, що $Px_1 = x_1$. Отже, P — проектор на підпростір X_1. Цей проектор називається *проектором на підпростір X_1 паралельно до підпростору X_2*.

Теорема 3. *Нехай X — банахів простір, X_1 і X_2 — замкнені підпростори цього простору і $X = X_1 \oplus X_2$. Тоді проектор P на X_1 паралельно до X_2 — неперервний оператор.*

Доведення. Наведений результат — центральний результат цього параграфа — можна розглядати як типовий приклад застосування теореми про замкнений графік. Нам потрібно довести, що для будь-якої послідовності $x_n \in X$, якщо $x_n \to x$ і $Px_n \to y$ $(n \to \infty)$, то $y = Px$. Запишемо розклад $x_n = x_{n,1} + x_{n,2}$ з $x_{n,1} \in X_1$, $x_{n,2} \in X_2$. За означенням, $Px_n = x_{n,1}$. Отже, $x_{n,1} \to y$ $(n \to \infty)$, і з огляду на замкненість підпростору X_1 маємо $y \in X_1$. Далі,
$$x_{n,2} = x_n - x_{n,1} \xrightarrow[n\to\infty]{} x - y.$$
Знову на підставі замкненості, але тепер вже підпростору X_2, $x - y \in X_2$. Відтак, очевидна рівність $x = y + (x - y)$ дає нам розклад вектора x в суму векторів з X_1 і X_2. Перший з цих доданків є проекцією вектора x на X_1 паралельно до X_2: $y = Px$. □

Замкнений підпростір X_1 банахового простору X називається *доповнюваним підпростором*, якщо існує такий замкнений підпростір $X_2 \subset X$ (який називається доповненням до X_1), що $X = X_1 \oplus X_2$. З огляду на дві попередні теореми підпростір $X_1 \subset X$ доповнюваний тоді і тільки тоді, коли існує проектор $P \in L(X, X)$ з $P(X) = X_1$. Доповнювані підпростори виконують важливу функцію при продовженні операторів (п. 6.5.2). Легко навести приклади доповнюваних підпросторів (див. вправи), але кожен приклад недоповнюваного підпростору потребує істотних зусиль для свого обґрунтування. Класичний приклад недоповнюваного підпростору — це c_0 як підпростір простору l_∞. Інший приклад, який виникає природно в теорії рядів Фур'є, читач знайде у вправах п. 10.4.3.

Вправи

1. За допомогою оператора $U\colon X_1 \times X_2 \to X$, $U(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ зведіть теорему 1 до твердження: лінійний оператор ін'єктивний тоді і тільки тоді, коли його ядро складається тільки з нуля.
2. Нехай банахів простір X розкладається у пряму суму своїх замкнених підпросторів X_1 і X_2. Тоді $X_1 \times X_2 \approx X$.
3. Доведіть, що оператор, спряжений до проектора, є також проектором. Опишіть ядро й образ спряженого проектора за відомими ядром й образом вихідного.
4. Наведіть приклад, який показує істотність повноти простору X у формулюванні теореми 3.
5. Будь-який одновимірний підпростір банахового простору доповнюваний, і відповідний проектор можна вибрати з $\|P\| = 1$.
6. Будь-який скінченновимірний підпростір банахового простору доповнюваний.
7. Будь-який замкнений підпростір скінченної ковимірності доповнюваний.
8. Нехай X_1 — підпростір банахового простору X, X_2 — підпростір простору X_1 і X_2 доповнюваний в X. Тоді X_2 доповнюваний в X_1.
9. Простір l_∞ доповнюваний у будь-якому ширшому банаховому просторі.
10. Загальніший результат: нехай підпростір X_1 банахового простору X ін'єктивний (див. п. 9.3.3). Тоді X_1 доповнюваний в X.
11. Доведіть доповнюваність в $C[-1,1]$ підпростору всіх парних функцій.
12. Доведіть доповнюваність в $C[-1,1]$ підпростору всіх непарних функцій.
13. Доведіть доповнюваність в $C[-1,1]$ підпростору функцій, які дорівнюють 0 на $[-1,0]$.
14. Нехай X_1 — доповнюваний підпростір банахового простору X. Тоді будь-яке доповнення до X_1 ізоморфне фактор-простору X/X_1.

10.4. Принцип рівномірної обмеженості і його застосування

10.4.1. Теорема Банаха-Штейнгауза про поточково обмежені сім'ї операторів

Означення. Нехай X, Y — нормовані простори. Сім'я $G \subset L(X,Y)$ неперервних лінійних операторів називається *поточково обмеженою*, якщо для будь-якого $x \in X$

$$\sup_{T \in G} \|Tx\| < \infty.$$

Сім'я G називається *рівномірно обмеженою*, якщо

$$\sup_{T \in G} \|T\| < \infty.$$

Теорема (принцип рівномірної обмеженості). *Поточково обмежена сім'я неперервних лінійних операторів, які діють з банахового простору X в нормований простір Y, обмежена рівномірно.*

Доведення. Нехай $G \subset L(X,Y)$ — поточково обмежена сім'я. Для будь-якого $x \in X$ введемо позначення $M_x = \sup_{T\in G} \|Tx\|$. Розглянемо множини $A_n = \{x \in X : M_x \leqslant n\}$. Ці множини замкнені і в об'єднанні дають весь простір X. Отже, за теоремою Бера, принаймні одна з множин A_n не є ніде не щільною і, отже, містить деяку кулю. Тобто існують номер $n \in \mathbb{N}$ і така куля вигляду $B_X(x_0, r) = x_0 + rB_X$, що для будь-якого $x \in x_0 + rB_X$ при всіх $T \in G$ виконується нерівність $\|Tx\| \leqslant n$. Тоді для будь-яких $x \in B_X$, $T \in G$ виконується оцінка

$$\|Tx\| = \left\| \frac{1}{r} T(x_0 + rx) - Tx_0 \right\| \leqslant \frac{1}{r} n + n.$$

Взявши в останній нерівності супремум по $x \in B_X$, отримаємо, що $\|T\| \leqslant \frac{1}{r}n + n$ для будь-якого $T \in G$. Цим доведено потрібну рівномірну обмеженість сім'ї G. □

Вправи

1. Доведіть замкненість множин A_n, визначених вище.
2. Де в доведенні використовувалась повнота простору X?
3. Нехай P_1 — простір поліномів з вправи 9 п. 6.4.2, $D_n \colon P_1 \to P_1$ — оператори взяття n-ої похідної. Перевірте, чи оператори nD_n утворюють поточково обмежену, але не рівномірно обмежену послідовність.
4. Наведіть приклад поточково обмеженої, проте не рівномірно обмеженої послідовності неперервних функцій на відрізку [0,1].
5. Виведіть доведений вище принцип рівномірної обмеженості з теореми про замкнений графік за такою схемою. Нехай $G \subset L(X,Y)$ — поточково обмежена сім'я. Розглянемо допоміжний простір $l_\infty(G \times B_{Y^*})$ всіх обмежених функцій на $G \times B_{Y^*}$ з sup-нормою. Означимо оператор $U \colon X \to l_\infty(G \times B_{Y^*})$ формулою $(Ux)(T, y^*) = y^*(Tx)$. У цього оператора замкнений графік, отже, він неперервний. Маємо

$$\sup_{T\in G} \|T\| = \sup_{x\in B_X} \sup_{T\in G} \|T\| = \sup_{x\in B_X} \sup_{T\in G} \sup_{y^*\in B_{Y^*}} |y^*(Tx)| =$$

$$= \sup_{x\in B_X} \|Ux\| = \|U\| < \infty.$$

10.4.2. Поточкова збіжність операторів

Нагадаємо (п. 6.4.3), що послідовність операторів $T_n \in L(X,Y)$ називається поточково збіжною до оператора $T \in L(X,Y)$, якщо для будь-якого $x \in X$ послідовність значень $T_n x$ прямує до Tx при $n \to \infty$. Оскільки поточково збіжна послідовність є водночас поточково обмеженою, наступна теорема безпосередньо випливає з принципу рівномірної обмеженості.

Теорема Банаха-Штейнгауза. *Поточково збіжна послідовність операторів $T_n \in L(X,Y)$, які діють з банахового простору X у нормований простір Y, рівномірно обмежена.*

Нехай X, Y — нормовані простори, A — підмножина X. Послідовність операторів $T_n \in L(X,Y)$ називається *поточково збіжною на* A до оператора $T \in L(X,Y)$, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} T_n x = Tx$ для будь-якого $x \in A$.

Критерій поточкової збіжності. *Якщо рівномірно обмежена послідовність операторів $T_n \in L(X,Y)$ з нормованого простору X у нормований простір Y збігається поточково на щільній підмножині $A \subset X$ до оператора $T \in L(X,Y)$, то $T_n \to T$ $(n \to \infty)$ поточково на всьому X.*

Доведення. Позначимо $M = \sup_n \|T_n - T\|$. Зафіксуємо $x \in X$ і $\varepsilon > 0$. Нехай $a \in A$ наближає x з точністю до $\frac{\varepsilon}{M}$: $\|x - a\| \leqslant \frac{\varepsilon}{M}$. Маємо

$$\varlimsup_{n\to\infty} \|(T_n - T)x\| \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \|(T_n - T)(x-a)\| + \varlimsup_{n\to\infty} \|(T_n - T)a\| =$$

$$= \varlimsup_{n\to\infty} \|(T_n - T)(x-a)\| \leqslant M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

Через довільність ε отримуємо, що

$$\varlimsup_{n\to\infty} \|(T_n - T)x\| = 0,$$

тобто $T_n x \to Tx$ $(n \to \infty)$. □

Вправи

1. Нехай $T_n, T \in L(X,Y)$, $\|T_n - T\| \to 0$ $(n \to \infty)$. Тоді T_n збігається до T поточково.

2. Нехай X, Y — банахові простори, $T_n, T \in L(X,Y)$, $U_n, U \in L(Y,Z)$, T_n збігається поточково до T і U_n збігається поточково до U. Тоді $U_n T_n$ збігається поточково до UT.

3. Виведіть критерій поточкової збіжності, спираючись на вправу 9 п. 1.2.1, за такою схемою: ввести в розгляд простір $l_\infty(\mathbb{N}, Y)$ всіх обмежених послідовностей елементів простору Y з нормою $\|(y_n)_{n=1}^\infty\| = \sup\limits_n \|y_n\|$. Розгляньте підпростір $c_0(\mathbb{N}, Y) \subset l_\infty(\mathbb{N}, Y)$ послідовностей, які прямують до нуля, і доведіть його замкненість. Означте оператор $U\colon X \to l_\infty(\mathbb{N}, Y)$ формулою $Ux = (T_1 x, T_2 x, \dots)$. Якщо (T_n) збігається на щільній підмножині A до 0, то $U(A) \subset c_0(\mathbb{N}, Y)$. Якщо, крім того, (T_n) — обмежена послідовність операторів, то оператор U неперервний. Отже, $U(X) \subset c_0(\mathbb{N}, Y)$, тобто послідовність (T_n) збігається поточково до 0 на всьому X.

4. Нехай X, Y — метричні простори, A — щільна підмножина в X, $f_n, f\colon X \to Y$ — функції, що задовольняють умову Ліпшиця зі спільною сталою C. Тоді з поточкової збіжності на A послідовності (f_n) до f випливає поточкова збіжність на всьому X.

5. Нехай X, Y — банахові простори, A — щільна підмножина в X. Для того, щоб послідовність операторів $T_n \in L(X,Y)$ поточково збігалась на X і її границя була неперервним оператором, необхідно і достатньо, щоб одночасно виконувались такі умови:

(1) послідовність (T_n) обмежена;

(2) для будь-якого $x \in A$ послідовність значень $(T_n x)$ фундаментальна.

6. Наведіть приклад поточково обмеженої послідовності неперервних функцій на відрізку [0,1], збіжної до нуля на щільній підмножині, але не збіжної до нуля на всьому відрізку.

7. Нехай послідовність операторів $T_n \in L(X,Y)$ збігається поточково на підмножині $A \subset X$ до оператора $T \in L(X,Y)$. Тоді T_n збігається до T на $\operatorname{Lin} A$.

Зауваження. З огляду на останню вправу, вимога щільності, що накладається на множину A у доведеному вище критерії поточкової збіжності, може бути послабленою: достатньо, щоб $\operatorname{Lin} A$ була щільною множиною.

8. Для того, щоб послідовність операторів $T_n \in L(l_1, Y)$ збігалась поточково до оператора $T \in L(l_1, Y)$, необхідно і достатньо, щоб одночасно виконувались дві умови: $\sup_{n,m} \|T_n e_m\| < \infty$ і $\forall m \in \mathbb{N}$ $T_n e_m \xrightarrow[n\to\infty]{} Te_m$. (термінологію див. у вправі 6 п. 6.3.3. Також див. вправу 4 п. 6.4.2).

9. Розглянемо функціонали $f_n \in l_1^*$, які діють за правилом $f_n(a_1, a_2, \dots) = a_n$. Доведіть, що послідовність (f_n) прямує поточково до нуля, але $\|f_n\| = 1$, і, отже, за нормою ця послідовність до нуля не прямує.

10.4.3. Дві теореми про ряди Фур'є на відрізку

Теорема 1. *Нехай* (g_n) — *рівномірно обмежена на* $[a,b]$ *послідовність вимірних функцій, яка задовольняє таку умову:* $\int_\Delta g_n(t)dt \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ *для будь-якого відрізка* $\Delta \subset [a,b]$. *Тоді*

$$\int_{[a,b]} f(t)g_n(t)dt \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

для будь-якої функції $f \in L_1[a,b]$.

Доведення. Нехай $M = \sup_{n,t} |g_n(t)| < \infty$. Задамо лінійні функціонали F_n на $L_1[a,b]$ за правилом $F_n(f) = \int_{[a,b]} f(t)g_n(t)dt$. Згідно з нерівністю

$$|F_n(f)| \leqslant M \int_{[a,b]} |f(t)|\,dt = M\,\|f\|$$

функціонали F_n неперервні і $\|F_n\| \leqslant M$. За умовою, функціонали F_n збігаються до 0 на будь-якій функції вигляду $\mathbb{1}_\Delta$. Отже, послідовність (F_n) збігається до 0 і на будь-якій кусково-сталій функції. Оскільки множина кусково-сталих функцій щільна в $L_1[a,b]$ (див. нижче вправу 1 п. 10.4.3), для завершення доведення залишається застосувати критерій поточкової збіжності, доведений у п. 10.4.2. $\square$

Для функції $f \in L_1[-\pi,\pi]$ означимо *коефіцієнти Фур'є* $\hat{f}_n$, $n \in \mathbb{Z}$ формулою $\hat{f}_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{int}dt$.

Наслідок 1. *Для будь-якої інтегровної функції* f *на* $[a,b]$ *інтеграли вигляду* $\int_a^b f(t)e^{i\alpha t}dt$, $\int_a^b f(t)\sin\alpha t\,dt$ *або* $\int_a^b f(t)\cos\alpha t\,dt$ *прямують до нуля при* $\alpha \to \pm\infty$. *Зокрема, прямують до нуля коефіцієнти Фур'є будь-якої функції* $f \in L_1[-\pi,\pi]$.

Доведення. Застосувати попередню теорему на відрізку $[a,b]$ до функцій $g_n(t) = e^{i\alpha_n t}$, $g_n(t) = \sin\alpha_n t$ або $g_n(t) = \cos\alpha_n t$ з дійсними $\alpha_n \to \infty$ $(n \to \infty)$. Умова $\int_\Delta g_n(t)dt \to 0$ $(n \to \infty)$ для будь-якого відрізка $\Delta = [c,d]$ перевіряється за допомогою прямого обчислення відповідного інтеграла. $\square$

Позначимо через $C(\mathbb{T})$ підпростір простору $C[-\pi,\pi]$, який складається з функцій g, що задовольняють умову $g(-\pi) = g(\pi)$. Кожну функцію $f \in C(\mathbb{T})$ можна продовжити з відрізка $[-\pi,\pi]$ на всю вісь як 2π-періодичну неперервну функцію. Відповідно, елементи простору $C(\mathbb{T})$ будемо вважати неперервними 2π-періодичними функціями, визначеними на всій осі. Через S_nf позначимо частинну суму ряду Фур'є:

$$(S_nf)(t) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}_k e^{ikt}.$$

Для повноти викладу нагадаємо формулу, напевно відому читачеві з курсу аналізу:

$$(S_nf)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+\tau)\frac{\sin(n+1/2)\tau}{\sin\frac{1}{2}\tau}d\tau. \tag{1}$$

Щоб вивести це співвідношення, підставимо в означення частинних сум S_ng формулу для коефіцієнтів Фур'є:

$$(S_nf)(t) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}_k e^{ikt} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sum_{k=-n}^{n} e^{ik(t-x)}dx.$$

Провівши заміну змінних $\tau = x - t$ і скориставшись тим, що інтеграл від 2π-періодичної функції на будь-якому відрізку довжини 2π збігається з інтегралом по $[-\pi, \pi]$, отримуємо:

$$(S_n f)(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t+\tau)\sum_{k=-n}^{n} e^{ik\tau}d\tau = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t+\tau)\frac{e^{-in\tau} - e^{i(n+1)\tau}}{1 - e^{i\tau}}d\tau.$$

Для одержання формули (1) залишається поділити чисельник і знаменник підінтегрального виразу на $e^{i\tau/2}$ і скористатись формулою $e^{ix} - e^{-ix} = 2i\sin x$.

Як відомо з курсу аналізу, ряд Фур'є $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\hat{f}_n e^{int}$ неперервно диференційовної функції f рівномірно збігається до цієї функції. Водночас, якщо відмовитись від умови диференційовності, таке твердження буде неправильним. Більше того, існують неперервні функції, для яких ряд Фур'є не збігається поточково. Наступна теорема показує, як можна довести існування подібних прикладів, не конструюючи їх явним способом. Таке міркування є особливо корисним, коли явна побудова і обґрунтування прикладу поєднані зі значними труднощами.

Теорема 2. *Існує функція $g \in C(\mathbb{T})$, для якої значення $(S_n g)(0)$ частинних сум ряду Фур'є в нулі утворюють необмежену послідовність.*

Доведення. Задамо лінійні функціонали G_n на $C(\mathbb{T})$ за правилом $G_n(g) = (S_n g)(0)$. Нам потрібно довести, що G_n не утворюють поточково обмеженої послідовності функціоналів. На підставі принципу рівномірної обмеженості для цього достатньо встановити, що функціонали G_n неперервні, але їх норми необмежені в сукупності. З (1) маємо

$$G_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin(n+1/2)t}{\sin\frac{1}{2}t}dt.$$

Відповідно (див. вправу 2 п. 10.4.3),

$$\|G_n\| = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\sin(n+1/2)t}{\sin\frac{1}{2}t}\right|dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\left|\frac{\sin(n+1/2)t}{\sin\frac{1}{2}t}\right|dt < \infty,$$

тобто функціонали G_n неперервні. Оцінимо їх норми знизу:

$$\|G_n\| \geqslant \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\left|\frac{\sin(n+1/2)t}{t}\right|dt \geqslant \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\int\limits_{\frac{\pi k}{n+1/2}}^{\frac{\pi(k+1)}{n+1/2}}\left|\frac{\sin(n+1/2)t}{t}\right|dt \geqslant$$

$$\geqslant \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n+1/2}{\pi(k+1)}\int\limits_{\frac{\pi k}{n+1/2}}^{\frac{\pi(k+1)}{n+1/2}}|\sin(n+1/2)t|\,dt = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\pi(k+1)}\int\limits_{\pi k}^{\pi(k+1)}|\sin\tau|\,d\tau =$$

$$= \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(k+1)} \geqslant \frac{4}{\pi^2}\int\limits_{2}^{n+1}\frac{dx}{x} = \frac{4}{\pi^2}\ln\frac{n+1}{2}.$$

Отже, $\|G_n\| \geqslant \frac{4}{\pi^2}\ln\frac{n+1}{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty.$ □

Вправи

1. Доведіть щільність множини кусково-сталих функцій в $L_1[-\pi,\pi]$, використовуючи таку схему міркувань: по-перше, $C[-\pi,\pi]$ щільний в $L_1[-\pi,\pi]$ (цей факт нам вже відомий навіть у загальнішій ситуації — див. теорему 1 п. 8.3.3). Далі, кожну неперервну функцію можна наблизити в метриці $L_1[-\pi,\pi]$ (і навіть рівномірно) кусково-сталими функціями.

2. За функцією $v \in L_1[-\pi,\pi]$ задамо лінійний функціонал V на $C(\mathbb{T})$ формулою $V(g) = \int_{-\pi}^{\pi} g(t)v(t)dt$. Спираючись на теорему про загальний вигляд лінійного функціонала в $C(K)$, доведіть, що $\|V\| = \int_{-\pi}^{\pi} |v(t)|\, dt$.

3. Нехай функція f інтегровна за Лебегом на відрізку $[-\pi,\pi]$ і задовольняє *умову Діні* в точці $x_0 \in [-\pi,\pi]$: $\frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t} \in L_1[-\pi,\pi]$. Тоді ряд Фур'є функції f збігається в точці x_0 до $f(x_0)$.

Розв'язавши наступний ланцюжок вправ, читач, зокрема, зможе обґрунтувати недоповнюваність в $C(\mathbb{T})$ підпростору $A(\mathbb{T})$, утвореного замиканням в $C(\mathbb{T})$ лінійної оболонки послідовності функцій $\left\{ e^{ikt}\right\}_{k=0}^{+\infty}$.

4. Розглянемо частинну суму ряду Фур'є S_n як оператор з $C(\mathbb{T})$ в $C(\mathbb{T})$:

$$(S_n g)(t) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}_k e^{ikt}.$$

Доведіть, що S_n — це проектор на підпростір $E_n = \operatorname{Lin}\left\{e^{ikt}\right\}_{k=-n}^{n}$. Доведіть, що $\|S_n\|$ збігається з нормою функціонала G_n з доведення теореми 2 і, отже, $\|S_n\| \geqslant \frac{4}{\pi^2}\ln\frac{n+1}{2}$.

5. Через U_τ позначимо оператор зсуву на τ в $C(\mathbb{T}) : (U_\tau f)(t) = f(t+\tau)$. Перевірте, що U_τ бієктивно відображає $C(\mathbb{T})$ в $C(\mathbb{T})$ і $\|U_\tau f\| = \|f\|$ для будь-якого $f \in C(\mathbb{T})$.

Нехай $P \in L(C(\mathbb{T}), C(\mathbb{T}))$ — деякий проектор на $A(\mathbb{T})$. Для будь-якого $f \in C(\mathbb{T})$ розглянемо функцію

$$(\tilde{P}f)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (U_\tau P U_{-\tau} f)(t)d\tau.$$

Доведіть, що так введене «усереднення за зсувами» оператора P має такі властивості:

6. $\tilde{P}f \in C(\mathbb{T})$ для будь-якого $f \in C(\mathbb{T})$.

7. $\tilde{P} \in L(C(\mathbb{T}), C(\mathbb{T}))$ і $\left\|\tilde{P}\right\| \leqslant \|P\|$.

8. $\tilde{P}$ — проектор на $A(\mathbb{T})$.

9. Оператор $\tilde{P}$ комутує зі зсувами: $\tilde{P}U_\tau = U_\tau\tilde{P}$ для будь-якого τ. Зокрема, якщо ввести позначення $g_k = \tilde{P}(e^{ikt})$, то $g_k(t+\tau) = g_k(t)e^{ik\tau}$. При $t = 0$ маємо $g_k(\tau) = g_k(0)e^{ik\tau}$.

10. З вправи 8 і останньої рівності випливає, що $\tilde{P}(e^{ikt}) = e^{ikt}$ при $k \geqslant 0$ і $\tilde{P}(e^{ikt}) = 0$ при $k < 0$.

11. Нехай $f \in C(\mathbb{T})$, $g = \tilde{P}f$. Тоді $\hat{g}_k = \hat{f}_k$ при $k \geqslant 0$, а при $k < 0$ $\hat{g}_k = 0$.

12. Оператор $\tilde{P}$ пов'язаний з оператором S_n частинної суми ряду Фур'є тотожністю

$$S_n(f) = e^{i(n+1)t}(I - \tilde{P})(e^{-i(2n+1)t}\tilde{P}(e^{int}f)).$$

Отже, $\|I - \tilde{P}\| \cdot \|\tilde{P}\| \geqslant \|S_n\|$.

13. З огляду на довільність n у попередній вправі і вправі 4, оператор $\tilde{P}$ розривний. Це суперечить вправі 7. Цим доведено, що не існує проектора з $C(\mathbb{T})$ на $A(\mathbb{T})$, тобто $A(\mathbb{T})$ — недоповнюваний в $C(\mathbb{T})$ підпростір.

14. Нехай $P_n \in L(C(\mathbb{T}), C(\mathbb{T}))$ — деякий проектор на $E_n = \operatorname{Lin}\left\{ e^{ikt}\right\}_{k=-n}^{n}$. Знову розглянувши усереднення за зсувами — проектор

$$(\tilde{P}_n f)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (U_\tau P_n U_{-\tau} f)(t)d\tau,$$

доведіть, що $\|P_n\| \geqslant \frac{4}{\pi^2} \ln \frac{n+1}{2}$. Тобто така оцінка виконується для будь-якого проектора на E_n, а не тільки для оператора частинної суми ряду Фур'є.

15. Зафіксуємо для кожного $n \in \mathbb{N}$ довільний набір $K_n \subset [-\pi, \pi)$ з $2n+1$ точки відрізка. Для будь-якої функції $f \in C(\mathbb{T})$ позначимо через $T_n f$ інтерполяційний тригонометричний поліном цієї функції: $T_n f \in \operatorname{Lin}\left\{e^{ikt}\right\}_{k=-n}^{n}$, і $(T_n f)(t) = f(t)$ в кожній точці $t \in K_n$. Доведіть, спираючись на попередню вправу і теорему Банаха-Штейнгауза, що існує функція $f \in C(\mathbb{T})$, для якої послідовність $T_n f$ її інтерполяцій не прямує до самої функції f.

10.5. Поняття про базис Шаудера[1]

10.5.1. Означення і найпростіші властивості

Читачеві вже відоме одне узагальнення на нескінченновимірний випадок поняття базису. Це — базис Гамеля, існування якого було доведено в п. 5.1.3. Хоча базис Гамеля й існує в будь-якому лінійному просторі, для банахових просторів він виявляється не дуже зручним у застосуванні. По-перше, базис Гамеля нескінченновимірного банахового простору незліченний (вправа 4 п. 6.3.3). Далі, не дивлячись на теорему існування, в жодному конкретному нескінченновимірному банаховому просторі не відомо жодного прикладу базису Гамеля. Нарешті, базис Гамеля ніяк не пов'язаний з топологічною структурою простору. Скажімо, якщо послідовність елементів банахового простору прямує до деякої границі, коефіцієнти розкладу за базисом Гамеля можуть і не прямувати до коефіцієнтів граничного елемента. Тому основним в теорії банахових просторів поняттям базису є не базис Гамеля, а базис Шаудера, до вивчення якого ми зараз переходимо.

Означення. Послідовність $\{e_n\}_1^\infty$ елементів банахового простору X називається *базисом* (або, що те саме, *базисом Шаудера*) в X, якщо для будь-якого елемента $x \in X$ існує єдина послідовність коефіцієнтів $\{a_n\}_1^\infty$, для яких ряд $\sum_{n=1}^\infty a_n e_n$ збігається до x. Ряд $\sum_{n=1}^\infty a_n e_n$ називається *розкладом елемента x за базисом* $\{e_n\}_1^\infty$, а числа $\{a_n\}_1^\infty$ називаються *коефіцієнтами* розкладу. Прикладом базису може бути ортонормований базис гільбертового простору. Цей приклад буде детально вивчений в п. 12.3.3. Інший приклад — канонічний базис простору l_1 — ми вже розглядали у вправі 6 п. 6.3.3. Нижче, в розділі 14, ми покажемо, що тригонометрична система утворює базис в L_p на відрізку при $1 < p < \infty$. Численні приклади базисів у всіх класичних сепарабельних банахових просторах, різні класи базисів і їх узагальнення читач знайде у фундаментальному двотомнику Зінгера [Sin1], [Sin2]. Сучасний огляд різних класів базисів у просторах функцій подано Фігелем і Войтащиком у розділі 14 збірника [HAND].

Вправи

1. Елементи базису лінійно незалежні між собою. Зокрема, елемент базису не може дорівнювати нулю.

2. Базис $\{e_n\}_1^\infty$ банахового простору X — це повна в X множина: $\overline{\operatorname{Lin}}\,\{e_n\}_1^\infty = X$.

3. Використовуючи властивості рядів Тейлора доведіть, що послідовність $1, t, t^2, t^3, \ldots$ не утворює базису в просторі $C[0,1]$. Цим буде доведено, що на відміну від скінчен-

[1] J. Schauder. Цьому представникові Львівської математичної школи і учню Банаха ми зобов'язані багатьма плідними ідеями. Шаудер першим використав теорему Бера для доведення теореми про відкрите відображення; йому також належить теорема про компактність спряженого оператора (теорема 3 п. 11.3.2), яка лежить в основі теорії компактних операторів. Важко переоцінити значення принципу нерухомої точки (п. 15.1.4). Отож почувши це ім'я, читач повинен бути готовим до сприйняття чогось цінного для своєї математичної освіти.

новимірного випадку повнота і лінійна незалежність не утворюють разом достатньої умови базисності.

4. Якщо банахів простір X має базис Шаудера, то X нескінченновимірний і сепарабельний.

Нехай X — один з просторів послідовностей l_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ або c_0. *Канонічним базисом* простору X називається така система векторів $\{e_n\}_1^\infty$: $e_1 = (1, 0, 0, \ ...)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ ...)$, ... Доведіть, що:

5. Канонічний базис простору c_0 — це базис.

6. Канонічний базис простору l_∞ не буде базисом цього простору.

7. При $1 \leqslant p < \infty$ канонічний базис простору l_p — це базис.

8. Простір l_∞ несепарабельний, отже, там немає жодного базису Шаудера.

Вельми непростою виявилась поставлена ще С. Банахом проблема: чи кожен сепарабельний нескінченновимірний банахів простір має базис? Негативну відповідь на це запитання дав у 1973 році П. Енфло [Enf] (див. також [L-T, параграф 2.d]).

10.5.2. Координатні функціонали й оператори частинних сум

Означення. Нехай $\{e_n\}_1^\infty$ — базис банахового простору X, $x \in X$. Позначимо через $e_n^*(x)$ коефіцієнти розкладу елемента x за базисом $\{e_n\}_1^\infty$, а через $S_n(x)$ — частинні суми цього розкладу: $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} e_k^*(x)\ e_k$.

Твердження. *e_n^* — лінійні функціонали на X, а S_n — лінійні оператори, які діють з X в X.*

Доведення. Нехай $x, y \in X$, a, b — довільні скаляри. Тоді маємо такі розклади:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} e_k^*(x)\ e_k, \quad y = \sum_{k=1}^{\infty} e_k^*(y)\ e_k, \quad ax + by = \sum_{k=1}^{\infty} e_k^*(ax+by)\ e_k.$$

Отже,

$$\sum_{k=1}^{\infty} (ae_k^*(x) + be_k^*(y))\ e_k = \sum_{k=1}^{\infty} e_k^*(ax+by)\ e_k.$$

З огляду на єдиність розкладу елемента за базисом отримуємо, що $ae_k^*(x) + be_k^*(y) = e_k^*(ax+by)$. □

Надалі функціонали e_n^* ми називатимемо *координатними функціоналами*, а оператори S_n — *операторами частинних сум* за базисом $\{e_n\}_1^\infty$.

Теорема (С. Банах). *Нехай $\{e_n\}_1^\infty$ — базис банахового простору X. Тоді оператори S_n частинних сум неперервні і*

$$\sup_n \|S_n\| = C < \infty.$$

Доведення. Введемо в розгляд допоміжний простір E всіх числових послідовностей $a = (a_n)_1^\infty$, для яких ряд $\sum_{n=1}^\infty a_n e_n$ збігається. Наділимо простір E нормою

$$\|a\| = \sup\left\{\left\|\sum_{n=1}^{N} a_n e_n\right\| : \ N = 1, 2, \ ...\right\}.$$

Як зазначено в п. 6.3.3, вправа 1, E — банахів простір. Означимо оператор $T\colon E \to X$ рівністю $Ta = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$. Оператор T бієктивний, оскільки $\{e_n\}_1^{\infty}$ — базис. З очевидної нерівності $\|Ta\| \leqslant \|a\|$ випливає неперервність оператора. Отже, за теоремою Банаха про обернений оператор, оператор T^{-1} також неперервний. Це означає існування такої сталої C, що $\|a\| \leqslant C\|Ta\|$ для будь-якого $a \in E$. Іншими словами, для будь-якого $a \in E$

$$\sup\left\{\left\|\sum_{n=1}^{N} a_n e_n\right\| :\ N = 1, 2,\ ...\right\} \leqslant C\left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n\right\|.$$

Остання нерівність забезпечує потрібні неперервність і обмеженість в сукупності операторів частинних сум. □

Наслідок. *Нехай $\{e_n\}_1^{\infty}$ — базис банахового простору X. Тоді координатні функціонали e_n^* неперервні і*

$$\sup_n \{\|e_n\| \cdot \|e_n^*\|\} < \infty.$$

Доведення. Достатньо скористатись оцінкою

$$\|e_n^*(x)e_n\| = \|(S_n - S_{n-1})(x)\| \leqslant (\|S_n\| + \|S_{n-1}\|)\,\|x\| \leqslant 2C\,\|x\|\,,$$

де C — стала з попередньої теореми. □

10.5.3. Лінійні функціонали у просторі з базисом

Нехай X — банахів простір з базисом $\{e_n\}_1^{\infty}$. Тоді будь-який лінійний функціонал $f \in X^*$ однозначно визначається своїми значеннями на елементах базису. Іншими словами, кожен функціонал f можна ототожнити з числовою послідовністю $(f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n), ...)$, а простір X^* — із множинами всіх таких числових послідовностей. Більш строго цей факт сформульовано в теоремі, доведення якої, через його простоту, залишаємо читачеві.

Теорема 1. *Для будь-якого $f \in X^*$ введемо позначення $Uf = (f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n), ...)$. Позначимо через $\tilde{X}$ множину всіх числових послідовностей вигляду Uf, $f \in X^*$. Тоді $\tilde{X}$ — лінійний простір щодо покоординатних операцій, а U — бієктивне лінійне відображення простору X^* на простір $\tilde{X}$. Далі, нехай $f \in X^*$, $Uf = (f_1, f_2, ..., f_n, ...)$. Тоді для будь-якого $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \in X$ дію функціонала f на елемент x можна обчислити за правилом $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n f_n$.*

Теорема 2. *Нехай $(f_1, f_2, ..., f_n, ...)$ — послідовність чисел. Введемо позначення*

$$\|(f_1, f_2, ..., f_n, ...)\|_{\tilde{X}} = \sup\left\{\left|\sum_{n=1}^{N} a_n f_n\right| : N \in \mathbb{N},\ \left\|\sum_{n=1}^{N} a_n e_n\right\| \leqslant 1\right\}.$$

Для того, щоб послідовність чисел $(f_1, f_2, ..., f_n, ...)$ належала до простору $\tilde{X}$, необхідно і досить, щоб величина $\|(f_1, f_2, ..., f_n, ...)\|_{\tilde{X}}$ була скінченною. При цьому якщо $f \in X^*$ — функціонал, що породжує послідовність $(f_1, f_2, ..., f_n, ...)$, то $\|f\| = \|(f_1, f_2, ..., f_n, ...)\|_{\tilde{X}}$.

Доведення. Підпростір (незамкнений) $Y = \operatorname{Lin}\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ щільний в X. Зрозуміло, що умова $\|(f_1, f_2, ..., f_n, ...)\|_{\tilde{X}} < \infty$ еквівалентна до такої: лінійний функціонал f, заданий на Y рівністю

$$f\left(\sum_{n=1}^{N} a_n e_n\right) = \sum_{n=1}^{N} a_n f_n, \tag{2}$$

неперервний. При цьому норма цього функціонала збігається з нормою $\|(f_1, f_2, ..., f_n, ...)\|_{\tilde{X}}$. Оскільки будь-який неперервний лінійний функціонал, заданий на Y, продовжується за неперервністю (п. 6.5.1) єдиним способом на весь X, то це еквівалентно існуванню функціонала $f \in X^*$, який діє на лінійні комбінації векторів базису за правилом (2). Оскільки при цьому $Uf = (f_1, f_2, ..., f_n, ...)$, остання умова еквівалентна тому, що $(f_1, f_2, ..., f_n, ...) \in \tilde{X}$. Нарешті, рівність $\|f\| = \|(f_1, f_2, ..., f_n, ...)\|_{\tilde{X}}$ означає просто, що норма обмеження функціонала $f \in X^*$ на щільний підпростір Y — величина $\|(f_1, f_2, ..., f_n, ...)\|_{\tilde{X}}$ — збігається з $\|f\|$. □

У наведених нижче прикладах і вправах простір $\tilde{X}$ ми розглядатимемо як нормований простір, наділений нормою з теореми 2. Теорема 2 означає, зокрема, що нормовані простори X^* і $\tilde{X}$ ізоморфні, і оператор U здійснює цей ізоморфізм (і навіть ізометрію).

Приклад 1. Розглянемо $X = c_0$ з канонічним базисом $\{e_n\}_1^\infty$: $e_1 = (1, 0, 0, \ ...)$, $e_2 = (0,\ 1,\ 0,\ ...)$, ... Тоді $\|(f_1, f_2, ..., f_n, ...)\|_{\tilde{X}} = \sum_{n=1}^\infty |f_n|$, і, отже, простір $\tilde{X}$ збігається з l_1. Справді, умова $\left\|\sum_{n=1}^N a_n e_n\right\| \leqslant 1$ в цьому випадку означає просто, що всі a_n за модулем не перевищують 1. За такої умови найбільше можливе значення величини $\left|\sum_{n=1}^N a_n f_n\right|$ — це $\sum_{n=1}^N |f_n|$ (це значення досягається при $a_n = \mathrm{sign} f_n$). Маємо

$$\|(f_1, f_2, ..., f_n, ...)\|_{\tilde{X}} = \sup\left\{\left|\sum_{n=1}^N a_n f_n\right| : N \in \mathbb{N}, \ \left\|\sum_{n=1}^N a_n e_n\right\| \leqslant 1\right\} =$$

$$= \sup\left\{\sum_{n=1}^N |f_n| : N \in \mathbb{N}\right\} = \sum_{n=1}^\infty |f_n|.$$

Враховуючи те, що за теоремою 2, простір $\tilde{X}$ можна ототожнити зі спряженим простором, останній приклад скорочено записують у вигляді рівності $(c_0)^* = l_1$. Детально цей запис розшифровується як теорема про загальний вигляд лінійного функціонала в c_0: кожен елемент $(f_1, f_2, ...)$ простору l_1 породжує неперервний лінійний функціонал $f(x) = \sum_{n=1}^\infty x_n f_n$ на c_0, і норма функціонала f збігається з нормою елемента $(f_1, f_2, ...)$ в l_1. Навпаки, кожен функціонал $f \in (c_0)^*$ породжується деяким елементом $(f_1, f_2, ...)$ простору l_1 за описаним вище правилом, причому елемент $(f_1, f_2, ...)$ визначається за функціоналом f однозначно.

Приклад 2. Нехай $X = l_1$ з канонічним базисом $\{e_n\}_1^\infty$. Тоді

$$\|(f_1, f_2, ..., f_n, ...)\|_{\tilde{X}} = \sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n|\,,$$

і, отже, простір $\tilde{X}$ збігається з l_∞. Іншими словами, $(l_1)^* = l_\infty$. Справді, в цьому випадку, якщо $\left\|\sum_{n=1}^N a_n e_n\right\| \leqslant 1$, то $\sum_{n=1}^N |a_n| \leqslant 1$, і $\left|\sum_{n=1}^N a_n f_n\right| \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n|$. Відповідно, $\|(f_1, f_2, ..., f_n, ...)\|_{\tilde{X}} \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n|$. З іншого боку, підставивши в означення норми на просторі $\tilde{X}$ замість лінійної комбінації $\sum\limits_{n=1}^N a_n e_n$ один базисний вектор e_n, одержимо оцінку $\|(f_1, f_2, ...)\|_{\tilde{X}} \geqslant |f_n|$. Перейшовши до супремума за n, отримуємо нерівність $\|(f_1, f_2, ..., f_n, ...)\|_{\tilde{X}} \geqslant \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |f_n|$.

Вправи

1. Розшифруйте рівність $(l_1)^* = l_\infty$ з прикладу 2 у вигляді теореми про загальний вигляд лінійного функціонала в l_1.

2. Спираючись на повноту спряженого простору (п. 6.4.4) і теорему 2, доведіть повноту просторів l_1 і l_∞.

3. Нехай $1 < p < \infty$, p' — *спряжений показник*: $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Використовуючи *нерівність Гельдера* для скінченних сум

$$\left|\sum_{n=1}^{N} a_n f_n\right| \leqslant \left(\sum_{n=1}^{N} |a_n|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{n=1}^{N} |f_n|^{p'}\right)^{1/p},$$

виведіть теорему про загальний вигляд лінійного функціонала в l_p, $1 < p < \infty$: $(l_p)^* = l_{p'}$. Доведіть повноту просторів l_p при $1 < p < \infty$.

4. Як ми вже зазначали у вправі 6 п. 10.5.1, канонічний базис простору l_∞ не буде базисом цього простору. Відповідно, для l_∞ ми не можемо користуватись описом функціоналів у просторі з базисом. Доведіть, що існує функціонал $f \in (l_\infty)^*$, який не можна зобразити у вигляді $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n f_n$ «скалярного множення» на фіксовану числову послідовність.

Коментарі до вправ

10.4.2

Вправа 2. За теоремою Банаха-Штейнгауза, $\sup_n \|U_n\| = M < \infty$. Для будь-якого $x \in X$ маємо

$$\begin{aligned} \|(U_n T_n - UT)x\| &\leqslant \|U_n(T_n - T)x\| + \|(U_n - U)Tx\| \leqslant \\ &\leqslant M \|(T_n - T)x\| + \|(U_n - U)Tx\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \end{aligned}$$

10.4.3

Вправа 3. Позначимо $f(x_0) = a$. Маємо

$$(S_n f)(x_0) - a = (S_n(f - a))(x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x_0 + t) - a) \frac{\sin(n + 1/2)t}{\sin \frac{1}{2} t} dt.$$

Застосувавши теорему 1 п. 10.4.3 до $g_n(t) = \sin(n + 1/2)t$, отримуємо потрібну умову $(S_n f)(x_0) \to a$. Інше оформлення цього міркування див. п. 14.2.1

Вправи 6–11. Конструкція усереднення за зсувами, яку ми аналізуємо, у загальнішому вигляді описана в підручнику В. Рудіна [Rud, глава 5, пп. 5.15–5.19]. Рудіну також належить ідея використання цієї конструкції для доведення недоповнюваності $A(\mathbb{T})$ в $C(\mathbb{T})$.

10.5.3

Вправа 4. З теореми 3 п. 9.2.2, застосованої до $X = l_\infty$, $Y = c_0$ випливає, що існує ненульовий функціонал $f \in (l_\infty)^*$, який анулює весь c_0. Це і буде потрібний приклад.