Розділ 9. Лінійні неперервні функціонали

9.1. Теорема Гана-Банаха в нормованих просторах

Доведена в п. 5.4.3 теорема Гана-Банаха про продовження лінійного функціонала носить надзвичайно загальний характер і застосовна до будь-якого дійсного лінійного простору. Зокрема, нею можна користуватись і в нормованих просторах. Проте при такому застосуванні потрібні два уточнення. По-перше, в нормованих просторах серед всіх лінійних функціоналів найбільший інтерес становлять неперервні функціонали. Відповідно, і продовжувати їх хотілося б зі збереженням неперервності. По-друге, бажано мати варіант теореми, який однаково підходить як для дійсних, так і для комплексних просторів.

9.1.1. Зв'язок між дійсними і комплексними функціоналами

Нехай X — комплексний лінійний простір, тобто в X визначено множення на комплексні скаляри. Тоді, зокрема, в X визначено множення і на дійсні числа, тобто X можна розглядати і як дійсний простір. Власне, на X можна говорити про два типи лінійних функціоналів. А саме, функціонал f на X називається *дійсним лінійним функціоналом*, якщо f набуває дійсні значення, адитивний (тобто $f(x + y) = f(x) + f(y)$ для будь-яких $x, y \in X$) і *дійсно-однорідний* ($f(\lambda x) = \lambda f(x)$ для будь-яких $x \in X$, $\lambda \in \mathbb{R}$), і *комплексним лінійним функціоналом*, якщо f приймає комплексні значення, адитивний і *комплексно-однорідний* ($f(\lambda x) = \lambda f(x)$ для будь-яких $x \in X$, $\lambda \in \mathbb{C}$).

Для будь-якого комплексного лінійного функціонала f означимо у природний спосіб його дійсну і уявну частини: $(\mathrm{Re}\, f)\, x = \mathrm{Re}(f(x))$, $(\mathrm{Im}\, f)x = \mathrm{Im}(f(x))$. При такому означенні $\mathrm{Re} f$ і $\mathrm{Im} f$ — це дійсні функціонали, і $f = \mathrm{Re} f + i\mathrm{Im} f$. Наступні дві теореми вичерпно описують зв'язок між дійсною й уявною частинами комплексного лінійного функціонала.

Теорема 1. *Нехай f — комплексний лінійний функціонал на X. Тоді для будь-якого $x \in X$ виконується співвідношення* $\mathrm{Im} f(x) = -\mathrm{Re} f(ix)$.

Наведений учбовий текст є витягом з підручнику

Кадець В.М. Курс функціонального аналізу та теорії міри. – Львів: Видавець І.Е. Чижиков, 2012. – 590 с. – (Серія "Університетська бібліотека") ISBN 978-966-2645-03-3

Усі посилання на теореми, вправи, означення, такі що не увійшли до цього тексту – це посилання на підручник.

Доведення. У рівність $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ підставимо $\lambda = i$ та обчислимо дійсні частини. Маємо

$$\mathrm{Re} f(ix) = \mathrm{Re}\,(if(x)) = -\mathrm{Im} f(x). \qquad \square$$

Теорема 2. *Нехай g — дійсний лінійний функціонал на X. Тоді функціонал f, який задається рівністю $f(x) = g(x) - ig(ix)$, є комплексним лінійним функціоналом.*

Доведення. Адитивність функціонала f і його дійсна однорідність очевидні. Перевіримо комплексну однорідність. Спочатку зазначимо, що

$$f(ix) = g(ix) - ig(-x) = i\,(g(x) - ig(ix)) = if(x).$$

Нехай тепер $\lambda = a + ib$ — довільне комплексне число. Маємо

$$f\,((a+ib)x) = f(ax) + f(ibx) = af(x) + ibf(x) = (a+ib)f(x). \qquad \square$$

Теореми 1 і 2 означають, що відповідність $f \mapsto \mathrm{Re} f$ між комплексними і дійсними функціоналами бієктивна. Для нормованого простору X можна сказати більше.

Теорема 3. *Нехай X — комплексний нормований простір, f — неперервний комплексний лінійний функціонал на X. Тоді $\|f\| = \|\mathrm{Re} f\|$.*

Доведення. Введемо позначення $C_1 = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$. Скористаємось означенням норми функціонала і тим, що множина добутків $\{\lambda x : x \in S_X,\ \lambda \in C_1\}$ збігається з S_X:

$$\|\mathrm{Re} f\| = \sup_{x \in S_X} |\mathrm{Re} f(x)| = \sup_{x \in S_X, \lambda \in C_1} |\mathrm{Re} f(\lambda x)| =$$

$$= \sup_{x \in S_X} \left(\sup_{\lambda \in C_1} |\mathrm{Re} \lambda f(x)| \right). \qquad (*)$$

При фіксованому x множина чисел вигляду $\{\lambda f(x) : \lambda \in C_1\}$ утворює коло радіуса $|f(x)|$ з центром у нулі. Дійсні частини цих чисел заповнюють відрізок від $-|f(x)|$ до $|f(x)|$. Відповідно, $\sup_{\lambda \in C_1} |\mathrm{Re} \lambda f(x)| = |f(x)|$. Підставивши це співвідношення в $(*)$, отримуємо: $\|\mathrm{Re} f\| = \sup\limits_{x \in S_X} |f(x)| = \|f\|$. $\square$

9.1.2. Теорема Гана-Банаха про продовження

Теорема. *Нехай Y — підпростір нормованого простору X, $f \in Y^*$. Тоді існує такий функціонал $\tilde{f} \in X^*$, що $\tilde{f}(y) = f(y)$ для всіх $y \in Y$ і $\|\tilde{f}\| = \|f\|$. Іншими словами, будь-який неперервний лінійний функціонал, заданий на підпросторі нормованого простору, продовжується на весь простір зі збереженням норми.*

Доведення. Формулювання теореми включає в себе як дійсний, так і комплексний випадок, але в доведенні ці два випадки потрібно розглядати окремо. Почнемо з дійсного випадку. Означимо на X опуклий функціонал p формулою $p(x) = \|f\| \cdot \|x\|$. При такому означенні функціонал f задовольняє умову мажорування: $f(y) \leqslant p(y)$ для будь-якого $y \in Y$. Скористаємось теоремою Гана-Банаха в аналітичній формі з п. 5.4.3. Нехай $\tilde{f}$ — продовження функціонала f на весь X зі збереженням умови мажорування. Нехай $x \in X$ — довільний елемент. Застосувавши умову мажорування до елементів x і $-x$, одержуємо дві нерівності: $\tilde{f}(x) \leqslant p(x)$ і $-\tilde{f}(x) \leqslant p(x)$. Це означає, що $\left|\tilde{f}(x)\right| \leqslant p(x) = \|f\| \cdot \|x\|$ для будь-якого $x \in X$. Тобто $\|\tilde{f}\| \leqslant \|f\|$, і, відповідно, f неперервний. Обернена нерівність $\|\tilde{f}\| \geqslant \|f\|$ випливає з того, що функціонал $\tilde{f}$ — це продовження функціонала f:

$$\|\tilde{f}\| = \sup_{x \in S_X} \|\tilde{f}(x)\| \geqslant \sup_{x \in S_Y} \|\tilde{f}(x)\| = \sup_{x \in S_Y} \|f(x)\| = \|f\|.$$

Розглянемо тепер комплексний випадок. Нехай X — комплексний нормований простір, f — неперервний комплексний лінійний функціонал на Y. Тоді $g = \mathrm{Re} f$ є дійсним функціоналом, і, за щойно доведеним твердженням, існує такий дійсний функціонал $\tilde{g}$ на X, що $\tilde{g}(y) = g(y)$ для всіх $y \in Y$ і $\|\tilde{g}\| = \|g\|$. Шуканий функціонал $\tilde{f}$ означимо рівністю $\tilde{f}(x) = \tilde{g}(x) - i\tilde{g}(ix)$. Згідно з теоремою 2 попереднього п. 9.1.1, $\tilde{f}$ — комплексний лінійний функціонал. Далі, для будь-якого $y \in Y$, згідно з теоремою 1 попереднього пункту, $\mathrm{Im} f(y) = -\mathrm{Re} f(iy) = -g(iy)$. Отже,

$$\tilde{f}(y) = \tilde{g}(y) - i\tilde{g}(iy) = g(y) - ig(iy) = f(y).$$

Нарешті, за теоремою 3 п. 9.1.1,

$$\|\tilde{f}\| = \|\tilde{g}\| = \|g\| = \|f\| \qquad \square.$$

Вправи

1. Нехай X — нормований простір, f — лінійний функціонал на X, $A = \{x \in X : f(x) = 1\}$. Доведіть, що $\rho(0, A) = \|f\|^{-1}$. Зокрема, якщо $\rho(0, A) \neq 0$, то функціонал f неперервний.

2. Нехай X — нормований простір, $x \in X$, $f \in X^*$, a — довільний скаляр, $A = \{x \in X : f(x) = a\}$. Тоді $\rho(x, A) = \frac{|f(x)-a|}{\|f\|}$.

3. Для ненульового лінійного функціонала f, заданого на нормованому просторі X, такі умови еквівалентні:

– функціонал f неперервний;

– ядро функціонала f замкнене;

– ядро функціонала f не щільне в X.

4. Нехай $1 \leqslant p < \infty$. Позначимо через $C_p[a, b]$ підпростір нормованого простору $L_p[a, b]$, який складається з усіх неперервних функцій на $[a, b]$. Нехай $t_0 \in [a, b]$ — фіксована точка. Доведіть, що лінійний функціонал δ_{t_0} на $C_p[a, b]$, який діє за правилом $\delta_{t_0}(f) = f(t_0)$, розривний. Згідно з попередньою вправою отримайте щільність у $C_p[a, b]$ підмножини функцій, які задовольняють умову $f(0) = 0$.

5. Розв'яжіть вправу 7 п. 6.2.2: при $1 \leqslant p < \infty$ множина неперервних функцій, які задовольняють умову $f(0) = 0$ щільна в $L_p[0, 1]$.

6. Назвемо множину $\Delta \in [a, b]$ «дуже маленькою», якщо підпростір V_Δ простору $C_p[a, b]$, що складається з функцій, які перетворюються в тотожний 0 на Δ, щільний в $C_p[a, b]$. Доведіть, що множина Δ буде «дуже маленькою» тоді і тільки тоді, коли її замикання має міру 0.

9.2. Деякі застосування

9.2.1. Опорний функціонал

Нехай X — нормований простір, $x_0 \in X \backslash \{0\}$. Функціонал $f_0 \in X^*$ називається *опорним функціоналом у точці* x_0, якщо $\|f_0\| = 1$ і $f_0(x_0) = \|x_0\|$.

Теорема 1. *Для будь-якої точки $x_0 \in X \backslash \{0\}$ існує опорний в цій точці функціонал.*

Доведення. Розглянемо підпростір $Y = \mathrm{Lin}\{x_0\}$. Це одновимірний простір, і x_0 — базис простору Y. Задамо на Y лінійний функціонал f так, що $f(x_0) = \|x_0\|$. Іншими словами, для будь-якого $y = \lambda x_0 \in Y$ покладемо $f(y) = \lambda \|x_0\|$. Обчислимо норму функціонала f. Якщо $y = \lambda x_0 \in S_Y$, то $|\lambda| \|x_0\| = 1$. Відповідно,

$$\|f\| = \sup_{\lambda x_0 \in S_Y} |f(\lambda x_0)| = \sup_{\lambda x_0 \in S_Y} |\lambda| \|x_0\| = 1.$$

Скористаємось теоремою Гана-Банаха з попереднього пункту і продовжимо функціонал f до функціонала $f_0 \in X^*$ зі збереженням норми. Одержане продовження і буде опорним функціоналом: $\|f_0\| = \|f\| = 1$ і $f_0(x_0) = f(x_0) = \|x_0\|$. □

Наслідок 1. *Якщо X — нормований простір і $X \neq \{0\}$, то й $X^* \neq \{0\}$.*

Нагадаємо деякі факти з лінійної алгебри. Якщо X — скінченновимірний лінійний простір, X' — простір всіх лінійних функціоналів на X, то $\dim X' = \dim X$. Якщо $E \subset X'$ — підпростір і $E \neq X'$, то існує елемент $x_0 \in X \backslash \{0\}$, який анулюється всіма функціоналами з E: $\forall f \in E \ f(x_0) = 0$ (останній факт в еквівалентному формулюванні звучить так: якщо в системі лінійних однорідних рівнянь невідомих більше ніж рівнянь, то система має ненульовий розв'язок).

Наслідок 2. *На скінченновимірному нормованому просторі будь-який лінійний функціонал неперервний.*

Доведення. Нехай X — скінченновимірний нормований простір. Розглянемо простір X^* неперервних лінійних функціоналів на X як лінійний підпростір простору X' всіх лінійних функціоналів на X. Припустимо, що $X^* \neq X'$. Тоді існує такий $x_0 \in X \backslash \{0\}$, що $f(x_0) = 0$ для будь-якого $f \in X^*$. Отже, для цього елемента x_0 не існує опорного функціонала. Суперечність з теоремою 1. □

Теорема 2. *Нехай X, E — нормовані простори й X скінченновимірний. Тоді будь-який лінійний оператор T, який діє з X в E, неперервний.*

Доведення. Виберемо в X базис $\{x_k\}_{k=1}^n$. Для кожного $x \in X$ позначимо через $\{x_k^*(x)\}_{k=1}^n$ коефіцієнти розкладу елемента x за базисом $\{x_k\}_{k=1}^n$: $x = \sum_{k=1}^n x_k^*(x) x_k$. Перевіримо, що x_k^* — лінійні функціонали. Справді, для будь-яких $x, y \in X$ і будь-яких скалярів a, b маємо:

$$\sum_{k=1}^n \left(a x_k^*(x) + b x_k^*(y)\right) x_k = a \sum_{k=1}^n x_k^*(x) x_k + b \sum_{k=1}^n x_k^*(y) x_k =$$
$$= ax + by = \sum_{k=1}^n x_k^*(ax + by) x_k.$$

З огляду на єдиність розкладу за базисом це означає, що $a x_k^*(x) + b x_k^*(y) = x_k^*(ax + by)$, тобто лінійність доведено. За наслідком 2, $x_k^* \in X^*$, $k = 1, 2, ..., n$. Скориставшись лінійністю оператора T і нерівністю трикутника, для будь-якого $x \in X$ отримаємо оцінку:

$$\|Tx\| = \left\| \sum_{k=1}^n x_k^*(x) T x_k \right\| \leqslant \sum_{k=1}^n |x_k^*(x)| \cdot \|T x_k\| \leqslant \sum_{k=1}^n \|x_k^*\| \cdot \|T x_k\| \cdot \|x\|,$$

тобто $\|T\| \leqslant \sum\limits_{k=1}^n \|x_k^*\| \cdot \|T x_k\| < \infty$. □

Вправи

1. На будь-якому нескінченновимірному нормованому просторі існує розривний лінійний функціонал.

2. Розглянемо $l_1^{(2)}$ — двовимірний аналог простору l_1. Тобто $l_1^{(2)}$ — це простір векторів $\bar{x} = (x_1, x_2)$, наділений нормою $\|\bar{x}\| = |x_1| + |x_2|$. Доведіть, що опорний функціонал у точці $\bar{x}_0 = (1, 0)$ не єдиний. Опишіть всі опорні функціонали в цій точці.

3. Візьмемо за нормований простір X простір $\mathbb{R}^2$, наділений деякою нормою. Одинична сфера в цій нормі — це опукла замкнена крива γ в $\mathbb{R}^2$. Доведіть еквівалентність таких умов: 1) у кожній ненульовій точці простору X існує єдиний опорний функціонал; 2) крива γ в кожній своїй точці має єдину дотичну пряму.

9.2.2. Анулятор підпростору

Нехай A — підмножина нормованого простору X. *Анулятором підмножини* A називається множина функціоналів

$$A^\perp = \{f \in X^* : f(y) = 0 \text{ для всіх } y \in A\}.$$

Теорема 1. *$A^\perp$ — замкнений підпростір простору X^*.*

Доведення. Нехай $f_1, f_2 \in A^\perp$. Тоді для будь-якого $y \in A$ і будь-яких скалярів λ_1, λ_2 маємо $(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(y) = \lambda_1 f_1(y) + \lambda_2 f_2(y) = 0$, тобто $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \in A^\perp$. Лінійність доведено, перевіримо замкненість. Нехай $f_1, f_2, f_3, ... \in A^\perp$, $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$, $y \in A$. Тоді

$$|f(y)| = |f(y) - f_n(y)| = |(f - f_n)(y)| \leqslant \|f - f_n\| \cdot \|y\| \to 0, \quad n \to \infty$$

і, отже, $f \in A^\perp$. Отже, границя функціоналів з $A^\perp$ знову лежить в $A^\perp$. □

Зазначимо найпростіші властивості ануляторів.

Теорема 2. *1) Якщо $A \subset B$, то $A^\perp \supset B^\perp$. 2) $A^\perp = (\operatorname{Lin} A)^\perp$. 3) Нехай $\overline{B}$ — замикання множини B. Тоді $\left(\overline{B}\right)^\perp = B^\perp$. 4) $A^\perp = \left(\overline{\operatorname{Lin} A}\right)^\perp$.*

Доведення. 1) Якщо $f \in B^\perp$, то f анулює всі елементи множини B, а отже, і всі елементи множини A.

2) Включення $A^\perp \supset (\operatorname{Lin} A)^\perp$ випливає з першої властивості. Доведемо обернене включення. Нехай $f \in A^\perp$, а $x = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k$ — довільна лінійна комбінація елементів множини A. Тоді $f(x) = \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k) = 0$. Отже, $f \in (\operatorname{Lin} A)^\perp$.

3) Якщо функціонал f перетворюється в нуль на всій множині B і неперервний, то f перетворюється в нуль і на $\overline{B}$. Тобто $\left(\overline{B}\right)^\perp \supset B^\perp$. Обернене включення випливає з першої властивості.

4) Ця властивість випливає з властивостей 2) і 3). □

Теорема 3. *Для замкненого підпростору Y нормованого простору X такі властивості еквівалентні:*

1. *$Y = X$.*

2. *$Y^\perp = \{0\}$.*

Доведення. Доведення потребує тільки імплікація 2.⇒1. Припустимо, що перша умова не виконується, тобто Y строго міститься в X. Тоді фактор-простір X/Y складається не тільки з нуля, і, за наслідком 1 п. 9.2.1, на X/Y існує деякий ненульовий неперервний лінійний функціонал g. Нехай $q\colon X \to X/Y$ — фактор-відображення ($q(x) = [x]$). Означимо функціонал f як композицію: $f(x) = g(q(x))$. Оскільки оператор q сюр'єктивний і g — не тотожний нуль, то й f не дорівнює тотожно нулю. Водночас $f \in Y^\perp$. Суперечність. □

Вправи

1. Нехай A, B — підмножини нормованого простору X. Тоді $(A \cup B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$.
2. Поширте результат попередньої вправи на анулятор об'єднання будь-якої (в тому числі і нескінченної) кількості множин.
3. Доведіть, що $A^\perp$ замкнений в X^* не тільки в розумінні збіжності за нормою, але й у розумінні поточкової збіжності.
4. Наведіть приклад двох підмножин A і B, для яких $(A \cap B)^\perp \neq A^\perp \cup B^\perp$.
5. Доведіть включення $(A \cap B)^\perp \supset A^\perp \cup B^\perp$. Отримайте звідси включення $(A \cap B)^\perp \supset \overline{\mathrm{Lin}}\,\left(A^\perp \cup B^\perp\right)$.
6. Наведіть приклад підмножин, для яких $(A \cap B)^\perp \neq \overline{\mathrm{Lin}}\,\left(A^\perp \cup B^\perp\right)$.
7. Наведіть приклад замкнених підпросторів, для яких $(A \cap B)^\perp \neq \overline{\mathrm{Lin}}\,(A^\perp \cup B^\perp)$.

9.2.3. Повні системи елементів

Підмножина A нормованого простору X називається *повною системою елементів нормованого простору* X, якщо замикання лінійної оболонки множини A збігається з усім простором X[1].

Повні системи елементів виникають в різних задачах математичного аналізу при наближенні одних функцій іншими більш простого вигляду. Так, теорему Вейєрштрасса про щільність множини поліномів у просторі неперервних функцій на відрізку можна сформулювати так: послідовність степеневих функцій $\{1, t, t^2, ...\}$ повна в $C[a, b]$. У теорії тригонометричних рядів доводиться повнота в (комплексному) просторі $C[0, 2\pi]$ систем $\left\{e^{ikt}\right\}_{k=-\infty}^{\infty}$ і $\{1, \cos t, \sin t, \cos 2t, ...\}$. Важливі приклади повних систем виникають в курсі математичної фізики як системи власних функцій різних диференціальних операторів.

Теорему 3 останнього пункту можна переформулювати у вигляді такого критерію повноти системи.

Теорема. *Нехай X — нормований простір. Множина $A \subset X$ є повною системою елементів тоді і тільки тоді, коли $A^\perp = \{0\}$.*

Доведення. Згідно з пунктом 4 теореми 2 п. 9.2.2, умова $A^\perp = \{0\}$ еквівалентна умові $\left(\overline{\mathrm{Lin}}\,A\right)^\perp = \{0\}$, яка, відповідно до теореми 3 п. 9.2.2, еквівалентна рівності $\overline{\mathrm{Lin}}\,A = X$, тобто повноті системи елементів A. □

Цей критерій часто дозволяє зводити питання про повноту системи елементів комплексного нормованого простору до задач теорії функцій комплексної змінної. Саме так доводиться теорема Мюнца про повноту систем степеневих функцій (нехай $b > a > 0$, $\lambda_k > 0$; тоді система $\left\{f_k(t) = t^{\lambda_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ повна в $C[a, b]$ тоді і тільки тоді, коли $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-1} = \infty$); теореми Левінсона [Le] про повноту систем експоненційних функцій (див. монографію Б. Я. Левіна [Lev], Додаток 3) і багато інших. Наведемо найпростіший приклад такого міркування.

[1]Не плутати з повною системою елементів лінійного простору, де означення (див. п. 5.1.1) відрізняється відсутністю слова «замикання».

Приклад. Нехай $b > a > 0$, $\lambda_k \in \mathbb{C}$ і послідовність (λ_k), $k = 1, 2, ...$ має граничну точку. Тоді система $\left\{f_k(t) = t^{\lambda_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ повна в $C[a, b]$.

Доведення. Розглянемо функціонал $x^* \in (C[a, b])^*$, який анулює всі f_k. Означимо функцію комплексної змінної $F(z) = x^*(t^z)$. Ця функція визначена при всіх $z \in \mathbb{C}$. Доведемо, що F голоморфна. Справді,

$$\frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} = x^*\Big(\frac{t^{z+\Delta z} - t^z}{\Delta z}\Big).$$

Оскільки при $\Delta z \to 0$ функція $\frac{t^{z+\Delta z}-t^z}{\Delta z}$ рівномірно на $[a, b]$ прямує до $\frac{\partial}{\partial z} t^z = t^z \ln t$, а функціонал x^* неперервний саме щодо рівномірної збіжності,

$$\frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} \to x^*(t^z \ln t), \quad \Delta z \to 0.$$

Голоморфність доведено. Далі, за побудовою, $F(\lambda_k) = x^*(t^{\lambda_k}) = 0$. Тобто голоморфна функція F перетворюється в нуль на послідовності, яка має граничну точку в області голоморфності. За теоремою єдиності, $F(z) \equiv 0$. Зокрема, $F(n) = 0$, $n = 0, 1, 2, ...$ Це означає, що функціонал x^* анулює всі елементи повної системи функцій $\{1, t, t^2, ...\}$. Тобто $x^* = 0$. Ми довели, що анулятор системи $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ складається тільки з нульового функціонала. Отже, за доведеним вище критерієм, система $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ повна. □

Вправи

1. Нормований простір сепарабельний тоді і тільки тоді, коли він містить зліченну повну систему елементів.

2. Система $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset C[a, b]$ з вищенаведеного прикладу має таку незвичну властивість переповненості: будь-яка її нескінченна підсистема також повна.

9.3. Опуклі множини і теорема Гана-Банаха в геометричній формі

У цьому підрозділі X — дійсний нормований простір, A і B — непорожні підмножини простору X. Відповідно, усі лінійні функціонали дійсні.

9.3.1. Кілька лем

Лема 1. *1. Якщо A — відкрита множина, то для будь-якого $b \in X$ множина $A + b$ також відкрита; якщо A — окіл точки $x \in X$, то $A + b$ — окіл точки $x + b$.*

2. Якщо $\lambda \neq 0$, A — окіл точки $x \in X$, то λA — окіл точки λx.

Доведення. 1. Відображення паралельного перенесення $x \mapsto x + b$ бієктивне і зберігає відстані між елементами. Отже, при паралельному перенесенні кулі переходять у кулі (того ж радіуса) і відкриті множини — у відкриті множини.

2. Відображення гомотетії $x \mapsto \lambda x$ бієктивне і множить відстані між елементами на коефіцієнт $|\lambda|$. Тому кулі переходять у кулі, взагалі кажучи, іншого радіуса. □

Лема 2. *Якщо A — відкрита множина, $B \subset X$, то $A + B$ також відкрита.*

Доведення. $A + B = \bigcup_{b \in B} (A + b)$, тобто $A + B$ зображується у вигляді об'єднання відкритих множин. □

Лема 3. *Якщо A і B опуклі, то $A + B$ також опукла.*

Доведення. Нехай $x_1, x_2 \in A + B$, $\lambda \in [0, 1]$. За означенням суми двох множин, існують такі $a_1, a_2 \in A$, $b_1, b_2 \in B$, що $x_1 = a_1 + b_1$, $x_2 = a_2 + b_2$. Відповідно, маємо

$$\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 = \lambda(a_1 + b_1) + (1 - \lambda)(a_2 + b_2) =$$

$$= (\lambda a_1 + (1 - \lambda)a_2) + (\lambda b_1 + (1 - \lambda)b_2) \in A + B. \qquad \square$$

Лема 4. *Нехай A опукла, $a_1, a_2 \in A$, $\lambda \in (0, 1)$ і a_1 — внутрішня точка множини A. Тоді й опукла комбінація $\lambda a_1 + (1 - \lambda)a_2$ є внутрішньою точкою множини A.*

Доведення. Множина A — окіл точки a_1. За лемою 1, λA — окіл точки λa_1, і $\lambda A+(1-\lambda)a_2$ — окіл точки $\lambda a_1 + (1 - \lambda)a_2$. Водночас на підставі опуклості множини A

$$\lambda A + (1 - \lambda)a_2 \subset \lambda A + (1 - \lambda)A \subset A.$$

Тобто ми знайшли окіл точки $\lambda a_1 + (1 - \lambda)a_2$, який увесь лежить в A. □

Наслідок 1. *Внутрішність опуклої множини A опукла.*

Доведення. Достатньо застосувати лему 4 до випадку, коли обидві точки a_1, a_2 внутрішні. □

Наслідок 2. *Якщо внутрішність $\mathring{A}$ опуклої множини A непорожня, то $\mathring{A}$ щільна в A.*

Доведення. Нехай a — довільна точка множини $f \in X^* \setminus \{0\}$. Зафіксуємо $x \in \mathring{A}$. За лемою 4, увесь відрізок $\lambda a + (1 - \lambda)x$: $\lambda \in (0, 1)$ складається з внутрішніх точок. Оскільки $\lambda a + (1 - \lambda)x \to a$ при $\lambda \to 1$, одержуємо, що точка a належить до замикання множини $\mathring{A}$. □

Лема 5. *Нехай лінійний функціонал f на X не тотожний нулеві, $\theta \in \mathbb{R}$, $A \subset X$ — множина з непорожньою внутрішністю і $f(a) \leqslant \theta$ для всіх A. Тоді для всіх $x \in \mathring{A}$ виконується строга нерівність $f(x) < \theta$. Зокрема, якщо A відкрита, то $f(x) < \theta$ при всіх $x \in A$.*

Доведення. За умовою, існує $e \in X$ з $f(e) > 0$. Нехай $x \in A$ — внутрішня точка. Виберемо настільки мале $\varepsilon > 0$, щоб точка $x + \varepsilon e$ потрапила в A. Маємо

$$f(x) < f(x) + \varepsilon f(e) = f(x + \varepsilon e) \leqslant \theta. \qquad \square$$

Зазначимо, що в лемі 5 функціонал міг бути розривним, а умову відкритості множини B в останній частині формулювання можна замінити загальнішими алгебраїчними умовами: для будь-якого $x \in A$ множина $A - x$ — поглинаюча.

9.3.2. Теореми про відокремлюваність опуклих множин

Усі зібрані в цьому пункті твердження можна розглядати як узагальнення такого геометричного твердження: нехай A і B — неперетинні опуклі множини на площині. Тоді можна провести таку пряму l, що A і B опиняться по різні боки від l. Тіла у тривимірному просторі вже потрібно відокремлювати не прямою, а площиною. У випадку великих вимірностей (в тому числі і в нескінченновимірному просторі), роль прямої або площини, що відділяє, бере на себе гіперплощина — лінія рівня лінійного функціонала.

Лема. *Нехай A — відкрита опукла підмножина нормованого простору X, $x_0 \in X \setminus A$. Тоді існує такий функціонал $f \in X^* \setminus \{0\}$, що $f(a) \leqslant f(x_0)$ на всіх $a \in A$.*

Доведення. Спочатку доведемо лему за додаткового припущення, що A містить нульовий елемент простору. У цьому випадку множина A буде містити і деяку кулю вигляду rB_X, і, отже, буде поглинаючою множиною. Відповідно, функціонал Мінковського φ_A множини A буде опуклим функціоналом (див. п. 5.4.2). Включення $rB_X \subset A$ означає, що $\varphi_A(x) \leqslant \frac{1}{r}\|x\|$. Як і в доведенні теореми 1 п. 9.2.1, розглянемо підпростір $Y = \mathrm{Lin}\{x_0\}$. Задамо на Y лінійний функціонал f так, щоб $f(x_0) = \varphi_A(x_0)$. Доведемо, що на Y лінійний функціонал f мажорується опуклим функціоналом φ_A. Справді, для $\lambda \geqslant 0$ з огляду на додатну однорідність функціонала Мінковського маємо $f(\lambda x_0) = \varphi_A(\lambda x_0)$. Водночас

$$f(-\lambda x_0) = -f(\lambda x_0) = -\varphi_A(\lambda x_0) \leqslant 0 \leqslant \varphi_A(-\lambda x_0).$$

Отже, умову мажорування $f(tx_0) \leqslant \varphi_A(tx_0)$ ми довели як для додатних, так і для від'ємних t, тобто умова мажорування виконується для всіх елементів простору Y.

Скористаємось теоремою Гана-Банаха в аналітичній формі і продовжимо f на весь простір X зі збереженням лінійності й умови мажорування. Умова мажорування, зокрема, означає, що $f(x) \leqslant \varphi_A(x) \leqslant \frac{1}{r}\|x\|$, тобто $f \in X^*$. Нагадаємо, що, за означенням функціонала Мінковського, $\varphi_A(a) \leqslant 1$ для будь-якого $a \in A$, і, оскільки $x_0 \notin A$, $\varphi_A(x_0) \geqslant 1$. Зіставивши ці умови, одержуємо, що

$$f(a) \leqslant \varphi_A(a) \leqslant 1 \leqslant \varphi_A(x_0) = f(x_0)$$

для будь-якого $a \in A$. Крім того, f не тотожний нулеві, адже, як ми щойно перевірили, $f(x_0) \geqslant 1$.

Отже, ми довели лему за додаткового припущення $0 \in A$. Загальний випадок зводиться до вже проаналізованого паралельним перенесенням. А саме, нехай $a_0 \in A$. Розглянемо додаткову множину $B = A - a_0$. B — опукла відкрита множина, яка містить 0; $x_0 - a_0 \notin B$. Як ми вже довели, існує такий функціонал $f \in X^* \setminus \{0\}$, що $f(b) \leqslant f(x_0 - a_0)$ для всіх $b \in B$. Підставивши $b = a - a_0$, де $a \in A$, в останню нерівність, отримаємо, що

$$f(a) - f(a_0) = f(a - a_0) \leqslant f(x_0 - a_0) = f(x_0) - f(a_0),$$

тобто $f(a) \leqslant f(x_0)$. □

Теорема Гана-Банаха в геометричній формі. *Нехай A і B — неперетинні опуклі підмножини нормованого простору X і множина A відкрита. Тоді існують такий функціонал $f \in X^* \setminus \{0\}$ і такий скаляр $\theta \in \mathbb{R}$, що $f(a) < \theta$ для всіх $a \in A$ і $f(b) \geqslant \theta$ для всіх $b \in B$.*

Доведення. Розглянемо допоміжну множину $C = A - B$. Згідно з лемами 2 і 3 пункту 9.3.1, C — відкрита опукла множина. Оскільки A і B не перетинаються, $0 \notin C$. Застосувавши останню лему до множини C і точки $x_0 = 0$, одержуємо існування функціонала $f \in X^* \setminus \{0\}$, для якого $f(a - b) \leqslant 0$ для всіх $a \in A$, $b \in B$. Виберемо $\theta = \sup_{a \in A} f(a)$. Оскільки нерівність $f(a) \leqslant f(b)$ виконується при всіх $a \in A$, $b \in B$, то і

$$\theta = \sup_{a \in A} f(a) \leqslant f(b)$$

для всіх $b \in B$. Умова ж $f(a) < \theta$ для всіх $a \in A$ випливає з очевидної нерівності $f(a) \leqslant \theta$ і леми 5 п. 9.3.1. □

Наслідок 1. *Нехай A і B — неперетинні опуклі підмножини нормованого простору X і A має непорожню внутрішність. Тоді існують такий функціонал $f \in X^* \setminus \{0\}$ і такий скаляр $\theta \in \mathbb{R}$, що $f(a) \leqslant \theta$ для всіх $a \in A$ і $f(b) \geqslant \theta$ для всіх $b \in B$. При цьому у внутрішніх точках множини A виконується строга нерівність $f(x) < \theta$.*

Доведення. Внутрішність $\overset{\circ}{A}$ множини A — це опукла відкрита множина. Залишається застосувати попередню теорему і скористатись щільністю $\overset{\circ}{A}$ в A. □

Прямим застосуванням леми 5 п. 9.3.1 з основної теореми отримуємо

Наслідок 2. *Нехай A і B — неперетинні опуклі відкриті підмножини нормованого простору X. Тоді існують такий функціонал $f \in X^* \setminus \{0\}$ і такий скаляр $\theta \in \mathbb{R}$, що $f(a) < \theta$ для всіх $a \in A$ і $f(b) > \theta$ для всіх $b \in B$.*

І, нарешті,

Наслідок 3. *Нехай A і B — неперетинні опуклі замкнені підмножини нормованого простору X і одна з цих множин — компакт. Тоді існують такий функціонал $f \in X^* \setminus \{0\}$ і такий скаляр $\theta \in \mathbb{R}$, що $f(a) < \theta$ для всіх $a \in A$ і $f(b) > \theta$ для всіх $b \in B$.*

Доведення. Через $r = \inf\limits_{a \in A, b \in B} \|a - b\|$ позначимо *відстань між множинами* A і B. З умови видно, що $r > 0$. Розглянемо допоміжні множини $A + \frac{r}{3} B_X$ і $B + \frac{r}{3} B_X$ — $\frac{r}{3}$-околи множин A і B відповідно. Ці допоміжні множини відкриті, опуклі і не перетинаються, отже, до них можна застосувати попередній наслідок. □

9.3.3. Приклади

Істотність деяких з умов, які накладаються на множини A і B в формулюванні теореми Гана-Банаха в геометричній формі, та її наслідків очевидна. Так, множини не можна розділити гіперплощиною, якщо вони перетинаються. Якщо за одну з множин взяти коло, а за другу — центр цього кола, то стає зрозуміло, чому теорема неправильна для неопуклих множин. Водночас важливість топологічних умов, що накладаються, — відкритість, замкненість, компактність деяких з цих множин — вже не настільки очевидна. Нижче наводяться приклади, які демонструють значення таких умов.

Приклад 1. Розглянемо на площині $\mathbb{R}^2$ множини $A = \{(x, y) : y \leqslant 0\}$ (нижня півплощина) і $B = \left\{(x, y) : x > 0, y \geqslant \frac{1}{x}\right\}$ (частина першого квадранта, що лежить над графіком $y = \frac{1}{x}$). Ці множини замкнені, не перетинаються, але строго відокремити їх прямою, щоб **жодна** з множин із цією прямою не перетиналась, неможливо. Тобто без умови компактності однієї з множин у наслідку 3 п. 9.3.2 обійтися неможливо. Щоправда, в цьому прикладі вісь абсцис відокремлює множини у розумінні теореми Гана-Банаха в геометричній формі: множини лежать по різні боки від прямої, і з прямою перетинається тільки одна з двох множин. У наступному прикладі і таке відокремлення вже теж неможливе.

Приклад 2. Розглянемо на площині $\mathbb{R}^2$ множини $A = \{(x, 0) : x \geqslant 0\}$ (замкнена права координатна піввісь) і $B = \{(x, y) : y < 0\} \cup \{(x, 0) : x < 0\}$ (відкрита нижня півплощина разом з лівою координатною піввіссю). Це — неперетинні опуклі множини, одна з яких замкнена. Водночас їх не можна строго розділити прямою: єдина пряма, від якої ці множини лежать (нестрого) по різні боки, — це вісь абсцис, але обидві ці множини перетинаються з віссю.

Нарешті, наведемо приклад опуклих неперетинних множин, для яких не існує навіть нестрогого відокремлення гіперплощиною. Такий приклад можливий тільки в нескінченновимірному просторі.

Приклад 3. Розглянемо лінійний простір $\mathcal{P}$ всіх поліномів з дійсними коефіцієнтами. За A візьмемо множину всіх поліномів, які мають строго від'ємний старший коефіцієнт, а за B — множину всіх поліномів, у яких усі коефіцієнти невід'ємні. Ці множини опуклі і не перетинаються. Доведемо, що для будь-якого ненульового лінійного функціонала f на P не існує такого скаляра $\theta \in \mathbb{R}$, що $f(a) \leqslant \theta$ для всіх $a \in A$ і $f(b) \geqslant \theta$ для всіх $b \in B$. Спочатку зазначимо, що одночлени $p_n(t) = t^n$, $n = 0, 1, 2, ...$, утворюють базис Гамеля в P. Відповідно, функціонал f однозначно визначається своїми значеннями на p_n. Введемо позначення $f(p_n) = f_n$.

Припустимо, що $f(a) \leqslant \theta$ для всіх $a \in A$ і $f(b) \geqslant \theta$ для всіх $b \in B$. Тоді, зокрема, оскільки $0 \in B$, можемо зробити висновок, що $0 = f(0) \geqslant \theta$, тобто $\theta \leqslant 0$. Далі, для будь-якого $\varepsilon > 0$ маємо $\varepsilon p_0 \in A$ і $\varepsilon f_0 = f(\varepsilon p_0) \leqslant \theta$. Спрямувавши ε до 0, одержуємо, що $\theta \geqslant 0$, тобто $\theta = 0$. Далі, кожний з поліномів p_n лежить в B, відповідно, $f_n = f(p_n) \geqslant 0$. З іншого боку, для будь-якого $\varepsilon > 0$ маємо $p_n - \varepsilon p_{n+1} \in A$. Відповідно,

$$f_n - \varepsilon f_{n+1} = f(p_n - \varepsilon p_{n+1}) \leqslant 0,$$

звідси, спрямувавши ε до 0, отримуємо, що $f_n \leqslant 0$. Отже, всі f_n дорівнюють 0, і, тому $f = 0$.

Вправи

1. Перевірте опуклість множин A і B у всіх прикладах 1–3.

Сім'я множин називається *зчепленою*, якщо будь-які дві з них перетинаються. Говоритимемо, що банахів простір X має *властивість зчеплених куль*, якщо будь-яка зчеплена сім'я непорожніх замкнених куль (з довільними центрами і довільними радіусами) має непорожній перетин. Доведіть, що:

2. Дійсна пряма $\mathbb{R}$ має властивість зчеплених куль, а $\mathbb{C}$ не має.

3. Дійсний простір l_∞ має властивість зчеплених куль.

Банахів простір E називається *1-ін'єктивним*, якщо для операторів, які діють в E, виконується аналог теореми Гана-Банаха про продовження: для будь-якого Y — підпростору довільного нормованого простору X і будь-якого оператора $T \in L(Y, E)$ існує такий оператор $\tilde{T} \in L(X, E)$, що $\tilde{T}(y) = T(y)$ для всіх $y \in Y$ і $\|\tilde{T}\| = \|T\|$.

Якщо у вищенаведеному означенні забрати умову $\|\tilde{T}\| = \|T\|$, то отримаємо загальніше означення *ін'єктивного простору.*

4. Якщо банахів простір E має властивістю зчеплених куль, то E — 1-ін'єктивний простір (I. Nachbin, 1950). Зокрема, простір l_∞ 1-ін'єктивний.

5. Доведіть ін'єктивність простору l_∞, не користуючись властивістю зчеплених куль, а спираючись на теорему Гана-Банаха про продовження.

6. Нехай на площині задано N опуклих замкнених обмежених множин, будь-які 3 з яких перетинаються. Тоді всі N множин мають спільну точку (E. Helly, 1936).

7. Доведіть, що від умови обмеженості множин у попередній вправі можна відмовитись.

8. Нехай на площині задано нескінченну сім'ю опуклих замкнених множин, одна з яких обмежена, і будь-які 3 множини з цієї сім'ї перетинаються. Тоді вся сім'я має непорожній перетин.

9. Наведіть приклад, який показує істотність умови обмеженості у формулюванні попереднього твердження.

10. Придумайте і доведіть варіант теореми Геллі для множин в n-вимірному просторі.

9.4. Спряжений оператор

9.4.1. Зв'язок між властивостями вихідного оператора і спряженого до нього

Нехай X, E — нормовані простори, $T \in L(X, E)$. *Спряженим оператором* до оператора T називається оператор $T^*\colon E^* \to X^*$, який ставить у відповідність кожному функціоналу $f \in E^*$ функціонал $T^*f = f \circ T$. Іншими словами, функціонал $T^*f \in X^*$ діє за правилом $(T^*f)(x) = f(Tx)$.

Лема. *Для будь-якого елемента $e \in E$ виконується рівність*

$$\|e\| = \sup_{f \in S_{E^*}} |f(e)| .$$

Доведення. Для будь-якого $f \in S_{E^*}$ маємо $|f(e)| \leqslant \|f\| \cdot \|e\| = \|e\|$, відповідно, $\sup_{f \in S_{E^*}} |f(e)| \leqslant \|e\|$. Для отримання оберненої оцінки скористаємось існуванням опорного в точці e функціонала f_0. За означенням опорного функціонала (п. 9.2.1), $f_0 \in S_{E^*}$ і $f_0(e) = \|e\|$. Маємо $\sup\limits_{f \in S_{E^*}} |f(e)| \geqslant |f_0(e)| = \|e\|$. □

Теорема 1. *Оператор T^* неперервний, і $\|T^*\| = \|T\|$.*

Доведення.

$$\|T^*\| = \sup_{f \in S_{E^*}} \|T^*f\| = \sup_{f \in S_{E^*}} \sup_{x \in S_X} |(T^*f)(x)| =$$

$$= \sup_{x \in S_X} \sup_{f \in S_{E^*}} |f(Tx)| = \sup_{x \in S_X} \|Tx\| = \|T\| .$$ □

Теорема 2. *Образи і ядра операторів T і T^* пов'язані такими співвідношеннями:*

(1) $\operatorname{Ker} T^* = (T(X))^{\perp}$;

(2) $T^*(E^*) \subset (\operatorname{Ker} T)^{\perp}$.

Доведення. (1)

$$(f \in \operatorname{Ker} T^*) \Leftrightarrow (T^*f = 0) \Leftrightarrow (\forall x \in X : (T^*f)x = 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\forall x \in X : f(Tx) = 0) \Leftrightarrow (f \in (T(X))^{\perp}).$$

(2) Нехай $g \in T^*(E^*)$, тобто $g = T^*f$ для деякого $f \in E^*$. Тоді для будь-якого $x \in \operatorname{Ker} T$ маємо

$$g(x) = (T^*f)(x) = f(Tx) = 0,$$

тобто $g \in (\operatorname{Ker} T)^{\perp}$. □

Наслідок 1. *Для того, щоб оператор T^* був ін'єктивним, необхідно і достатньо, щоб оператор T мав щільний образ. Зокрема, якщо оператор T сюр'єктивний, то T^* ін'єктивний.*

Наслідок 2. *Якщо оператор T^* сюр'єктивний, то T ін'єктивний.*

Для доведення наслідку 1 достатньо застосувати першу частину попередньої теореми 2 і теорему 3 п. 9.2.2. Наслідок 2 випливає з другої частини теореми 2.

Вправи

1. Нехай $X,\ Y, Z$ — нормовані простори, $T_1 \in L(X,Y)$, $T_2 \in L(Y,Z)$. Тоді $(T_2T_1)^* = T_1^*T_2^*$.
2. Наведіть приклад, де $T^*(E^*) \neq (\operatorname{Ker} T)^{\perp}$.
3. Якщо оператор T^* має щільний образ, то T ін'єктивний. Обернене твердження неправильне. (У розділі 17 ми побачимо, що ін'єктивність оператора T еквівалентна щільності образу T^*, але не в топології, породженій нормою, а в «слабкій із зірочкою» топології $\sigma(X^*, X)$.)
4. Нехай $T \in L(X,Y)$ — бієктивний оператор, $T^{-1} \in L(Y,X)$. Тоді $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$.

9.4.2. Двоїстість між підпросторами і фактор-просторами

Нехай X — нормований простір, Y — підпростір в X. Розглянемо оператор $R\colon X^* \to Y^*$ (оператор обмеження), який ставить кожному функціоналові $f \in X^*$ його обмеження на підпростір Y. Оскільки кожний функціонал, заданий на Y, можна продовжити на весь X, оператор R сюр'єктивний. Ядро оператора R збігається з $Y^\perp$. Позначимо через U ін'єктивізацію оператора R. Згідно з означенням ін'єктивизації $U \in L(X^*/Y^\perp, Y^*)$, і якщо $f \in X^*$ і $[f]$ — відповідний елемент фактор-простору $X^*/Y^\perp$, то $U[f]$ — функціонал, який діє на елемент $y \in Y$ за правилом $(U[f])\,(y) = f(y)$. Оператор U бієктивний (як ін'єктивізація сюр'єктивного оператора) і називається *канонічним ізоморфізмом просторів* $X^*/Y^\perp$ і Y^*.

Теорема 1. *Канонічний ізоморфізм просторів $X^*/Y^\perp$ і Y^* є ізометрією, тобто для будь-якого $[f] \in X^*/Y^\perp$ правильна рівність $\|U[f]\| = \|[f]\|$.*

Доведення. $U[f]$ — лінійний неперервний функціонал, заданий на підпросторі Y. За теоремою Гана-Банаха існує g — продовження функціонала $U[f]$ на весь X з $\|g\| = \|U[f]\|$. Оскільки функціонали g і f збігаються на Y, $[f] = [g]$. Маємо

$$\|U[f]\| = \|g\| \geqslant \|[g]\| = \|[f]\|\,.$$

Навпаки, оператор обмеження R не збільшує норми функціонала, тобто $\|R\| \leqslant 1$. Оскільки U — ін'єктивізація оператора R, то й $\|U\| \leqslant 1$. Відповідно, $\|U[f]\| \leqslant \|[f]\|$. □

Часто клас еквівалентності $[f]$ ототожнюють з функціоналом $U[f]$ і говорять, що клас еквівалентності $[f]$ діє на елемент $y \in Y$ за правилом $[f](y) = f(y)$. За такої домовленості можна сказати, що $X^*/Y^\perp$ і Y^* — це один і той самий простір: $X^*/Y^\perp = Y^*$.

Аналогічний опис існує і для простору, спряженого до фактор-простору. Цей опис, який виражається умовною рівністю $(X/Y)^* = Y^\perp$, читач отримає, розв'язавши нижченаведені вправи.

Вправи

Нехай $q\colon X \to X/Y$ — фактор-відображення ($q(x) = [x]$ для всіх $x \in X$), $q^*\colon (X/Y)^* \to X^*$ — відповідний спряжений оператор. Доведіть, що:

1. Оператор q^* діє за правилом $(q^*f)(x) = f([x])$.
2. Образ оператора q^* збігається з $Y^\perp$.
3. Оператор q^* здійснює бієктивну ізометрію просторів $(X/Y)^*$ і $Y^\perp$.

Нехай j — оператор природного вкладення підпростору Y у ширший простір X ($j(y) = y$ для всіх $y \in Y$), $j^*\colon X^* \to Y^*$ — його спряжений оператор.

4. Перевірте, що j^* збігається з оператором обмеження R.

Коментарі до вправ

9.1.2

Вправа 3. Див. теорему 4 п. 16.2.3

Вправа 6. Якщо неперервна функція перетворюється в 0 на множині, то вона перетворюється в 0 і на замиканні цієї множини. Тому, не зменшуючи загальності, множину Δ можна вважати замкненою. Нехай $\lambda\,(\Delta) \neq 0$, де λ — міра Лебега на $[a, b]$. Тоді функціонал $F_\Delta(f) = \int_\Delta f d\lambda$ є ненульовим неперервним функціоналом на $C_p[a, b]$, $\operatorname{Ker} F_\Delta$ — нещільна множина в $C_p[a, b]$, відтак, і $V_\Delta \subset \operatorname{Ker} F_\Delta$ нещільна. Обернене твердження, хоча і можна довести безпосередньо, зручніше вивести, спираючись на факти, які буде викладено пізніше: на теорему 3 п. 9.2.2, з якої випливає, що якщо підпростір V_Δ не щільний в $C_p[a, b]$, то існує ненульовий неперервний функціонал, що анулює всі V_Δ, і на теорему про загальний вигляд лінійного функціонала в L_p (розділ 14).

9.3.3

Вправа 2. Нехай $[a_\gamma, b_\gamma]$, $\gamma \in \Gamma$ — сім'я попарно перетинних відрізків (кулі в $\mathbb{R}$ — це і є відрізки). Тоді для будь-яких $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ виконується нерівність $a_{\gamma_1} \leqslant b_{\gamma_2}$ (інакше відповідні відрізки не перетиналися б). Це означає, що число $a = \sup_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma$ лежить праворуч від усіх лівих і ліворуч від усіх правих кінців відрізків $[a_\gamma, b_\gamma]$, тобто лежить на перетині цих відрізків.

Вправа 4. Доведення цієї теореми Нахбіна і основні відомості про 1-ін'єктивні простори див. у підручнику Л. Канторовича і Г. Акілова [К-А, розділ 5, п. 8.3]. Про ін'єктивні простори можна прочитати в книзі Дж. Лінденштраусса і Цафрірі [L-T, том 1, §2.f].

Вправа 6. Потрібно використати індукцію за N. Нехай $A_1, ..., A_N$ — опуклі множини, які задовольняють умову. За припущенням індукції множина $B = \bigcap_{k=1}^{N-1} A_k$ — непорожня замкнена опукла множина. Припустимо, що твердження не виконується, тобто B не перетинається з A_N. Тоді існує така пряма l, що B і A_N лежать строго по різні боки від l. Розглянемо множини $C_k = A_k \cap l$, $k = 1, 2, ..., N-1$. Оскільки кожна з множин $A_k \cap A_j$, $1 \leqslant k \leqslant j \leqslant N-1$ перетинає і B і A_N, то на підставі опуклості всі множини $A_k \cap A_j$, $1 \leqslant k \leqslant j \leqslant N-1$ перетинаються з l. Іншими словами, множини C_k непорожні і попарно перетинаються. Оскільки C_k — це замкнені відрізки на l, звідси випливає (див. вправу 2 і коментар до неї), що перетин всіх C_k, $k = 1, 2, ..., N-1$ непорожній. Тобто непорожнім буде і $B \cap l = \bigcap_{k=1}^{N-1} C_k$, що суперечить нашому вибору прямої l.

Вправа 10. Формулювання: нехай $A_1, ..., A_N$ — опуклі замкнені обмежені множини в $\mathbb{R}^n$, будь-які $n+1$ з яких перетинаються. Тоді всі N множин мають спільну точку. Доведення цілком аналогічне вищенаведеному доведенню плоского варіанта теореми Геллі. Інші варіанти теореми Геллі та її застосування можна прочитати у книзі Г. Хадвігера і Г. Дебрунера [H-D].