Розділ 5. Лінійні простори, лінійні функціонали і теорема Гана-Банаха

5.1. Лінійні простори

5.1.1. Основні означення

Нехай $\mathbb{K}$ — деяке поле. Множина X із заданими на ній операціями додавання елементів і множення на елементи з $\mathbb{K}$ називається *лінійним простором над* $\mathbb{K}$, якщо X є абелевою групою щодо додавання і для будь-яких λ, μ з $\mathbb{K}$ і будь-яких x, y з X виконуються такі співвідношення, які пов'язують множення на елементи з $\mathbb{K}$ з додаванням:

— $1 \cdot x = x$;

— $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$;

— $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$;

— $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$.

У курсі функціонального аналізу розглядаються лінійні простори над полем дійсних або комплексних чисел. Надалі ми використовуватимемо символ $\mathbb{K}$ для позначення поля, якщо міркування можна застосувати однаковою мірою як до дійсних, так і до комплексних чисел. Елементи поля $\mathbb{K}$ називатимемо також числами або скалярами, а для елементів лінійного простору будемо використовувати також термін «вектори».

Нехай A — підмножина лінійного простору X. Елемент $x \in X$ називається *лінійною комбінацією* елементів множини A, якщо він зображується у вигляді

$$x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k,$$

де $\lambda_k \in \mathbb{K}$, $x_k \in A$. Множина всіх лінійних комбінацій елементів множини A називається *лінійною оболонкою* множини A і позначається $\operatorname{Lin} A$. Зазначимо, що, навіть якщо множина A нескінченна, то при складані лінійних комбінацій використовуються лише скінченні (хоча й як завгодно великі) набори елементів з A.

Наведений учбовий текст є витягом з підручнику
Кадець В.М. Курс функціонального аналізу та теорії міри. – Львів: Видавець І.Е. Чижиков, 2012. – 590 с. – (Серія "Університетська бібліотека") ISBN 978-966-2645-03-3
Усі посилання на теореми, вправи, означення, такі що не увійшли до цього тексту – це посилання на підручник.

Підмножина Y лінійного простору X називається *лінійним підпростором*, якщо для будь-яких λ, μ з $\mathbb{K}$ і будь-яких x, y з Y лінійна комбінація $\lambda x + \mu y$ також лежить в Y. Лінійна оболонка множини A — це найменший лінійний підпростір, який містить A.

Підмножина A лінійного простору X називається *повною*, якщо $\operatorname{Lin} A = X$; A називається *лінійно незалежною*, якщо для будь-якого скінченного набору елементів $x_k \in A$, $k = 1, 2, ..., n$, рівність $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0$ виконується, тільки якщо всі коефіцієнти λ_k дорівнюють 0. Повна лінійно незалежна підмножина називається *базисом Гамеля.* Якщо в просторі X існує скінченний базис Гамеля, простір називається *скінченновимірним*, у протилежному випадку простір називається *нескінченновимірним.* На відміну від лінійної алгебри, функціональний аналіз вивчає переважно нескінченновимірні простори.

Вправи

1. Пригадайте доведення того, що у скінченновимірному просторі X кількість елементів будь-якого базису Гамеля одна і та сама (це число $\dim X$ називається вимірністю простору X). Доведіть, що:

— якщо в лінійному просторі існує нескінченна лінійно незалежна множина, то простір нескінченновимірний;

— якщо в лінійному просторі існує скінченна повна система векторів, то простір скінченновимірний;

— якщо в лінійному просторі існує зліченна повна система векторів, то будь-який базис Гамеля не більш ніж зліченний;

— якщо в лінійному просторі існує зліченна лінійно незалежна система векторів, то будь-який базис Гамеля містить, принаймні, зліченне число елементів;

— якщо в лінійному просторі існує зліченний базис Гамеля, то будь-який інший базис Гамеля цього простору також зліченний.

Розв'яжіть попередні три вправи із заміною зліченності на будь-яку іншу фіксовану потужність.

2. Доведіть, що такі простори нескінченновимірні:

— простір $\mathcal{P}$ всіх поліномів однієї змінної;

— простір $C\,[a, b]$ неперервних скалярнозначних функцій на відрізку $[a, b]$;

— простір всіх інтегровних за Лебегом скалярнозначних функцій на відрізку $[a, b]$.

3. Описати ті компакти K, для яких простір $C(K)$ скінченновимірний. Для яких просторів з мірою буде скінченновимірним простір всіх інтегровних за Лебегом скалярнозначних функцій на (Ω, Σ, μ)?

5.1.2. Впорядковані множини і лема Цорна

Нехай $(\Gamma, \prec)$ — впорядкована множина, тобто множина на якій задане відношення порядку $\prec$. Якщо для елементів $a, b \in \Gamma$ виконується співвідношення $b \prec a$, — говоритимемо, що елемент a *мажорує* елемент b. Якщо при цьому $a \neq b$, то говоримо, що a строго мажорує b. Підмножина $A \subset \Gamma$ називається *обмеженою*, якщо в Γ існує елемент, який мажорує всі елементи множини A. Такий елемент називається *верхньою межею* підмножини A. Підмножина $A \subset \Gamma$ називається *ланцюгом* або *лінійно впорядкованою підмножиною*, якщо будь-які два елементи $a, b \in A$ порівняльні, тобто або $a \prec b$, або $b \prec a$. Елемент $a \in \Gamma$ називається *максимальним елементом* множини Γ, якщо в Γ не існує елемента, що строго мажорує a. Впорядкована множина Γ називається *індуктивною*, якщо $\Gamma \neq \varnothing$ і кожен ланцюг в Γ обмежений.

Так історично склалось, що наступне твердження, хоча і має назву «лема», тепер часто приймається як одна з аксіом теорії множин. По суті, ця аксіома для незліченних множин є заміною принципу математичної індукції.

Лема Цорна. *Кожна індуктивна впорядкована множина має максимальний елемент.*

Вправи

1. На координатній площині $\mathbb{R}^2$ розглянемо таке впорядкування: $(x_1, x_2) \prec (y_1, y_2)$, якщо або $x_1 + x_2 < y_1 + y_2$, або $(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$.

— Наведіть приклад множини в $\mathbb{R}^2$, в якої при такому впорядкуванні немає максимального елемента.

— Наведіть приклад множини, яка має два максимальних елементи при наведеному впорядкуванні.

— Наведіть приклад множини, яка має при такому впорядкуванні нескінченно багато максимальних елементів.

2. Доведіть, що в будь-якій впорядкованій множині кожен скінченний ланцюг Γ містить найбільший елемент: $\exists a \in \Gamma \forall b \in \Gamma \; b \prec a$. Чи правильне це твердження для нескінченних ланцюгів?

5.1.3. Теорема існування базису Гамеля

Теорема. *У будь-якому лінійному просторі існує базис Гамеля.*

Доведення. Нехай X — лінійний простір. Розглянемо Γ — сім'ю всіх лінійно незалежних підмножин простору X і задамо на Γ природне відношення порядку: підмножина A мажорує підмножину B, якщо $A \supset B$. Доведемо, що впорядкована множина Γ індуктивна. Для цього виділимо довільний ланцюг $\Gamma_1 \subset \Gamma$ і покажемо, що множина $M = \bigcup_{A \in \Gamma_1} A$ — об'єднання всіх множин, які є елементами ланцюга Γ_1, є верхньою межею в Γ ланцюга Γ_1. На підставі того, що M мажорує всі елементи ланцюга Γ_1, нам тільки треба довести, що $M \in \Gamma$. Іншими словами, нам потрібно показати, що M — лінійно незалежна множина. Нехай $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ — довільна скінченна підмножина в M; B_k, $k = 1, 2, \dots, n$ — відповідні елементи ланцюга Γ_1, які містять a_k: $a_k \in B_k$. Оскільки множини B_k попарно порівняльні, одна з них (скажімо, B_j) містить решту. Тобто $A \subset B_j$, B_j лінійно незалежна, отже, і A лінійно незалежна. Ми довели, що будь-яка скінченна підмножина множини M лінійно незалежна, отож і M — лінійно незалежна множина.

Згідно з лемою Цорна, в Γ існує максимальний елемент A. Покажемо, що A і є потрібний базис Гамеля. Властивість лінійної незалежності має будь-який елемент сім'ї Γ, зокрема, і множина A. Доведемо повноту множини A. Нехай $\operatorname{Lin} A \neq X$. Виберемо довільний елемент $x \in X \setminus \operatorname{Lin} A$. Тоді $A \cup \{x\}$ — лінійно незалежна множина, яка строго мажорує A, що суперечить максимальності A. □

Вправи

1. Доведіть, що будь-яку лінійно незалежну множину в лінійному просторі можна доповнити до базису Гамеля.

2. Нехай X_1 — підпростір лінійного підпростору X. Довести, що існує підпростір $X_2 \subset X$ з такими властивостями: $\mathrm{Lin}\,(X_1 \cup X_2) = X$, $X_1 \cap X_2 = \{0\}$.

3. Вкажіть базис Гамеля в просторі $\mathcal{P}$ всіх поліномів від однієї змінної[1].

5.1.4. Лінійні операції над підмножинами

Нехай A_1, A_2 — підмножина лінійного простору X, λ_1, λ_2 — скаляри. Через $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2$ позначимо множину всіх елементів вигляду $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2$, де $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2$.

Вправи

1. $0 \in A_1 - A_2$ тоді і тільки тоді, коли A_1 і A_2 перетинаються.

2. Якщо A_1 і A_2 — підпростори, то $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2$ також буде підпростором.

3. Якщо A_1 і A_2 — підпростори, то $\mathrm{Lin}\,(A_1 \cup A_2) = A_1 + A_2$.

4. Якщо A_1 і A_2 — підпростори і $A_1 \cap A_2 = \{0\}$, то будь-який елемент $x \in A_1 + A_2$ має **єдине** зображення у вигляді $x = a_1 + a_2$, де $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2$. У цьому випадку, щоб підкреслити єдиність зображення, використовують символ $\oplus$ прямої суми: замість $A_1 + A_2$ пишуть $A_1 \oplus A_2$.

5. Підмножина Y лінійного підпростору X є підпростором тоді і тільки тоді, коли $\lambda_1 Y + \lambda_2 Y \subset Y$ для будь-яких скалярів λ_1 і λ_2.

6. Нехай A_1 і A_2 — замкнені відрізки на площині. Якою геометричною фігурою буде $A_1 + A_2$? В якому випадку $A_1 + A_2$ буде відрізком?

7. Нехай A — замкнена множина на площині. Довести, що $A + A = 2A$ тоді і тільки тоді, коли A опукла.

5.2. Лінійні оператори

5.2.1. Ін'єктивність і сюр'єктивність

Нехай X, Y — лінійні простори над полем скалярів $\mathbb{K}$. Відображення $T\colon X \to Y$ називається *лінійним оператором*, якщо для будь-яких $x_1, x_2 \in X$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ виконується співвідношення

$$T\,(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 T(x_1) + \lambda_2 T(x_2).$$

У випадку, якщо $Y = \mathbb{K}$, лінійний оператор $T\colon X \to \mathbb{K}$ називається *лінійним функціоналом.* Оператор $T\colon X \to Y$ називається *ін'єктивним*, якщо його *ядро* $\mathrm{Ker}\,T = T^{-1}\,(0)$ складається тільки з нуля. Оператор називається *сюр'єктивним*, якщо його *образ* $\mathrm{Im}\,T = T\,(X)$ збігається з усім простором Y. Нарешті, оператор називається *бієктивним* або *оборотним*, якщо він одночасно ін'єктивний і сюр'єктивний. Іншими словами, якщо рівняння $Tx = b$ має розв'язок при будь-якій правій частині $b \in Y$, то оператор T сюр'єктивний; якщо з розв'язності рівняння $Tx = b$ при заданій правій частині випливає єдиність розв'язку, то оператор T ін'єктивний. Отож, бієктивність означає існування і єдиність розв'язку при будь-якій правій частині.

Вправи

1. Перевірте, що ядро й образ лінійного оператора — це лінійні підпростори.

[1] Цікаво, що, не зважаючи на теорему існування, жодного явного прикладу базису Гамеля у складніших нескінченновимірних просторах (наприклад, в $C[0, 1]$) не відомо.

2. Нехай X, Y — лінійні підпростори, X_1 — підпростір в X. Доведіть, що будь-який лінійний оператор $T\colon\ X_1 \to Y$ можна продовжити до лінійного оператора, який діє з X в Y.
3. Нехай X, Y, Z — лінійні простори, $U\colon X \to Y$ і $V\colon Y \to Z$ — лінійні оператори, $T = V \circ U$. Доведіть, що: а) якщо T ін'єктивний, то U ін'єктивний; б) якщо сюр'єктивний T, то сюр'єктивний і V. Чи правильні обернені твердження?
4. Нехай $T\colon X \to Y$ — лінійний оператор, $A_1, A_2 \subset X$. Тоді $T(A_1 + A_2) = T(A_1) + T(A_2)$.
5. Нехай $T_1, T_2\colon X \to Y$ — лінійні оператори, $A \subset X$. Тоді $(T_1 + T_2)(A) \subset T_1(A) + T_2(A)$. Наведіть приклад, коли $(T_1 + T_2)(A) \neq T_1(A) + T_2(A)$.
6. Нехай $T\colon X \to Y$ — лінійний оператор, $A_1, A_2 \subset Y$. Тоді $T^{-1}(A_1 + A_2) \supset T^{-1}(A_1) + T^{-1}(A_2)$. Наведіть приклад, коли $T^{-1}(A_1 + A_2) \neq T^{-1}(A_1) + T^{-1}(A_2)$.

5.2.2. Фактор-простір

Нехай X — лінійний простір, X_1 — підпростір в X. Введемо таке відношення еквівалентності на X: $x \sim y$, якщо $x - y \in X_1$. Класом еквівалентності елемента x є множина

$$[x] = x + X_1 = \{x + y :\ y \in X_1\}\,.$$

Множина таких класів еквівалентності, наділена операціями, описаними в п. 5.1.4, називається *фактор-простором* простору X за підпростором X_1 і позначається X/X_1. Зазначимо найпростіші властивості лінійних операцій на фактор-просторі, з яких випливає, зокрема, що фактор-простір є лінійним простором.

1. Клас еквівалентності нуля — нульовий елемент фактор-простору.
2. $\lambda_1[x_1] + \lambda_2[x_2] = [\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2]$:
   $\lambda_1[x_1] + \lambda_2[x_2] = \lambda_1(x_1 + X_1) + \lambda_2(x_2 + X_1) = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + (\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_1) = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + X_1 = [\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2]$.

З фактор-простором тісно пов'язаний оператор q — *фактор-відображення* простору X на X/X_1 : $q(x) = [x]$. Лінійність оператора фактор-відображення випливає із властивості 2. Оператор фактор-відображення сюр'єктивний. Важливий приклад фактор-простору природно виникає в теорії інтегрування. Нехай (Ω, Σ, μ) — простір з мірою (скінченною або нескінченною). Через $L_0\,(\Omega, \Sigma, \mu)$ позначається фактор-простір простору X всіх вимірних скалярнозначних функцій на Ω по підпростору X_1 функцій, які мають нехтувані носії. У цьому прикладі відповідне відношення еквівалентності — це добре знайома читачеві рівність майже скрізь.

5.2.3. Ін'єктивізація лінійного оператора

Нехай X, Y — лінійні простори, $T\colon X \to Y$ — лінійний оператор, взагалі кажучи, не ін'єктивний. Ін'єктивізацією оператора T називається відображення $\tilde{T}\colon X/\mathrm{Ker}\,T \to Y$, яке ставить у відповідність класу еквівалентності $[x]$ елемента $x \in X$ елемент Tx: $\tilde{T}([x]) = Tx$.

Вправи

1. Перевірте коректність означення оператора $\tilde{T}$, а саме, якщо в елементів x_1 і x_2 збігаються класи еквівалентності, то $Tx_1 = Tx_2$. Іншими словами, $\tilde{T}([x])$ не залежить від вибору представника у класі еквівалентності $[x]$.
2. Перевірте лінійність та ін'єктивність оператора $\tilde{T}$.

3. Перевірте, що $T = \tilde{T} \circ q$, де $q\colon X \to X/\operatorname{Ker} T$ — оператор фактор-відображення. Отже, будь-який оператор можна розкласти в композицію сюр'єктивного й ін'єктивного операторів. Порівняйте з вправою 3 п. 5.2.1.

Нехай X — лінійний простір, X_1 — підпростір в X, X' — простір всіх лінійних функціоналів на X. *Анулятором* в X' підпростору X_1 називається множина $X_1^{\perp}$ всіх $f \in X'$, для яких $\operatorname{Ker} f \supset X_1$. Для кожного функціонала g на X/X_1 означимо функціонал $Ug \in X'$ рівністю $Ug(x) = g([x])$. Іншими словами, Ug — це композиція функціонала g з фактор-відображенням.

4. U — це лінійний ін'єктивний оператор.
5. $U\left((X/X_1)'\right) = X_1^{\perp}$, тобто $X_1^{\perp}$ — це лінійний підпростір, ізоморфний $(X/X_1)'$.

5.3. Опуклість

Функціональний аналіз в основному має справу з аналітичними об'єктами — функціями, послідовностями, границями і т. д., але підхід до цих об'єктів істотно відрізняється від підходів математичного аналізу. Замість вивчення індивідуальних функцій або послідовностей з тою чи іншою властивістю вводять у розгляд відповідні простори, підпростори чи підмножини. Завдяки такому підходу багато питань аналізу вдається звести до задач про взаємне розташування або властивості множин в тих чи інших просторах. Скажімо, питання про можливість наближення неперервної функції поліномом зводиться до питання про щільність в деякій метриці множини поліномів у просторі неперервних функцій; питання про означення інтеграла для неінтегровних за Ріманом функцій можна сформулювати як задачу продовження лінійного функціонала на ширший простір; задача Коші для диференціального рівняння перетворюється на задачу пошуку нерухомої точки відображення. Такий підхід дозволяє при пошуку розв'язку використовувати геометричну уяву, робити ескізи, розбирати приклади, де моделлю нескінченновимірних множин будуть плоскі чи просторові фігури. Проте для успішного застосування в задачах функціонального аналізу своєї геометричної інтуїції необхідно здобути певний досвід. Потрібно навчитись відрізняти істотні властивості моделі від специфіки плоского малюнку, навчитись перекладати ідеї, навіяні малюнком, на мову строгих математичних міркувань. Для цього, зокрема, потрібно коректно визначити, там, де це можливо, нескінченновимірні аналоги понять і побудов, які зазвичай використовуються в геометричних міркуваннях. У цьому розділі ми введемо такі аналоги для понять прямої, відрізка, опуклої множини, а також аналог розбиття простору площиною на два півпростори.

5.3.1. Означення і властивості

Нехай X — лінійний простір, $x, y \in X$, $x \neq y$. *Прямою, яка проходить через точки x і y,* називається множина всіх елементів вигляду $\lambda x + (1-\lambda)y$, де λ пробігає дійсну вісь. *Відрізком, який сполучає x і y,* називається множина елементів вигляду $\lambda x + (1-\lambda)y$, де $\lambda \in [0,1]$. Підмножина $A \subset X$ називається *опуклою*, якщо вона разом з будь-якими своїми двома точками містить увесь відрізок, який їх сполучає.

Вправи

1. Пряма і відрізок — це опуклі множини.
2. Перетин будь-якого числа опуклих множин опуклий.
3. Об'єднання двох опуклих множин може бути неопуклим.

4. Нехай X, Y — лінійні простори, $U\colon X \to Y$ — лінійний оператор. Перевірте, що для будь-якої A — опуклої підмножини в X — множина $U(A)$ також опукла. Перевірте, що якщо B — опукла підмножина в Y, то $U^{-1}(B)$ опукла.

Які з наведених нижче множин у просторі s всіх дійсних числових послідовностей є опуклими?

5. $\{a = (a_n)_1^\infty : \inf_n a_n > 1\}$.
6. $\{a = (a_n)_1^\infty : \inf_n a_n < 1\}$.
7. $\{a = (a_n)_1^\infty : \sup_n a_n = +\infty\}$.
8. $\left\{a = (a_n)_1^\infty : \lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty\right\}$.

Які з наведених нижче множин у просторі всіх дійсних функцій на відрізку $[0, 1]$ є опуклими?

9. Множина всіх неперервних функцій.
10. Множина всіх розривних функцій.
11. Множина всіх нескінченно диференційовних функцій.
12. Множина всіх ніде не диференційовних функцій.

Нехай A — підмножина лінійного простору X. Доведіть, що:

13. $A + A \supset 2A$.
14. Якщо A опукла, то $A + A = 2A$.

5.3.2. Опукла оболонка

Нехай $\{x_k\}_{k=1}^n$ — довільний скінченний набір елементів лінійного простору X. Елемент вигляду $x = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k$ називається *опуклою комбінацією* елементів x_k, якщо коефіцієнти $\{\lambda_k\}_{k=1}^n$ — невід'ємні числа і $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$.

Твердження. *Нехай A — опукла множина в лінійному просторі X, $\{x_k\}_{k=1}^n \subset A$. Тоді будь-яка опукла комбінація елементів x_k лежить в A.*

Доведення. Доведення будемо проводити індукцією за n — числом елементів, які беруть участь в опуклій комбінації. З означення опуклої множини відразу випливає база індукції — випадок $n = 2$. Розглянемо перехід від $n-1$ до n. Нехай $\{\lambda_k\}_{k=1}^n$ — невід'ємні числа, $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$, $x = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k$. Якщо серед λ_k є нулі, то x буде насправді комбінацією $n-1$ елемента, тобто $x \in A$ за припущенням індукції. Розглянемо випадок ненульових λ_k. Покладемо $\mu = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k$, $\mu_k = \lambda_k/\mu$, $k = 1, \ldots, n-1$. Тоді $y = \sum_{k=1}^{n-1} \mu_k x_k$ належить до A як опукла комбінація $n-1$ елемента з A. На підставі рівності $x = \mu y + \lambda_n x_n$ елемент x зображується у вигляді опуклої комбінації двох елементів з A, тобто $x \in A$. $\square$

Нехай A — довільна підмножина лінійного простору X. Множина всіх опуклих комбінацій елементів з A називається *опуклою оболонкою множини* A і позначається $\operatorname{conv}(A)$ або $\operatorname{conv} A$.

Вправи

Перевірте, що:

1. $\operatorname{conv}(A)$ — це опукла множина.
2. $\operatorname{conv}(A)$ — це найменша серед всіх опуклих множин, які містять A.
3. Якщо A складається з двох точок, то $\operatorname{conv}(A)$ — це відрізок, що сполучає вказані точки.

Доведіть, що:

4. На площині для множини, яка складається з трьох точок, опукла оболонка — це трикутник із вершинами в цих точках.
5. Опукла оболонка будь-якої множини A на площині — це об'єднання всіх трикутників із вершинами в точках множини A.

Чи буде твердження попередньої вправи виконане для множин у тривимірному просторі?

5.3.3. Гіперпідпростори і гіперплощини

Підпростір Y лінійного простору X називається *гіперпідпростором*, якщо існує такий вектор $e \in X \setminus Y$, що $\mathrm{Lin}\{e, Y\} = X$.

Твердження. *Для підпростору Y лінійного простору X такі умови еквівалентні:*

1. Y — гіперпідпростір в X.

2. $\dim X/Y = 1$.

3. Існує ненульовий лінійний функціонал f на X, для якого $\mathrm{Ker}\, f = Y$.

Доведення. 1. $\Rightarrow$ 2. Нехай Y — гіперпідпростір в X, $e \in X \setminus Y$ — такий елемент, що $\mathrm{Lin}\{e, Y\} = X$. Розглянемо $[e] \in X/Y$ — клас еквівалентності елемента e. $[e] \neq 0$, адже $e \notin Y$. Водночас $\mathrm{Lin}\,[e] = X/Y$, тобто в X/Y існує базис з одного елемента.

2. $\Rightarrow$ 3. Оскільки $\dim X/Y = 1$, існує ізоморфізм $U \colon X/Y \to \mathbb{K}$ нашого фактор-простору і поля скалярів. Означимо функціонал $f = U \circ q$, де q — фактор-відображення простору X на X/Y. Для цього функціонала $\mathrm{Ker}\, f = Y$.

3. $\Rightarrow$ 1. Нехай f — функціонал з п. 3. Виберемо елемент $e \in X$, для якого $f(e) = 1$. Очевидно, $e \in X \setminus Y$. Доведемо, що $\mathrm{Lin}\{e, Y\} = X$. Для цього візьмемо довільний вектор $x \in X$ і зобразимо його у вигляді $x = f(x)e + (x - f(x)e)$. У цьому запису другий доданок $x - f(x)e$ лежить в $\mathrm{Ker}\, f = Y$, тобто ми зобразили елемент x у вигляді $ae + y$, де $a \in \mathbb{K}$, $y \in Y$. □

Підмножина A лінійного простору X називається *гіперплощиною*, якщо вона є зсунутим гіперпідпростором. Іншими словами, гіперплощина в X — це множина вигляду $x + Y$, де $x \in X$, а Y — гіперпідпростір в X.

Вправи

1. Нехай f — ненульовий лінійний функціонал у просторі X, a — довільне число. Доведіть, що *лінія рівня* $f_a = \{x \in X : f(x) = a\}$ функціонала f утворює гіперплощину в X.

2. Довести, що будь-яка гіперплощина в X є лінією рівня деякого ненульового лінійного функціонала.

3. Нехай Y — гіперпідпростір в X. Довести, що $\mathrm{Lin}\{e, Y\} = X$ для будь-якого вектора $e \in X \setminus Y$.

4. Нехай ядра двох лінійних функціоналів збігаються. Доведіть, що ці функціонали лінійно залежні.

5. Нехай Y — гіперплощина у дійсному просторі X. На $X \setminus Y$ введемо таке відношення еквівалентності: $x_1 \sim x_2$, якщо відрізок, що сполучає ці точки, не перетинає цю гіперплощину. Перевірте, що так введене відношення справді є відношенням еквівалентності. $X \setminus Y$ розпадається на два класи еквівалентності. Ці класи еквівалентності називаються *півпросторами, породженими гіперплощиною* Y.

6. Нехай гіперплощина — це лінія рівня f_a функціонала f у дійсному просторі X. Перевірте, що півпросторами, породженими гіперплощиною f_a, є множини $f_{<a} = \{x \in X : f(x) < a\}$ і $f_{>a} = \{x \in X : f(x) > a\}$.

7. Чому в двох попередніх вправах важлива дійснозначність простору?

Означення. Підпростір Y лінійного простору X має *ковимірність* n ($\mathrm{codim}_X Y = n$), якщо вимірність фактор-простору X/Y дорівнює n.

8. $\operatorname{codim}_X Y \leqslant n$ тоді і тільки тоді, коли існують n векторів $\{x_k\}_1^n \subset X$ таких, що $\mathrm{Lin}\{x_1, \ldots, x_n, Y\} = X$.
9. $\operatorname{codim}_X Y \leqslant n$ тоді і тільки тоді, коли Y має ненульовий перетин з будь-яким підпростором Z в X вимірності, яка більша або дорівнює $n+1$.
10. $\operatorname{codim}_X Y = n$ тоді і тільки тоді, коли існує підпростір Z в X такий, що $\dim Z = n$, $Z \cap Y = \{0\}$, $Z + Y = X$.
11. Нехай $Y \subset Z$ — підпростір простору X. Тоді $\operatorname{codim}_X Y = \operatorname{codim}_Z Y + \operatorname{codim}_X Z$.
12. Для будь-яких підпросторів Y, Z простору X виконуються співвідношення:

$$\max\{\operatorname{codim}_X Y, \operatorname{codim}_X Z\} \leqslant \operatorname{codim}_X (Y \cap Z) \leqslant \operatorname{codim}_X Y + \operatorname{codim}_X Z.$$

13. $\operatorname{codim}_X Y = \dim Y^\perp$.
14. $\operatorname{codim}_X Y \leqslant n$ тоді і тільки тоді, коли на X існує такий набір з n лінійних функціоналів, що перетин їхніх ядер міститься в Y.
15. $\operatorname{codim}_X Y = n$ тоді і тільки тоді, коли на X існує такий лінійно незалежний набір з n лінійних функціоналів, що перетин їхніх ядер збігається з Y.
16. Нехай f, $\{f_k\}_{k=1}^n$ — лінійні функціонали на X і $\operatorname{Ker} f \supset \bigcap\limits_{k=1}^{n} \operatorname{Ker} f_k$. Тоді $f \in \mathrm{Lin}\{f_k\}_{k=1}^n$.

5.4. Теорема Гана-Банаха про продовження лінійного функціонала

5.4.1. Опуклі функціонали

Дійснозначна функція p, задана на лінійному просторі X, називається *опуклим функціоналом*, якщо вона задовольняє такі умови:

– $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ для будь-якого вектора $x \in X$ і будь-якого невід'ємного числа λ (додатна однорідність) і

– $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$ для будь-яких $x, y \in X$ (нерівність трикутника).

Вправи

1. Нехай $t > 0$, p — опуклий функціонал. Тоді tp — також опуклий функціонал.
2. Модуль опуклого функціонала — опуклий функціонал.
3. Нехай p_1 і p_2 — опуклі функціонали. Тоді $p_1 + p_2$ і $\max(p_1, p_2)$ — також опуклі функціонали.
4. Кожен лінійний функціонал на дійсному просторі є опуклим функціоналом. Перевірте, що якщо p і $-p$ — опуклі функціонали, то p — лінійний функціонал.
5. Нехай p — опуклий функціонал, $x \in X$ — фіксований елемент, $p(x) \leqslant 0$ і $p(-x) \leqslant 0$. Тоді $p(x) = p(-x) = 0$.

Які з перелічених нижче виразів задають опуклі функціонали у просторі $C[0,1]$ неперервних функцій на відрізку $[0,1]$?
6. $p_1(f) = \max\{f(t) :\ t \in [0,1]\}$;
7. $p_2(f) = \min\{f(t) :\ t \in [0,1]\}$;
8. $p_3(f) = p_1(f) - p_2(f)$;
9. $p_4(f) = |f|$.

Які з наведених нижче виразів задають опуклі функціонали у просторі l_∞ всіх обмежених числових послідовностей?
10. $p_5(x) = x_5$;
11. $p_6(x) = x_5 \cdot x_6$;

12. $p_7(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|$;

13. $p_8(x) = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$;

14. $p_9(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |x_n|$.

(В останніх чотирьох вправах x — це послідовність $(x_1, x_2, \ \dots, x_n, \ \dots)$).

Існує тісний зв'язок між опуклими функціоналами й опуклими множинами. Опису цього зв'язку присвячено наступний параграф.

5.4.2. Функціонал Мінковського

Підмножина A лінійного простору X називається *поглинаючою*, якщо для будь-якого $x \in X$ існує таке $n \in \mathbb{N}$, що $\frac{1}{t}x \in A$ для будь-якого $t > \ n$. Зазначимо, що поглинаюча множина A повинна містити нульовий елемент простору і $\bigcup_{n=1}^{\infty} nA = X$.

Нехай A — опукла поглинаюча множина в X. *Функціоналом Мінковського* множини A називається дійсна функція, задана на X формулою

$$\varphi_A(x) = \inf\left\{t > 0 : \ \frac{1}{t}x \in A\right\}.$$

Функціонал φ_A зв'язаний з множиною A такими очевидними співвідношеннями:

— якщо $x \in A$, то $\varphi_A(x) \leqslant 1$;

— якщо $\varphi_A(x) < 1$, то $x \in A$.

Твердження. *Нехай A — опукла поглинаюча множина в X. Тоді $\varphi_A(x)$ — опуклий функціонал, який набуває невід'ємні значення.*

Доведення. Доведемо спочатку додатну однорідність функціонала. Нехай $\lambda > 0$, $x \in X$. Тоді

$$\varphi_A(\lambda x) = \inf\left\{t > 0 : \ \frac{1}{t}\lambda x \in A\right\} = \inf\left\{\lambda s > 0 : \ \frac{1}{s}x \in A\right\} =$$
$$= \lambda \inf\left\{s > 0 : \ \frac{1}{s}x \in A\right\} = \lambda\varphi_A(x)$$

(в останньому ланцюжку рівностей використане перетворення $t \mapsto \lambda s$).

Тепер перевіримо нерівність трикутника. Нехай $x, y \in X$. Доведемо, що $\varphi_A(x+y) \leqslant \varphi_A(x) + \varphi_A(y)$. Очевидно, для цього достатньо показати, що для будь-яких $a > \varphi_A(x)$, $b > \varphi_A(y)$ правильна нерівність $\varphi_A(x+y) \leqslant a+b$. Зафіксуємо числа $a > \varphi_A(x)$, $b > \varphi_A(y)$. Тоді $\varphi_A\left(\frac{x}{a}\right) < 1$, $\varphi_A\left(\frac{y}{b}\right) < 1$, тобто $\frac{x}{a} \in A$, і $\frac{y}{b} \in A$. На підставі опуклості множини A елемент

$$\frac{x+y}{a+b} = \frac{a}{a+b}\frac{x}{a} + \frac{b}{a+b}\frac{y}{b}$$

також лежить в A. Отже, $\varphi_A\left(\frac{x+y}{a+b}\right) \leqslant 1$, і потрібну нерівність $\varphi_A(x+y) \leqslant a+b$ доведено. $\square$

Вправи

Множина A в лінійному просторі X називається *збалансованою*, якщо для будь-якого скаляра λ, $|\lambda| \leqslant 1$ виконується включення $\lambda A \subset A$.

1. Нехай A — опукла збалансована множина. Тоді $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} nA$ — лінійний підпростір в X і A — поглинаюча множина в Y.

Нехай p — опуклий функціонал, який набуває невід'ємні значення. Покладемо $A = \{x \in X : p(x) < 1\}$. Перевірте, що:
2. A — опукла поглинаюча множина.
3. Для будь-якого $x \in A$ існує таке $\varepsilon > 0$, що $(1+\varepsilon)\, x \in A$.
4. $\varphi_A = p$.

Нехай A, B — опуклі поглинаючі множини. Перевірте, що:
5. $\varphi_{A \cap B} = \max(\varphi_A, \varphi_B)$.
6. $\varphi_{-A}(x) = \varphi_A(-x)$.

5.4.3. Теорема Гана-Банаха в аналітичній формі

Теорема Гана-Банаха про продовження лінійного функціонала, яку ми доведемо в цьому параграфі (інша назва — теорема Гана-Банаха в аналітичній формі), — це одна з найважливіших теорем курсу функціонального аналізу. Вона часто використовується як в рамках самого предмета, так і в його застосуваннях до багатьох суміжних дисциплін. Деякі з таких застосувань читач знайде в нашому курсі. Традиційно теорему Гана-Банаха відносять до «основних принципів функціонального аналізу». До цих «основних принципів» відносять також теорему Гана-Банаха в геометричній формі (п. 9.2), теореми Банаха про обернений оператор, відкрите відображення і замкнений графік, а також теорему Банаха-Штейнгауза (див. розділ 10).

Теорема. *Нехай на дійсному лінійному просторі X задано опуклий функціонал p; Y — підпростір в X, f — лінійний функціонал на Y і $f(y) \leqslant p(y)$ для будь-якого $y \in Y$. Тоді f можна продовжити до лінійного функціонала g, заданого на всьому X, із збереженням умови мажорування: $g(x) \leqslant p(x)$ для будь-якого $x \in X$.*

Доведення. Спочатку розберемо частковий випадок, коли Y — гіперпідпростір в X. Нехай $e \in X \backslash Y$ — такий вектор, що $\mathrm{Lin}\{e, Y\} = X$. Будь-який елемент простору X однозначно зображується у вигляді $x = \lambda e + y$, де $y \in Y$, а λ — дійсний скаляр. Тому потрібний функціонал g — продовження з Y функціонала f — однозначно визначається своїм значенням в точці e: $g(\lambda e + y) = \lambda g(e) + f(y)$. Для виконання умови мажорування число $g(e)$ повинно задовольняти умову

$$\lambda g(e) + f(y) \leqslant p(\lambda e + y) \text{ для будь-яких } \lambda \in \mathbb{R} \text{ і } y \in Y. \qquad (*)$$

При $\lambda = 0$ ця умова виконана за припущеннями теореми. При додатному λ умова $(*)$ переписується у вигляді

$g(e) \leqslant \frac{1}{\lambda}(p(\lambda e + y) - f(y))$ для будь-яких $\lambda > 0$ і $y \in Y$,

а для від'ємних $\lambda = -\mu$ умова (*) переписується у вигляді

$g(e) \geqslant -\frac{1}{\mu}(p(-\mu e + v) - f(v))$ для будь-яких $\mu > 0$ і $v \in Y$.

Отже, для існування потрібного продовження необхідно і достатньо виконання нерівності

$$\sup\left\{-\frac{1}{\mu}(p(-\mu e + v) - f(v)) : \mu > 0, v \in Y\right\} \leqslant$$
$$\leqslant \inf\left\{\frac{1}{\lambda}(p(\lambda e + y) - f(y)) : \lambda > 0, y \in Y\right\}.$$

Перевіримо це співвідношення. Нехай $\lambda, \mu > 0$; $y, v \in Y$. Переносячи члени, що містять f, в ліву, а що містять p — в праву частину, нерівність

$$-\frac{1}{\mu}(p(-\mu e + v) - f(v)) \leqslant \quad \frac{1}{\lambda}(p(\lambda e + y) - f(y))$$

зведемо до нерівності

$$\frac{1}{\mu} f(v) + \frac{1}{\lambda} f(y) \leqslant \frac{1}{\mu} p(-\mu e + \nu) + \frac{1}{\lambda} p(\lambda e + y).$$

Остання ж випливає з умови мажорування для f:

$$\frac{1}{\mu} f(v) + \frac{1}{\lambda} f(y) = f\left(\frac{1}{\mu} v + \frac{1}{\lambda} y\right) \leqslant p\left(\frac{1}{\mu} v + \frac{1}{\lambda} y\right) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{\mu} p(-\mu e + y) + \frac{1}{\lambda} p(\lambda e + y).$$

Отже, частковий випадок підпростору ковимірності 1 розглянуто. Доведений факт можна сформулювати так: лінійний функціонал f, заданий на Y і який задовольняє умову мажорування, можна продовжити на лінійну оболонку підпростору Y і довільного одного елемента зі збереженням умови мажорування. Застосовуючи це твердження ще раз, потім ще і ще раз, ми можемо отримати продовження функціонала f на лінійну оболонку підпростору Y і довільного скінченного числа векторів. На жаль, з огляду на нескінченновимірність простору X подібними міркуваннями не завжди вдається отримати продовження на весь простір. Тому для завершення міркувань нам потрібно скористатись лемою Цорна — стандартним способом організації індуктивних міркувань у випадку незліченної кількості потрібних кроків.

Розглянемо Γ — сім'ю всіх пар вигляду (Z, h), де Z — підпростір в X, який містить Y, а h — лінійний функціонал на Z, який збігається на Y з f і задовольняє на Z умову мажорування. По суті, елементи сім'ї Γ — це продовження функціонала f. Нам потрібно довести, що серед елементів $(Z, h) \in \Gamma$ існує такий, що $Z = X$. Введемо на Γ відношення порядку: $(Z_1, h_1) \succ (Z_2, h_2)$, якщо $Z_1 \supset Z_2$ і обмеження функціонала h_1 на Z_2 збігається з h_2. Легко бачити, що впорядкована множина Γ індуктивна. Відтак, за лемою Цорна, в Γ існує максимальний елемент (Z_0, h_0). Якщо б Z_0 не збігалося з усім X, ми могли б, за вже доведеним частковим випадком теореми Гана-Банаха, продовжити h_0 зі збереженням умови мажорування на підпростір вигляду $\mathrm{Lin}\{e, Z_0\}$, який строго містить Z_0. Існування такого продовження суперечило б максимальності пари (Z_0, h_0), тобто $Z_0 = X$, що й потрібно було довести. □

Зауваження. У теоремі Гана-Банаха стверджується існування продовження, але це продовження може бути не єдиним (наведіть приклад у випадку двовимірного X і одновимірного Y). Відповідно, у всіх застосуваннях теореми Гана-Банаха, які зустрічатимуться надалі, стверджується існування того чи іншого об'єкта, але єдиності може і не бути.

Вправи

1. Де у формулюванні і доведенні наведеної вище теореми Гана-Банаха використовується дійсність розглядуваних просторів і, отже, функціоналів?

2. Спробуйте придумати і довести яке-небудь узагальнення теореми Гана-Банаха на комплексний випадок.

3. Якщо фактор-простір X/Y має скінченний або зліченний базис Гамеля, теорему Гана-Банаха можна довести без використання леми Цорна. Як саме?

5.5. Деякі застосування теореми Гана-Банаха

5.5.1. Інваріантне середнє на комутативній півгрупі

Нехай G — комутативна півгрупа; півгрупову операцію на G позначатимемо знаком '$+$'. Розглянемо лінійний простір $l_\infty(G)$ всіх обмежених дійснозначних функцій на G. Кожен елемент $g \in G$ породжує *оператор зсуву* $S_g \colon l_\infty(G) \to l_\infty(G)$, який діє за правилом $(S_g F)(h) = F(g + h)$. Лінійний функціонал I на $l_\infty(G)$ називається *інваріантним середнім* на G, якщо він задовольняє таку умову:

— $\inf\limits_{g\in G} F(g) \leqslant I(F) \leqslant \sup\limits_{g\in G} F(g)$ для будь-якої функції $F \in l_\infty(G)$ (тобто $I(F)$ — середнє значення для F);

— $I(S_g F) = I(F)$ для будь-якої функції $F \in l_\infty(G)$ і будь-якого $g \in G$ (інваріантність відносно зсувів).

У цьому параграфі ми покажемо, що інваріантне середнє існує на будь-якій комутативній півгрупі G.

Для функції $F \in l_\infty(G)$ означимо величину

$$p(F) = \inf\left\{\sup_{h\in G} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} F(g_k + h) : n \in \mathbb{N},\ (g_k)_{k=1}^{n} \in G^n\right\},$$

де інфімум береться за всіма скінченними наборами $g_k \in G$, можливо, з повтореннями.

Твердження. *p — опуклий функціонал на $l_\infty(G)$, який задовольняє для будь-якої функції $F \in l_\infty(G)$ і будь-якого $g \in G$ умови:*

(1) $p\left(S_g F - F\right) \leqslant 0$;

(2) $p\left(F - S_g F\right) \leqslant 0$

(умови (1) і (2) разом, згідно з вправою 5 п. 5.4.1, означають рівність нулю виразів, які оцінюються).

Доведення. Додатна однорідность тут очевидна, перевіримо нерівність трикутника. Нехай $F_1, F_2 \in l_\infty(G)$, $\varepsilon > 0$. Виберемо такі елементи g_k^1, $k = 1, 2, \ \dots\ , n_1$ і g_k^2, $k = 1, 2, \ \dots\ , n_2$ півгрупи G, що

$$\sup_{h \in G} \left\{ \frac{1}{n_i} \sum_{k=1}^{n_i} F_i\left(g_k^i + h\right) \right\} < p(F_i) + \varepsilon, \quad i = 1, 2.$$

Тоді

$$p(F_1 + F_2) \leqslant \sup_{h \in G} \left\{ \frac{1}{n_1 n_2} \sum_{j=1}^{n_2} \sum_{k=1}^{n_1} (F_1 + F_2)\left(g_k^1 + g_j^2 + h\right) \right\}.$$

Скористаємось тим, що супремум суми не перевищує суми супремумів, і продовжимо оцінку:

$$\leqslant \frac{1}{n_2} \sum_{j=1}^{n_2} \sup_{h \in G} \left\{ \frac{1}{n_1} \sum_{k=1}^{n_1} F_1\left(g_k^1 + g_j^2 + h\right) \right\} +$$

$$+ \frac{1}{n_1} \sum_{k=1}^{n_1} \sup_{h \in G} \left\{ \frac{1}{n_2} \sum_{j=1}^{n_2} F_2\left(g_k^1 + g_j^2 + h\right) \right\} \leqslant p\left(F_1\right) + p\left(F_2\right) + 2\varepsilon,$$

що, на підставі довільності ε, доводить потрібну нерівність трикутника.

Перевіримо тепер умову (1).

$$p\left(S_g F - F\right) \leqslant \sup_{h \in G} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(S_g F - F\right)(h + kg) \right\} =$$

$$= \sup_{h \in G} \frac{1}{n}\left(F\left(h + (n+1)\,g\right) - F\left(h + g\right)\right) \leqslant \frac{2}{n} \sup_{h \in G} \left|F\left(h\right)\right|.$$

Спрямувавши в останній нерівності n до нескінченності, отримаємо потрібну оцінку. Нерівність (2) доводиться аналогічно. □

Позначимо функцію, яка дорівнює на G тотожній одиниці, через $\mathbb{1}$. Зазначимо ще дві очевидні властивості функціонала p:

– $p(\mathbb{1}) = 1$;

– якщо функція F скрізь менша або дорівнює нулю, то $p\left(F\right) \leqslant 0$.

Теорема. *На будь-якій комутативній півгрупі існує інваріантне середнє.*

Доведення. Розглянемо в $l_\infty(G)$ підпростір $Y = \mathrm{Lin}\{\mathbb{1}\}$. Означимо функціонал на Y рівністю $f\left(c \cdot \mathbb{1}\right) = c$. Очевидно, що функціонал f лінійний і $f \leqslant p$. Скористаємось теоремою Гана-Банаха і продовжимо f на весь $l_\infty(G)$ до лінійного функціонала I зі збереженням умови мажорування. Доведемо, що I є інваріантним середнім. Спочатку зазначимо властивість *монотонності* функціонала I: якщо $F_1, F_2 \in l_\infty(G)$, $F_1 \leqslant F_2$ у всіх точках, то $I(F_1) \leqslant I(F_2)$. Справді, за такої умови $F_1 - F_2 \leqslant 0$, отже,

$$I(F_1) - I(F_2) = I(F_1 - F_2) \leqslant p(F_1 - F_2) \leqslant 0.$$

З монотонності функціонала I одержуємо, що якщо функція F оцінюється зверху і знизу сталими: $c_1 \mathbb{1} \leqslant F \leqslant c_2 \mathbb{1}$, то $I(F)$ оцінюється тими самими константами: $c_1 \leqslant I(F) \leqslant c_2$. Отже, ми перевірили першу умову означення інваріантного середнього. Друга умова — інваріантність щодо зсувів — відразу випливає з умови мажорування і властивостей (1), (2) функціонала p:

$$I(S_g F) - I(F) = I(S_g F - F) \leqslant p(S_g F - F) \leqslant 0;$$

$$I(F) - I(S_g F) = I(F - S_g F) \leqslant p(F - S_g F) \leqslant 0. \qquad \square$$

Зауваження. Комутативність півгрупи не є необхідною умовою існування інваріантного середнього. Детальніше про групи, які допускають інваріантне середнє, можна прочитати в монографії [Pat].

5.5.2. Груба задача теорії міри

Нагадаємо, що ми довели раніше (п. 2.3.4) нерозв'язність так званої *тонкої задачі теорії міри:* побудови інваріантної щодо зсуву зліченно-адитивної ймовірнісної міри X, означеній на всіх підмножинах відрізка $[0, 1)$. Звідси ми виводили існування невимірних за Лебегом множин: якщо б кожна підмножина відрізка була вимірною за Лебегом, то міра Лебега була б розв'язком тонкої задачі теорії міри. Водночас аналогічна задача із заміною зліченної адитивності на скінченну адитивність (*груба задача теорії міри*) вже розв'язна.

Теорема (Банах). *Існує скінченно-адитивна міра μ, означена на всіх підмножинах відрізка $[0, 1)$, з $\mu([0, 1]) = 1$ й інваріантна щодо зсувів (тобто $\mu(A + t) = \mu(A)$ для будь-якої підмножини $A \subset [0, 1)$ і будь-якого $t \in \mathbb{R}$, таких, що $A + t \subset [0, 1)$).*

Доведення. Наділимо відрізок $[0, 1)$ операцією додавання за модулем 1: сума чисел a і b за модулем 1 — це дробова частина числа g. Зафіксуємо I — інваріантне середнє на цій групі. Міра μ, визначена рівністю $\mu(A) = I(\mathbb{1}_A)$, де $\mathbb{1}_A$ — характеристична функція множини A, і буде потрібною мірою. $\square$

Цікаво, що побудувати аналогічну міру на сфері тривимірного евклідового простору (тобто скінченно-адитивну ймовірнісну міру, визначену на всіх підмножинах сфери й інваріантну щодо ізометрій сфери) вже неможливо (Гаусдорф [Hau, 1914]). Причиною цього є складна структура групи ізометрій сфери. Читачеві, який зацікавився питаннями існування інваріантних мір, пропонуємо подивитись монографію [Wag] і огляд [Las], де розповідається про ефекти в дусі відомого парадоксу Банаха-Тарського, коли сфера розрізається на скінченне число «шматків», з яких вдається скласти дві нові сфери того ж розміру. Можливість такого розрізання, зрозуміло, приводила б до суперечності, якщо б «шматки» можна було «виміряти» за допомогою скінченно-адитивної інваріантної міри.

Вправи

Нехай μ — міра, а I — інваріантне середнє з попередньої теореми. Хоча ми довели, що ці об'єкти існують, жодних правил обчислення ми не запропонували. Більше того, інваріантне середнє (і, відповідно, інваріантна міра) на відрізку не єдине. Тим не менше, для деяких функцій інваріантне середнє можна обчислити, спираючись на означення цього об'єкта.

1. Доведіть, що $\mu([0, 1/n)) = 1/n$.
2. Нехай $m < n$. Доведіть, що $\mu([0, m/n)) = m/n$.
3. Нехай $[a, b) \subset [0, 1)$. Доведіть, що $\mu([a, b)) = b - a$.
4. Нехай f — кусково-стала функція на $[0, 1)$. Тоді $I(f) = \int_0^1 f(t)dt$.
5. Доведіть, що $I(f) = \int_0^1 f(t)dt$ для будь-якої інтегровної за Ріманом функції на відрізку.

Для інтегровних за Лебегом обмежених функцій $I(f)$ може і не збігатись з інтегралом Лебега. Тим не менше, якщо провести доведення теореми існування інваріантного середнього (п. 5.5.1) для випадку відрізка, взявши за підпростір Y не підпростір сталих, а підпростір обмежених інтегровних за Лебегом функцій, то можна довести, що:

6. Існує таке інваріантне середнє I на відрізку, що $I(f) = \int_{[0,1)} f(t)d\lambda$ для будь-якої інтегровної за Лебегом обмеженої функції.
7. Спираючись на існування інваріантної міри на відрізку, виведіть існування скінченно-адитивної інваріантної щодо зсувів міри на осі, визначеної на всіх підмножинах, і такої, що міра будь-якого відрізка дорівнює його довжині. Зрозуміло, ця міра може набувати також нескінченних значень.

Розглянемо півгрупу $\mathbb{N}$ натуральних чисел за додаванням. Функції на $\mathbb{N}$ — це послідовності; інваріантне середнє на $\mathbb{N}$ називається *узагальненою банаховою границею* і позначається значком Lim. Перевірте, що:

8. Узагальнена банахова границя будь-якої обмеженої послідовності лежить між її верхньою і нижньою границями.
9. Якщо послідовність $x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ має границю, то $\operatorname{Lim} x = \lim_{n\to\infty} x_n$.
10. Якщо послідовність $x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ рівномірно *збігається за Чезаро* до числа s (тобто послідовність $\frac{x_{k+1}+x_{k+2}+...+x_{k+n}}{n}$ рівномірно за k прямує до s при $n \to \infty$), то $\operatorname{Lim} x = s$.
11. На прикладі послідовності $x = (1, 0, 1, 0, ...)$ переконайтесь, що узагальнена банахова границя послідовності може не бути граничною точкою цієї послідовності.
12. На прикладі послідовностей $x = (1, 0, 1, 0, ...)$ і $y = (0, 1, 0, 1, ...)$ переконайтесь, що узагальнена банахова границя не є мультиплікативним функціоналом: $\operatorname{Lim}(xy)$ може не дорівнювати добутку $\operatorname{Lim} x$ на $\operatorname{Lim} y$.

Коментарі до вправ

5.3.3

Вправа 4. Позначимо функціонали, що розглядаються, через f і g, а $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g$ через Y. Y — це гіперпідпростір в X. Отже, існує такий вектор $e \in X \backslash Y$, що $\operatorname{Lin}\{e, Y\} = X$. Числа $a = f(e)$ і $b = g(e)$ не дорівнюють 0, адже $e \notin Y$. Функціонал $ag - bf$ — лінійна комбінація функціоналів f і g — дорівнює нулю як на Y, так і в точці e. Отже, функціонал $ag - bf$ дорівнює 0 на всьому $\mathrm{X} = \operatorname{Lin}\{e, Y\}$, тобто функціонали f і g лінійно залежні.

5.5.3

Вправа 11. До цього твердження є в деякому сенсі обернене, доведене в 1948 році Лоренцем [Lor]: якщо будь-яка узагальнена банахова границя обмеженої числової послідовності $x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ дорівнює одному й тому самому числу s, то послідовність рівномірно збігається за Чезаро до s.

Розділ 6. Нормовані простори

6.1. Нормовані простори, підпростори і фактор-простори

6.1.1. Поняття норми. Приклади

Нехай X — лінійний простір. Відображення $x \mapsto \|x\|$, яке ставить кожному елементові простору X у відповідність невід'ємне число, називається *нормою*, якщо воно задовольняє такі аксіоми:

(1) якщо $\|x\| = 0$, то $x = 0$ (невиродженість);

(2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ для будь-якого $x \in X$ і будь-якого скаляра λ;

(3) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ (нерівність трикутника).

Умови (2) і (3) показують, що норма — це частковий випадок опуклого функціонала. У зв'язку з цим радимо читачеві повернутись до вправ п. 5.4.1 і подивитись, які з властивостей 1–5 опуклих функціоналів виконуються і для норм, а також, які з функціоналів p_i вправ 6–14 є нормами.

Означення 1. Лінійний простір X, наділений нормою, називається *нормованим простором.*

Зазначимо, що якщо на лінійному просторі X ввести деяку одну норму, то це буде один нормований простір, а якщо на тому ж лінійному просторі ввести іншу норму, то це буде вже інший нормований простір. Нижче ми наведемо деякі приклади нормованих просторів, які неодноразово зустрічатимуться надалі. Перевірку аксіом норми для цих прикладів залишаємо читачеві як вправу.

Наведений учбовий текст є витягом з підручнику

Кадець В.М. Курс функціонального аналізу та теорії міри. – Львів: Видавець І.Е. Чижиков, 2012. – 590 с. – (Серія "Університетська бібліотека") ISBN 978-966-2645-03-3

Усі посилання на теореми, вправи, означення, такі що не увійшли до цього тексту – це посилання на підручник.

Приклади

1. Нехай K — компактний топологічний простір. Через $C(K)$ позначається нормований простір неперервних скалярних функцій на K з нормою $\|f\| = \max\{|f(t)| : t \in K\}$. Важливий частковий випадок простору $C(K)$ — це простір $C[a, b]$ неперервних функцій на відрізку $[a, b]$.

2. l_1 — це простір числових послідовностей вигляду $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, які задовольняють умову $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty$, з нормою $\|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$. Оскільки кожну послідовність можна розглянути як функцію, задану на множині $\mathbb{N}$ натуральних чисел, простір l_1 — це частковий випадок простору $L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$, який вивчається нижче в п. 6.1.3: $\Omega = \mathbb{N}$, Σ — сім'я всіх підмножин в $\mathbb{N}$, μ — лічильна міра множини.

3. l_∞ — це простір всіх обмежених числових послідовностей з нормою $\|x\| = \sup\limits_n |x_n|$.

4. c_0 — це простір всіх збіжних до нуля послідовностей. Норма на c_0 задається тим самим виразом, що й на l_∞.

Означення 2. Відображення $x \mapsto p(x)$, яке ставить кожному елементові простору X у відповідність невід'ємне число, називається *напівнормою*, якщо воно задовольняє аксіоми (2) і (3) норми.

Вправи

5. Наведіть приклад напівнорми на $\mathbb{R}^2$, яка не є нормою.

6. Наведіть приклад опуклого функціонала на $\mathbb{R}^2$, який не є напівнормою.

7. Нехай B — опукла, поглинаюча множина в лінійному просторі X. Нехай, далі, B — *збалансована множина*, тобто для будь-якого скаляра λ, $|\lambda| \leqslant 1$, виконується включення $\lambda B \subset B$. Тоді функціонал Мінковського множини B (див. п. 5.4.2) — це напівнорма.

6.1.2. Метрика нормованого простору і збіжність. Ізометрії

Нехай X — нормований простір. *Відстанню між елементами x_1, x_2 простору X* називається величина $\rho(x_1, x_2) = \|x_2 - x_1\|$. З аксіом норми випливає, що ρ справді задає метрику на X.

Отже, будь-який нормований простір є одночасно і метричним простором, і всі поняття, означені для метричних просторів, — відкриті й замкнені множини, компакти, граничні точки, повнота і т. д. — мають сенс і для просторів нормованих. Зокрема, послідовність (x_n) елементів нормованого простору збігається до елемента x, якщо $\|x_n - x\| \to 0$ $(n \to \infty)$. Істотна відмінність у термінології нормованих і метричних просторів проявляється в означенні ізометрії: в нормованому випадку додається вимога лінійності відповідного відображення.

Лінійний оператор T, що діє з нормованого простору X у нормований простір Y, називається *ізометричним вкладенням*, якщо $\|Tx\| = \|x\|$ для будь-якого $x \in X$.

Бієктивне ізометричне вкладення називається *ізометрією*. Простори X і Y *ізометричні*, якщо між ними існує ізометрія.

Вправи

1. Нехай послідовність (x_n) елементів нормованого простору збігається до елемента x. Доведіть, що $\|x_n\| \to \|x\|$ $(n \to \infty)$.

2. Дано такі елементи простору l_1 : $x_n = \left(\frac{n^k}{(n+1)^{k+1}}\right)_{k=1}^{\infty}$. Випишіть в явному вигляді координати елементів x_1 і x_2.

3. Чому дорівнюють норми цих елементів? Обчисліть $\|x_n\|$ при довільному n.

4. Доведіть, що збіжність в $C(K)$ — це рівномірна збіжність на K. Зокрема, збіжність в $C\,[a,b]$ — це рівномірна збіжність на $[a,b]$, — вид збіжності, добре знайомий з курсу математичного аналізу.
5. Для будь-яких $a < b$ простір $C\,[a,b]$ ізометричний простору $C\,[0,1]$.
6. Якщо компакти K_1 і K_2 гомеоморфні, то $C(K_1)$ ізометрично $C(K_2)$. Навпаки, якщо $C(K_1)$ ізометрично $C(K_2)$, то K_1 і K_2 гомеоморфні (друга частина твердження аж ніяк не тривіальна).
7. Доведіть, що в l_1 із збіжності послідовності векторів $x_n = \left(x_n^k\right)_{k=1}^{\infty}$ до вектора $x = \left(x^k\right)_{k=1}^{\infty}$ випливає покоординатна збіжність: $x_n^k \xrightarrow[n\to\infty]{} x^k$, $k = 1, 2, \ \ldots$. Водночас із покоординатної збіжності збіжність в l_1 не випливає.
8. Послідовність (x_n) з вправи 2 може розглядатись як послідовність в l_1, а може — як послідовність в c_0. Чому дорівнюють $\|x_n\|$ в c_0? Доведіть, що послідовність (x_n) збігається покоординатно до 0, збігається в c_0 до 0, але не збігається в l_1.
9. Нехай X — деякий простір послідовностей. Додатним конусом в X назвемо множину тих векторів з X, всі координати яких невід'ємні. Розгляньте три випадки: $X = c_0$, $X = l_1$ і $X = l_\infty$. У кожному з цих трьох випадків доведіть замкненість і опуклість додатного конуса, опишіть його внутрішність і межу.

6.1.3. Простір L_1

Нехай (Ω, Σ, μ) — простір з мірою (скінченною або нескінченною), E — лінійний простір всіх інтегровних за мірою μ скалярних функцій на Ω, F — підпростір в E, який складається з усіх функцій, що дорівнюють майже скрізь нулю. Через $L_1\,(\Omega, \Sigma, \mu)$ позначимо фактор-простір E/F. Аналогічний фактор-простір $L_0\,(\Omega, \Sigma, \mu)$ згадувався в п. 5.2.2. Для спрощення термінології прийнято говорити, що елементами простору $L_1\,(\Omega, \Sigma, \mu)$ є інтегровні функції на Ω, але при цьому функції, які дорівнюють одна одній майже скрізь, ототожнюються між собою. Норма на $L_1\,(\Omega, \Sigma, \mu)$ задається формулою

$$\|f\| = \int\limits_{\Omega} |f(t)| d\mu.$$

Важливий частковий випадок простору $L_1\,(\Omega, \Sigma, \mu)$ — це простір $L_1\,[a,b]$ інтегровних за Лебегом функцій на відрізку $[a,b]$. У цьому випадку $\Omega = [a,b]$, Σ — сім'я всіх вимірних за Лебегом підмножин відрізка, а μ — міра Лебега.

Вправи

1. $L_1\,(\Omega, \Sigma, \mu)$ — нормований простір.
2. Для будь-яких $a < b$ простір $L_1\,[a,b]$ ізометричний простору $L_1\,[0,1]$.
3. Простір $L_1\,[0,1]$ ізометричний простору $L_1(-\infty, +\infty)$.
4. Простір $L_1\,[0,1]$ ізометричний простору $L_1\,([0,1] \times [0,1])$.
5. Із збіжності послідовності функцій в $L_1\,(\Omega, \Sigma, \mu)$ випливає збіжність за мірою, але якщо міра не суто атомарна (типовий приклад — $L_1\,[a,b]$), то із збіжності в $L_1\,(\Omega, \Sigma, \mu)$ не випливає збіжність майже скрізь.
6. Якщо (Ω, Σ, μ) — простір зі скінченною мірою і послідовність інтегровних функцій збігається рівномірно на Ω, то ця послідовність збігається і в $L_1\,(\Omega, \Sigma, \mu)$.
7. Покажіть, що яку б норму в $L_1\,[a,b]$ ми ни ввели, збіжність за цією нормою не може бути еквівалентною збіжності за мірою. (Порівняйте з вправою 6 п. 4.3.3)
8. Розглянемо додатний конус в $L_1\,(\Omega, \Sigma, \mu)$: множина G всіх функцій з $L_1\,(\Omega, \Sigma, \mu)$, які більші або дорівнюють нулю майже скрізь. Доведіть, що G — замкнена опукла множина, яка не має внутрішніх точок.

9. За аналогією з попередньою вправою розглянемо додатний конус в $C(K)$. Доведіть опуклість і замкненість цієї множини, опишіть її внутрішність і межу.

Нехай p — напівнорма на лінійному просторі X. *Ядром* напівнорми p називається множина $\operatorname{Ker} p$ тих $x \in X$, для яких $p(x) = 0$.

10. $\operatorname{Ker} p$ — лінійний підпростір в X.
11. Вираз $\rho(x_1, x_2) = p(x_2 - x_1)$ задає псевдометрику на X.
12. Для будь-якого $x \in X$ і будь-якого $y \in \operatorname{Ker} p$ маємо $p(x + y) = p(x)$.
13. Вираз $\|[x]\| = p(x)$ задає норму на фактор-просторі $\mathrm{X}/\operatorname{Ker} p$.

Оскільки величина $p(f) = \int_\Omega |f(t)| d\mu$ задає напівнорму на лінійному просторі E всіх інтегровних за мірою μ скалярних функцій на Ω, $F = \operatorname{Ker} p$ — підпростір в E, який складається з усіх функцій, що дорівнюють майже скрізь нулю, то наведене вище означення простору $L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ — це частковий випадок побудови, описаної у вправах 10–13.

6.1.4. Підпростори і фактор-простори

Лінійний підпростір Y нормованого простору X, наділений нормою з X, називається *підпростором нормованого простору* X. Отже, підпростір нормованого простору — це знову нормований простір.

Нехай Y — замкнутий підпростір нормованого простору X, $x \in X$ — довільний елемент, $[x] = x + Y$ — відповідний елемент фактор-простору X/Y. Означимо таку величину:

$$\|[x]\| = \inf_{y \in Y} \|x + y\|.$$

Іншими словами, $\|[x]\|$ — це відстань в X від 0 до множини $x + Y$. Оскільки Y — підпростір і, відтак, $Y = -Y$, то таке означення еквівалентне початковому: $\|[x]\| = \inf\limits_{y \in Y} \|x - y\|$. Геометричний зміст цього означення: $\|[x]\|$ — це відстань в X від x до підпростору Y.

Твердження. *Введена вище величина $\|[x]\|$ задає норму на просторі X/Y.*

Доведення. Перевіримо аксіоми норми.

1. Нехай $\|[x]\| = 0$. Тоді $\inf_{y \in Y} \|x - y\| = 0$, і, отже, x — гранична точка підпростору Y. Оскільки Y замкнена, $x \in Y$ і $[x] = Y = [0]$.

2. Оскільки Y — підпростір, $\lambda Y = Y$ для будь-якого ненульового скаляра λ. Маємо:

$$\|[\lambda x]\| = \inf_{y \in Y} \|\lambda x + y\| = \inf_{y \in Y} \|\lambda x + \lambda y\| = |\lambda| \inf_{y \in Y} \|x + y\| = |\lambda| \cdot \|[x]\|.$$

3. Нехай $x_1, x_2 \in X$, $\varepsilon > 0$. Згідно з означенням інфімума існують такі $y_1, y_2 \in Y$, що $\|x_1 + y_1\| < \|[x_1]\| + \varepsilon$ і $\|x_2 + y_2\| < \|[x_2]\| + \varepsilon$. Отримуємо оцінку

$$\|[x_1 + x_2]\| = \inf_{y \in Y} \|x_1 + x_2 + y\| \leqslant \|x_1 + x_2 + y_1 + y_2\| \leqslant$$

$$\leqslant \|x_1 + y_1\| + \|x_2 + y_2\| \leqslant \|[x_1]\| + \|[x_2]\| + 2\varepsilon,$$

що з огляду на довільність ε означає потрібну нерівність трикутника. □

Надалі завжди будемо припускати, що фактор-простір нормованого простору наділений описаною вище нормою.

Приклад. Нехай (Ω, Σ, μ) — простір з мірою, X — простір всіх обмежених вимірних функцій на Ω, наділений нормою $\|f\| = \sup_{t \in \Omega} |f(t)|$, Y — підпростір в X, який складається з функцій, що дорівнюють нулю майже скрізь. Відповідний фактор-простір X/Y позначається $L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$.

Вправи

1. Доведіть таку формулу для норми в $L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$:

$$\|f\|_\infty = \inf_{A \in \Sigma, \mu(A)=0} \left\{ \sup_{t \in \Omega \setminus A} |f(t)| \right\}.$$

2. Доведіть нерівність $|f| \overset{\text{м.с.}}{\leqslant} \|f\|_\infty$.

3. Доведіть, що $\|f\|_\infty$ дорівнює інфімуму множини тих сталих c, для яких $|f| \overset{\text{м.с.}}{\leqslant} c$.

4. У просторі $C[a,b]$ розглянемо підпростір Y, що складається з тотожно сталих функцій. Довести, що норма елемента $[f]$ фактор-простору $C[a,b]/Y$ обчислюється за формулою

$$\|[f]\| = \frac{1}{2}\left(\max\{f(t) : t \in [a,b]\} - \min\{f(t) : t \in [a,b]\}\right).$$

5. Простір l_1 можна розглядати як лінійний підпростір в c_0, хоча нормованим підпростором в c_0 він не буде: норма, задана в l_1, не збігається з нормою з c_0. Довести, що l_1 незамкнений і щільний в c_0. Довести, що l_1 як підмножина в c_0 належить до класу F_σ.

6. Довести, що підпростір c_0 всіх збіжних до нуля послідовностей замкнений в l_∞.

7. Показати, що норма елемента $[a]$ в фактор-просторі l_∞/c_0 обчислюється за формулою $\|[a]\| = \varlimsup_{n\to\infty} |a_n|$, де a_n — це координати елементу $a \in l_\infty$.

6.2. Зв'язок між одиничною кулею і нормою простору. Простори L_p

6.2.1. Властивості куль у нормованому просторі

Нехай X — нормований простір, $x_0 \in X$, $r > 0$. Символом $B_X(x_0, r)$ позначається, як звичайно, відкрита куля радіуса r з центром в x_0:

$$B_X(x_0, r) = \{\, x \in X : \|x - x_0\| < r \,\}.$$

Одиничною кулею B_X простору X називається відкрита куля одиничного радіуса з центром в нулі: $B_X = \{\, x \in X : \|x\| < 1 \,\}$. Аналогічним чином вводяться *одинична сфера* S_X і *замкнена одинична куля* $\overline{B}_X$:

$$S_X = \{\, x \in X : \|x\| = 1 \,\}, \quad \overline{B}_X = \{\, x \in X : \|x\| \leqslant 1 \,\}.$$

Зазначимо найпростіші властивості введених об'єктів. Доведення цих властивостей залишаємо читачеві.

- Одинична куля — відкрита множина, замкнена одинична куля і одинична сфера — замкнені множини.
- $B_X(x_0, r) = x_0 + rB_X$.
- B_X — опукла поглинаюча множина (див. вправа 2 п. 5.4.3).
- B_X — збалансована множина, тобто для будь-якого скаляра λ, $|\lambda| \leqslant 1$, виконується включення $\lambda B_X \subset B_X$.

– Для будь-яких $x_0 \in X$, $r > 0$ лінійна оболонка кулі $B_X(x_0, r)$ збігається з усім простором X.

Вправи

1. Доведіть, що замикання відкритої кулі $B_X(x_0, r)$ у нормованому просторі збігається з $\overline{B}_X(x_0, r)$. Порівняйте з вправою 9 п. 1.3.1.

Простір числових рядків $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ з нормою $\|x\| = \sum_{k=1}^{n} |x_n|$ позначається l_1^n; аналогічний простір рядків з нормою $\|x\| = \sup_n |x_n|$ позначається l_∞^n.

2. Простори l_1^n і l_∞^n — це скінченновимірні аналоги просторів l_1 і l_∞. Побудуйте на координатній площині одиничні кулі просторів l_1^2 і l_∞^2. Знайдіть ізометрію між цими двома просторами.

3. Побудуйте у тривимірному координатному просторі одиничні кулі просторів l_1^3 і l_∞^3. Доведіть, що ці простори не ізометричні.

4. (Принцип вкладених куль). Нехай X — повний нормований простір, $B_n = \overline{B}_X(x_n, r_n)$ — спадна за включенням послідовність замкнених куль. Доведіть, що $\bigcap_{n=1}^\infty B_n$ не порожній. (На відміну від принципу вкладених куль, тут не припускається прямування діаметрів до нуля, але й не стверджується одноточковість перетину).

5. Наведіть приклад повного метричного простору, де твердження попередньої вправи не виконується.

6.2.2. Означення норми за допомогою кулі. Простори L_p

Нехай B — опукла, поглинаюча множина в лінійному просторі X. Нагадаємо (п. 5.4.2), що функціоналом Мінковського множини B називається функція, задана на X формулою $\varphi_B(x) = \inf\left\{t > 0 : \frac{1}{t}x \in B\right\}$.

Теорема 1. *Нехай B — опукла, поглинаюча, збалансована множина в лінійному просторі X, яка задовольняє таку умову* алгебраїчної обмеженості*: для будь-якого $x \in X\setminus\{0\}$ існує таке $a > 0$, що $ax \notin B$. Тоді функціонал Мінковського задає норму на X.*

Доведення. Те, що φ_B — опуклий функціонал, вже було доведено в п. 5.4.2. Оскільки B збалансована,

$$\varphi_B(\lambda x) = \varphi_B(|\lambda| x) = |\lambda| \varphi_B(x)$$

для будь-якого $x \in X$ і будь-якого скаляра λ, тобто φ_B — напівнорма. Нарешті, якщо $x \in X\setminus\{0\}$, то на підставі алгебраїчної обмеженості існує таке $a > 0$, що $ax \notin B$. Отже, $\varphi_B(x) \geqslant \frac{1}{a} > 0$, чим доведено невиродженість функціонала Мінковського. □

Нехай (Ω, Σ, μ) — простір з мірою (скінченною або нескінченною), $p \in [1, \infty)$ — фіксоване число. Через $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ позначається підмножина у просторі $L_0(\Omega, \Sigma, \mu)$ всіх вимірних скалярних функцій на Ω, що складається з функцій, для яких існує $\int_\Omega |f(t)|^p d\mu$. При цьому функції, які дорівнюють одна одній майже скрізь, вважаються в $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$, так само як і в $L_0(\Omega, \Sigma, \mu)$, одним і тим самим елементом. Для $f \in L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ покладемо

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(t)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Теорема 2. *$L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ — лінійний простір, а $\| \ \|_p$ — норма на просторі $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$.*

Доведення. Розглянемо множину $B_p \subset L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$, що складається з функцій, для яких $\int_\Omega |f(t)|^p d\mu < 1$. Нехай $f, g \in B_p$, $\lambda \in [0, 1]$. Оскільки функція $|x|^p$ опукла на $\mathbb{R}$, для будь-якого $t \in \Omega$ справджується числова нерівність $|\lambda f(t) + (1-\lambda)g(t)|^p \leqslant \lambda |f(t)|^p + (1-\lambda)|g(t)|^p$. Інтегруючи цю нерівність, отримуємо, що $\lambda f + (1-\lambda) g \in B_p$, тобто B_p — опукла множина. Легко перевірити, що B_p збалансована й алгебраїчно обмежена. З опуклості та збалансованості множини B_p і очевидної рівності $L_p(\Omega, \Sigma, \mu) = \bigcup_{n=1}^{\infty} nB_p$ випливає, що $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ — лінійний простір і B_p — поглинаюча множина в $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ (вправа 1 п. 5.4.2). Отже, функціонал Мінковського множини B_p визначений на $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ і задає норму в цьому лінійному просторі. Залишається тільки зазначити, що $\| \, \|_p$ збігається з φ_{B_p}. Справді, для будь-якого $f \in L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ включення $\frac{1}{t} f \in B_p$ виконується тоді і тільки тоді, коли $t > \|f\|_p$, тобто $\|f\|_p = \varphi_{B_p}(f)$. □

Надалі $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ будемо розглядати як нормований простір, наділений нормою $\| \, \|_p$. Важливі часткові випадки — це простори $L_p[a, b]$ (тобто випадок $\Omega = [a, b]$ з мірою Лебега) і простори l_p, де за Ω беремо $\mathbb{N}$, $\Sigma = 2^{\mathbb{N}}$, а μ — це лічильна міра (міра множини дорівнює числу його елементів). Оскільки кожну функцію, задану на множині $\mathbb{N}$ натуральних чисел, можна сприймати як послідовність, простір l_p зазвичай визначають як простір числових послідовностей вигляду $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}}$, які задовольняють умову $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty$, з нормою

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Вправи

1. Нехай на лінійному просторі X задано дві норми $\| \, \|_1$ і $\| \, \|_2$, B_1 і B_2 — одиничні кулі цих норм. Тоді $B_1 \subset B_2$ тоді і тільки тоді, коли на всьому X виконується нерівність $\| \, \|_1 \geqslant \| \, \|_2$.

2. Нехай на лінійному просторі X задано норми $\| \, \|_1$, $\| \, \|_2$ і $\| \, \|_3$, B_1, B_2 і B_3 — одиничні кулі цих норм. Нехай $\| \, \|_3$ виражається через $\| \, \|_1$ і $\| \, \|_2$ формулою $\|x\|_3 = \max\{\|x\|_1, \|x\|_2\}$. Тоді $B_3 = B_1 \cap B_2$.

3. l_p, який розглядається як множина, збільшується із зростанням p, а величина $\|x\|_p$ при фіксованому x спадає із зростанням p.

4. Множина l_0 послідовностей, що обриваються (тобто таких, що, починаючи з деякого номера, всі координати дорівнюють 0) щільна в l_p при $p \in [1, \infty)$.

5. Якщо $p_1 < p$, то множина l_{p_1} щільна в просторі l_p.

6. Нехай B — опукла, поглинаюча, збалансована, алгебраїчно обмежена множина в лінійному просторі X. Задамо норму на X як функціонал Мінковського множини B. Для того, щоб одинична куля цієї норми збігалася з B необхідно і досить, щоб B мало таку властивість: для будь-якого $x \in B$ існує таке $\varepsilon > 0$, що $(1+\varepsilon) x \in B$.

7. При $1 \leqslant p < \infty$ множина обмежених функцій щільна в $L_p[a, b]$. При $1 \leqslant p < \infty$ множина неперервних функцій щільна в $L_p[a, b]$.

8. При $1 \leqslant p < \infty$ множина всіх поліномів щільна в $L_p[a, b]$.

9. При $1 \leqslant p < \infty$ множина неперервних функцій, які задовольняють умову $f(0) = 0$ щільна в $L_p[0, 1]$.

10. Множина неперервних функцій не щільна в $L_\infty[a, b]$.

6.3. Банахові простори і абсолютно збіжні ряди

Банаховим простором називається повний нормований простір, тобто нормований простір, де кожна послідовність Коші збігається. Банахові простори — це найважливіший клас нормованих просторів: саме ці простори найчастіше зустрічаються в застосуваннях, і саме навколо поняття банахового простору згруповані найважливіші результати функціонального аналізу[1].

6.3.1. Ряди. Критерій повноти простору в термінах абсолютної збіжності

Нехай (x_n) — послідовність елементів нормованого простору X. *Частинними сумами ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ називаються вектори $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$. Якщо частинні суми ряду $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ збігаються до елемента x, ряд називається збіжним, а елемент x називається сумою ряду. Рівність $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x$ — це загальноприйнятий скорочений запис виразу «ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ збігається і його сума дорівнює x». Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ називається *абсолютно збіжним*, якщо $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$.

Твердження 1 (критерій Коші збіжності ряду). *Для того, щоб ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ *елементів банахового простору* X *збігався, необхідно і достатньо, щоб* $\left\| \sum\limits_{k=n}^{m} x_k \right\| \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0.$

Доведення. Збіжність ряду еквівалентна збіжності послідовності s_n частинних сум. У свою чергу, в повному просторі збіжність послідовності рівносильна її фундаментальності. Залишається зауважити, що $s_m - s_n = \sum\limits_{k=n+1}^{m} x_k$. □

Твердження 2. *Нехай ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *елементів банахового простору* X *абсолютно збігається. Тоді* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *— збіжний ряд.*

Доведення. Оскільки числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ збігається, $\sum\limits_{k=n}^{m} \|x_k\| \to 0$ $(n, m \to \infty)$. Отже,

$$\left\| \sum_{k=n}^{m} x_k \right\| \leqslant \sum_{k=n}^{m} \|x_k\| \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0.$$

Для завершення доведення скористаємось твердженням 1. □

Твердження 3. *Нехай* X *— неповний нормований простір. Тоді в* X *існує абсолютно збіжний, але при цьому розбіжний ряд.*

Доведення. На підставі неповноти простору існує фундаментальна послідовність $v_n \in X$, яка не має границі. За означенням послідовності Коші, $\|v_n - v_m\| \to 0$ $(n, m \to \infty)$. Отже, існує таке $n_1 \in \mathbb{N}$, що $\|v_n - v_m\| < \frac{1}{2}$ для всіх $n, m \geqslant n_1$. Аналогічно виберемо таке $n_2 \geqslant n_1$, що $\|v_n - v_m\| < \frac{1}{4}$ для всіх $n, m \geqslant n_2$. Продовжуючи міркування, отримаємо таку зростаючу послідовність індексів n_j, що $\|v_n - v_m\| < \frac{1}{2^j}$ для всіх $n, m \geqslant n_j$. Тоді для підпослідовності v_{n_j} маємо

$$\|v_{n_2} - v_{n_1}\| < \frac{1}{2},\ \|v_{n_3} - v_{n_2}\| < \frac{1}{4}, ..., \left\|v_{n_{j+1}} - v_{n_j}\right\| < \frac{1}{2^j}, ...$$

Задамо потрібний ряд $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ у такий спосіб: $x_1 = v_{n_1}$, $x_2 = v_{n_2} - v_{n_1}$, $\dots$, $x_j = v_{n_j} - v_{n_{j-1}}$ і т. д. Побудований ряд абсолютно збігається:

$$\sum_{j=2}^{\infty} \|x_j\| < \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... = 1.$$

[1] Принаймні так вважає автор цих рядків, який спеціалізується в теорії банахових просторів.

Водночас його частинні суми дорівнюють v_{n_j}, тобто (див. вправа 1 п. 1.3.3) утворюють розбіжну послідовність. □

Твердження 2 і 3 разом дають таку характеризацію повних нормованих просторів.

Теорема. *Для повноти нормованого простору X необхідно і достатньо, щоб кожний абсолютно збіжний ряд в X збігався.*

6.3.2. Повнота простору L_1

Почнемо з доведення одного переформулювання теореми Леві, по суті сформульованого вище у вправі 3 п. 4.4.3.

Лема. *Нехай ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ функцій з $L_1 = L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ абсолютно збігається за нормою цього простору. Тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ збігається майже скрізь до деякої інтегровної функції f і $\|f\| \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} \|f_n\|$.*

Доведення. За означенням норми в L_1, абсолютна збіжність означає, що $\sum_{n=1}^{\infty} \int_\Omega |f_n| d\mu < \infty$. За теоремою Леві, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ збігається майже скрізь до деякої інтегровної функції g і $\int_\Omega g d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\Omega |f_n| d\mu$. Позначимо через A множину міри 0, за межами якої ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ збігається. У кожній точці $t \in \Omega \setminus A$ числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)$ збігається абсолютно до деякого числа $f(t)$. Отже, ми означили на $\Omega \setminus A$ (тобто майже скрізь на Ω) функцію f, і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ збігається до f у всіх точках множини $\Omega \setminus A$. Доозначимо на A функцію f нулем. Функція f вимірна на $\Omega \setminus A$ як поточкова границя послідовності вимірних функцій, і функція g є інтегровною мажорантою f. Отже, f інтегровна й

$$\int\limits_\Omega |f| d\mu \leqslant \int\limits_\Omega g d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_\Omega |f_n| d\mu. \qquad \square$$

Теорема. *Простір L_1 банахів.*

Доведення. Скористаємось теоремою з попереднього пункту — критерієм повноти в термінах абсолютної збіжності. Нехай ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ функцій з L_1 абсолютно збігається. За попередньою лемою, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ збігається майже скрізь до деякої інтегровної функції f. Доведемо, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ збігається до f за нормою простору L_1. Справді,

$$\left\| f - \sum_{n=1}^{k} f_n \right\| = \left\| \sum_{n=k}^{\infty} f_n \right\| \leqslant \sum_{n=k}^{\infty} \|f_n\| \xrightarrow[k \to \infty]{} 0. \qquad \square$$

Вправа

1. Доведіть повноту простору L_p.

Повноту простору L_p буде доведено з непрямих міркувань нижче в розділі 14. Тим не менше, читачеві буде корисно знайти пряме доведення цього факту.

6.3.3. Підпростори і фактор-простори банахового простору

Нехай X — банахів простір. Лінійний підпростір $Y \subset X$, наділений нормою з X, називається *підпростором банахового простору* X, якщо Y замкнений в X. Отже, підпростір банахового простору — це знову банахів простір. Як читач вже напевно помітив, сенс терміна «підпростір» залежить від того, де цей підпростір розглядається. Оскільки банахів простір одночасно є також метричним, лінійним і нормованим простором, термін «підпростір» виявляється дещо перевантаженим. Тому ще раз звертаємо увагу читача на те, що за замовчуванням у банахових просторах підпросторами ми називатимемо тільки замкнені лінійні підпростори. Якщо ж нам з якоїсь причини потрібно буде розглянути незамкнений лінійний підпростір, ми будемо окремо зазначати його незамкненість.

Теорема. *Нехай X — банахів простір, Y — підпростір в X. Тоді фактор-простір X/Y — також банахів простір.*

Доведення. Нехай $x_n \in X$ такі, що норми відповідних класів еквівалентності утворюють абсолютно збіжний ряд: $\sum_n \|[x_n]\| < \infty$. Згідно з критерієм повноти, потрібно довести, що ряд $\sum_n [x_n]$ збігається до деякого елемента фактор-простору. Для цього в кожному класі $[x_n]$ виберемо по такому представнику y_n, що $\|y_n\| \leqslant \|[x_n]\| + \frac{1}{2^n}$. Тоді $\sum_n y_n$ — абсолютно збіжний ряд в X, що з огляду на повноту простору означає, що $\sum_n y_n$ збігається в X до деякого елемента x. Перевіримо, що $\sum [x_n] = [x]$. Справді,

$$\left\|[x] - \sum_{k=1}^{n} [x_k]\right\| = \left\|[x] - \sum_{k=1}^{n} [y_k]\right\| = \left\|[x - \sum_{k=1}^{n} y_k]\right\| \leqslant \left\|x - \sum_{k=1}^{n} y_k\right\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \qquad \square$$

Вправи

1. Нехай X — банахів простір, $x_n \in X$ — фіксована послідовність ненульових векторів. Введемо простір E всіх числових послідовностей $a = (a_n)_1^\infty$, для яких ряд $\sum_{n=1}^\infty a_n x_n$ збігається. Наділимо простір E нормою $\|a\| = \sup\left\{\left\|\sum_{n=1}^N a_n x_n\right\| : \ N = 1, 2, \ ...\right\}$. Перевірити, що E — банахів простір.

2. Нехай X — банахів простір, Y — нетривіальний підпростір в X (тобто Y замкнений і $Y \neq X$). Довести, що Y ніде не щільний в X.

3. Довести, що банахів простір не може бути зображений як об'єднання зліченного числа нетривіальних підпросторів.

4. Довести, що базис Гамеля нескінченновимірного банахового простору незліченний.

5. Нехай $\mathcal{P}$ — простір усіх поліномів (як завгодно великого степеня) з дійсними коефіцієнтами, наділений нормою $\|a_0 + a_1 t + ... + a_n t^n\| = |a_0| + ... + |a_n|$. Чи повний цей простір?

6. Позначимо через $\{e_n\}_1^\infty$ *канонічний базис* простору l_1: $e_1 = (1, 0, 0, ...)$, $e_2 = (0, 1, 0, ...)$, ... Довести, що для будь-якого $a = (a_n)_1^\infty \in l_1$ ряд $\sum_{n=1}^\infty a_n e_n$ збігається до a. Чи буде збіжність абсолютною?

7. Розглянемо в l_∞ послідовність $\{e_n\}_1^\infty$ з попередньої вправи. Чому дорівнюють частинні суми ряду $\sum_{n=1}^\infty e_n$? Чи буде цей ряд збігатися до елементу $x = (1, 1, ...) \in l_\infty$? Опишіть ті $a = (a_n)_1^\infty \in l_\infty$, для яких ряд $\sum_{n=1}^\infty a_n e_n$ збігається до a. Для яких a збіжність буде абсолютною?

8. Доведіть повноту простору $L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$.

9. Доведіть у кожному з просторів $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, щільність підмножини скінченнозначних вимірних функцій.

10. Простори l_p при $1 \leqslant p < \infty$ сепарабельні, а l_∞ не сепарабельний.

6.4. Простір неперервних лінійних операторів

6.4.1. Критерій неперервності лінійного оператора

Означення. Нехай X, Y — нормовані простори. Лінійний оператор $T \colon X \to Y$ називається *обмеженим*, якщо обмежені послідовності він переводить в обмежені послідовності. Іншими словами, якщо $x_n \in X$ і $\sup\limits_n \|x_n\| < \infty$, то $\sup\limits_n \|Tx_n\| < \infty$.

Основна мета цього параграфа — довести рівносильність неперервності й обмеженості лінійного оператора.

Теорема. *Нехай X, Y — нормовані простори. Для лінійного оператора $T\colon X \to Y$ такі умови еквівалентні:*

(1) T неперервний;

(2) T переводить збіжні до нуля послідовності у збіжні до нуля;

(3) T переводить збіжні до нуля послідовності в обмежені;

(4) T обмежений.

Доведення. Імплікації (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Leftarrow$ (4) очевидні: умова (2) — неперервність оператора в нулі, — це частковий випадок умови (1); третя умова випливає як з другої, так і з четвертої з огляду на те, що збіжні до нуля послідовності обмежені. Доведемо тепер зворотні імплікації.

(2) $\Rightarrow$ (1). Нехай послідовність векторів $x_n \in X$ збігається до елемента $x \in X$. Тоді $x_n - x \to 0$ ($n \to \infty$), і, за умовою (2),

$$Tx_n - Tx = T\left(x_n - x\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Тобто із збіжності x_n до x випливає збіжність Tx_n до Tx.

(3) $\Rightarrow$ (2). Будемо міркувати методом від супротивного. Нехай умова (2) не виконується: існує збіжна до нуля послідовність $x_n \in X$, образ Tx_n якої до нуля не прямує. Тоді з (x_n) можна виділити підпослідовність v_n, для якої $\inf_n \|Tv_n\| = \varepsilon > 0$. Означимо вектори $w_n = \frac{1}{\sqrt{\|v_n\|}} v_n$. Послідовність w_n усе ще прямує до 0, але $\|Tw_n\| \geqslant \frac{\varepsilon}{\sqrt{\|v_n\|}} \to \infty$, що суперечить припущенню (3).

(3) $\Rightarrow$ (4). Нехай умова (4) не виконується: існує обмежена послідовність $x_n \in X$, для якої $\sup_n \|Tx_n\| = \infty$. Тоді з x_n можна виділити підпослідовність (v_n), для якої $\|Tv_n\| \to \infty$. Означимо вектори $w_n = \frac{1}{\sqrt{\|Tv_n\|}} v_n$. Така послідовність (w_n) вже прямує до 0, але $\|Tw_n\| = \sqrt{\|Tv_n\|} \to \infty$, що суперечить припущенню (3). $\square$

Вправи

1. Нехай X, Y — нормовані простори, $T\colon X \to Y$ — неперервний лінійний оператор. Тоді $\operatorname{Ker} T$ — замкнений лінійний підпростір в X. (**N.B.!**) Це простий, але важливий факт, який надалі буде використовуватись без додаткових пояснень.

2. Образ неперервного оператора може бути незамкненим. Проаналізуйте це на прикладі оператора інтегрування: $T\colon C[0,1] \to C[0,1]$, $(Tf)(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau$.

6.4.2. Норма оператора

Нормою лінійного оператора T, що діє з нормованого простору X в нормований простір Y, називається величина

$$\|T\| = \sup_{x \in S_X} \|Tx\|.$$

Твердження 1. *Нехай $\|T\| < \infty$. Тоді для будь-якого $x \in X$ виконується нерівність $\|Tx\| \leqslant \|T\|\,\|x\|$.*

Доведення. Для $x = 0$ нерівність виконується. Розглянемо випадок $x \neq 0$. Оскільки $\frac{x}{\|x\|} \in S_X$, то $\left\|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leqslant \|T\|$. Маємо

$$\|Tx\| = \|x\| \left\|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leqslant \|T\|\,\|x\|,$$

що й потрібно було довести. □

Твердження 2. *Нехай X, Y — нормовані простори. Для лінійного оператора $T\colon X \to Y$ такі умови еквівалентні:*

(1) T обмежений;

(2) $\|T\| < \infty$;

(3) існує така стала $C > 0$, що для будь-якого $x \in X$ виконується оцінка $\|Tx\| \leqslant C\,\|x\|$.

Доведення. (1) $\Rightarrow$ (2). Нехай $\|T\| = \infty$. Тоді для будь-якого натурального числа n існує вектор $x_n \in S_X$, для якого $\|Tx_n\| > n$. Послідовність (x_n) обмежена, а образи її членів прямують за нормою до нескінченності. Ми отримали суперечність з умовою (1). Те, що з умови (2) випливає (3), доведено у твердженні 1 (з $C = \|T\|$). Залишилось перевірити імплікацію (3) $\Rightarrow$ (1). Нехай $x_n \in X$ — обмежена послідовність, $\|x_n\|$ не перевищують деякої сталої K. Тоді, за умовою (3), $\|Tx_n\| \leqslant CK$ при всіх n. Отже, оператор T переводить обмежені послідовності в обмежені, що й потрібно було довести. □

Зауваження 1. Якщо виконується умова (3) попереднього твердження, то

$$\|T\| = \sup_{x\in S_X} \|Tx\| \leqslant \sup_{x\in S_X} C\,\|x\| = C.$$

Тобто якщо $\|Tx\| \leqslant C\,\|x\|$ для всіх $x \in X$, то $\|T\| \leqslant C$. Цим міркуванням часто користуються при оцінці норми оператора.

Зауваження 2. В літературі можна прочитати ще цілу серію еквівалентних означень норми оператора:

– $\|T\| = \sup\limits_{x\in B_X} \|Tx\|$;

– $\|T\| = \sup\limits_{x\in \overline{B}_X} \|Tx\|$;

– $\|T\| = \sup\limits_{x\in X\setminus\{0\}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$;

– $\|T\|$ — це інфімум всіх таких констант $C \geqslant 0$, що нерівність $\|Tx\| \leqslant C\,\|x\|$ виконується для всіх $x \in X$.

Перевірку еквівалентності цих означень початковому ми залишаємо читачеві як вправу.

Через $L(X,Y)$ позначатимемо простір всіх лінійних неперервних операторів з нормованого простору X в нормований простір Y. На $L(X,Y)$ природним способом вводяться лінійні операції: якщо $T_1, T_2 \in L(X,Y)$ — оператори, λ_1, λ_2 — скаляри, то оператор $\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2 \in L(X,Y)$ діє за правилом $(\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2)\,x = \lambda_1 T_1 x + \lambda_2 T_2 x$. Вище ми описали, як вводиться норма на $L(X,Y)$ — норма оператора, але ще не перевірили, чи ця норма справді задовольняє аксіоми норми.

Твердження 3. *Простір операторів $L(X,Y)$ — це нормований простір.*

Доведення. Перевіримо аксіоми норми (п. 6.1.1).

1. Нехай $\|T\| = 0$. Тоді оператор T дорівнює 0 у всіх точках одиничної сфери простору X, що з огляду на лінійність оператора означає рівність нулю на всьому X.

2. $\|\lambda T\| = \sup\limits_{x\in S_X} \|\lambda Tx\| = |\lambda| \sup\limits_{x\in S_X} \|Tx\| = |\lambda|\, \|T\|$.

3. Нехай $T_1, T_2 \in L(X,Y)$, $x \in X$. Скористаємось твердженням 1:

$$\|(T_1+T_2)\,x\| \leqslant \|T_1x\| + \|T_2x\| \leqslant \|T_1\|\cdot\|x\| + \|T_2\|\cdot\|x\| = (\|T_1\|+\|T_2\|)\cdot\|x\|.$$

Згідно із зауваженням 1 звідси випливає потрібна нерівність трикутника:

$$\|T_1+T_2\| \leqslant \|T_1\| + \|T_2\|. \qquad \square$$

Норма оператора — це важливе поняття, яке часто використовується в нашому курсі. Тому рекомендуємо читачеві, який не мав раніше досвіду роботи з цим математичним об'єктом, приділити більше уваги наведеним нижче вправам.

Вправи

1. Нехай $T \in L(X,Y)$, $x_1, x_2 \in X$. Тоді $\|Tx_1 - Tx_2\| \leqslant \|T\|\cdot\|x_1-x_2\|$.

2. Нехай $T_1, T_2 \in L(X,Y)$, $x \in X$. Тоді $\|T_1x - T_2x\| \leqslant \|T_1-T_2\|\cdot\|x\|$.

3. Нехай X, Y, Z — нормовані простори, $T_1 \in L(X,Y)$, $T_2 \in L(Y,Z)$. Доведіть *мультипликативну нерівність* трикутника для композиції операторів: $\|T_2 \circ T_1\| \leqslant \|T_2\|\cdot\|T_1\|$.

4. Нехай X — банахів простір, $(x_n)_1^\infty$ — обмежена послідовність в X, $\{e_n\}_1^\infty$ — канонічний базис простору l_1 (див. вправу 6 п. 6.3.3). Означимо оператор $T\colon l_1 \to X$ формулою $Ta = \sum_{n=1}^\infty a_nx_n$, де $a = (a_n)_1^\infty$ — довільний елемент простору l_1. Доведіть, що T — неперервний лінійний оператор, $Te_n = x_n$ і $\|T\| = \sup_n \|x_n\|$.

5. Доведіть, що будь-який неперервний лінійний оператор $T\colon l_1 \to X$ може бути записаний вказаним вище способом.

6. Нехай X — нормований простір, X_1 — замкнений підпростір в X. Доведіть, що фактор-відображення q простору X на X/X_1 (див. п. 5.2.2) — це неперервний лінійний оператор. Обчисліть $\|q\|$. Доведіть, що $q(B_X) = B_{X/X_1}$.

7. Нехай X, Y — нормовані простори, $T\colon X \to Y$ — лінійний оператор. Перевірте, що ін'єктивізація $\tilde{T}$ оператора T (див. п. 5.2.2) — це неперервний лінійний оператор і $\|\tilde{T}\| = \|T\|$.

8. Нехай в умовах попередньої вправи $T\,(B_X) = B_Y$. Доведіть, що в цьому випадку $\tilde{T}$ — бієктивна ізометрія просторів $X/\mathrm{Ker}T$ і Y.

9. Нехай $\mathcal{P}$ — простір поліномів з вправи 5 п. 6.3.3, $D_m\colon P \to P$ — оператор m-ї похідної. Перевірте, що D_m — лінійний оператор і обчисліть його норму. Чи є D_m неперервним оператором?

10. На лінійному просторі $\mathcal{P}$ всіх поліномів розглянемо норму $\|a_0 + a_1t + ... + a_nt^n\|_1 = \sum\limits_{k=0}^{n} k!\,|a_k|$. Позначимо отриманий нормований простір через P_1. Чи є оператор $D_m\colon P_1 \to P_1$ m-ї похідної неперервним? Чому дорівнює його норма?

11. У просторі $C[0,1]$ розглянемо функціонал F, що діє за правилом $F(x) = \int_0^{1/2} x(t)dt - \int_{1/2}^1 x(t)dt$. Доведіть, що $\|F\| = 1$ і що $\forall x \in S_{C[0,1]}$ $\|F(x)\| < 1$. Цей приклад показує, що супремум в означенні норми оператора може не досягатись.

12. Нехай X, Y — нормовані простори, $T\colon X \to Y$ — бієктивний лінійний оператор. Оператор T є ізометрією тоді і тільки тоді, коли $\|T\| = \|T^{-1}\| = 1$.

6.4.3. Поточкова збіжність

Теорема 1. *Нехай X, Y — нормовані простори, $T_n\colon X \to Y$ — лінійні оператори і для будь-якого $x \in X$ існує $\lim\limits_{n\to\infty} T_nx$. Тоді відображення $T\colon X \to Y$, задане рівністю $T(x) = \lim\limits_{n\to\infty} T_nx$, — лінійний оператор. Доведення.*

$$T(ax_1 + bx_2) = \lim_{n\to\infty} T_n(ax_1 + bx_2) =$$

$$= a \lim_{n\to\infty} T_n(x_1) + b \lim_{n\to\infty} T_n(x_2) = aT(x_1) + bT(x_2). \qquad \square$$

Означення. Послідовність лінійних операторів $T_n\colon X \to Y$ називається *поточково збіжною до оператора* $T\colon X \to Y$, , якщо $Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x$ для всіх $x \in X$.

Теорема 2. *Нехай послідовність операторів $T_n \in L(X, Y)$ поточково збігається до оператора $T\colon X \to Y$ і $\sup_n \|T_n\| = C < \infty$. Тоді $T \in L(X, Y)$ і $\|T\| \leqslant C$.*

Доведення. Для будь-якого $x \in X$ маємо оцінку: $\|Tx\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n x\| \leqslant C\|x\|$. $\square$

Теорема 3. *Якщо послідовність операторів $T_n \in L(X, Y)$ збігається до оператора T за нормою простору $L(X, Y)$, то вона збігається до T і поточково.*

Доведення. $\|T_n x - Tx\| = \|(T_n - T)x\| \leqslant \|T_n - T\| \cdot \|x\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. $\square$

Вправи

1. Нехай $X = C[0, 1]$, $Y = \mathbb{R}$ і оператори $T_n \in L(X, Y)$ діють за правилом $T_n(f) = f(0) - f(1/n)$. Обчисліть норми операторів T_n.
2. З поточкової збіжності не випливає збіжність за нормою. Приклад: послідовність операторів із попередньої вправи прямує до 0 поточково, проте не прямує за нормою.
3. Відомий загальний факт (Josefson-Nissenzweig, [Jos] & [Nis], див. також [Beh]): на будь-якому нескінченновимірному нормованому просторі існує послідовність неперервних лінійних функціоналів, збіжна до 0 поточково, але не збіжна за нормою. Наведіть такі приклади у всіх відомих Вам нескінченновимірних нормованих просторах.
4. В умовах теореми 2 доведіть, що $\|T\| \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \|T_n\|$. Іншими словами, норма на $L(X, Y)$ напівнеперервна знизу щодо поточкової збіжності.
5. Введіть на $L(X, Y)$ таку топологію, щоб збіжність у цій топології була рівносильна поточковій збіжності.

6.4.4. Повнота простору операторів. Спряжений простір

Теорема. *Нехай X — нормований, а Y — банахів простір. Тоді $L(X, Y)$ — банахів простір.*

Доведення. Спиратимося на означення. Нехай оператори $T_n \in L(X, Y)$ утворюють фундаментальну послідовність: $\|T_n - T_m\| \to 0$ $(n, m \to \infty)$. Тоді в кожній точці $x \in X$ значення операторів лежать у повному просторі Y і утворюють послідовність Коші:

$$\|T_n x - T_m x\| \leqslant \|T_n - T_m\| \cdot \|x\| \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0.$$

Отже, для будь-якого $x \in X$ існує границя послідовності $(T_n x)$. Означимо оператор $T\colon X \to Y$ рівністю $Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x$. За теоремою 1 попереднього пункту 6.4.3, оператор T лінійний. Оскільки кожна фундаментальна послідовність обмежена, то, за теоремою 2 того ж пункту, $T \in L(X, Y)$. Нам залишилось перевірити, що $T = \lim_{n\to\infty} T_n$ в нормі простору $L(X, Y)$. З огляду на фундаментальність послідовності T_n для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує такий номер $N(\varepsilon)$, що $\|T_N - T_M\| < \varepsilon$ для будь-яких $M > N > N(\varepsilon)$. Тоді для будь-якої точки $x \in S_X$ одиничної сфери при $M > N > N(\varepsilon)$ також виконується оцінка

$\|T_N x - T_M x\| < \varepsilon$. Переходячи в останній нерівності до границі при $M \to \infty$, отримаємо, що $\|T_N x - Tx\| < \varepsilon$. Якщо в лівій частині цієї нерівності взяти супремум по $x \in S_X$, ми одержимо, що $\|T_N - T\| \leqslant \varepsilon$ при $N > N(\varepsilon)$. Тобто $T = \lim\limits_{n\to\infty} T_n$, що й потрібно було довести. □

Спряженим простором до нормованого простору X називається простір X^* усіх неперервних лінійних функціоналів на X, наділений нормою $\|f\| = \sup\limits_{x \in S_X} |f(x)|$. Іншими словами, якщо X — дійсний простір, то $X^* = L(X;\mathbb{R})$, якщо ж X — комплексний простір, то $X^* = L(X;\mathbb{C})$. Оскільки і $\mathbb{R}$, і $\mathbb{C}$ — повні простори, то на підставі щойно доведеної теореми простір X^* повний незалежно від того, повний чи неповний простір X.

Так само, як для норми оператора (див. зауваження 2 п. 6.4.2), для норми функціонала є інші стандартні означення. Випишемо одне з тих, де відіграє роль те, що мова йде саме про функціонали, а не про оператори загального вигляду.

Зауваження. Нехай X — дійсний нормований простір, $f \in X^*$. Тоді $\|f\| = \sup\limits_{x \in S_X} f(x)$.

Доведення. Скористаємось симетричністю сфери: $x \in S_X$ тоді і тільки тоді, коли $-x \in S_X$. Отже, $\sup\limits_{x \in S_X} f(x) = \sup\limits_{x \in S_X} f(-x)$. Відповідно,

$$\|f\| = \sup_{x \in S_X} |f(x)| = \sup_{x \in S_X} \max\{f(x), -f(x)\} =$$

$$= \max\left\{\sup_{x \in S_X} f(x), \sup_{x \in S_X} f(-x)\right\} = \sup_{x \in S_X} f(x).$$ □

Вправи

1. Нехай X — дійсний нормований простір, $f \in X^*$. Тоді $\|f\| = \sup\limits_{x \in \overline{B}_X} f(x)$.

2. Нехай X — комплексний нормований простір, $f \in X^*$. Тоді $\|f\| = \sup_{x \in S_X} \mathrm{Re} f(x)$.

3. На просторі l_∞ всіх обмежених числових послідовностей вигляду $x = (x_1, x_2, ...)$, наділеному нормою $\|x\| = \sup_n |x_n|$, задамо функціонал f формулою $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$, де $a = (a_1, a_2, ...)$ — фіксований елемент простору l_1. Доведіть, що $\|f\| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

6.5. Продовження операторів

У цьому розділі ми розглянемо деякі прості, але корисні умови можливості продовження неперервного оператора з підпростору нормованого простору на весь простір.

6.5.1. Продовження за неперервністю

Теорема 1. *Нехай X_1 — щільний підпростір нормованого простору X; Y — банахів простір, $T_1 \in L(X_1, Y)$. Тоді оператор T_1 однозначно продовжується до оператора $T \in L(X, Y)$.*

Доведення. На підставі щільності підпростору X_1 для будь-якого $x \in X$ існує послідовність $x_n \in X_1$, яка прямує до x. Тоді $T_1 x_n$ утворюють в Y послідовність Коші:

$$\|T_1 x_n - T_1 x_m\| \leqslant \|T_1\| \cdot \|x_n - x_m\| \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0.$$

Позначимо границю цієї послідовності через $T(x)$. Тоді

$$\|T(x)\| = \lim_{n\to\infty} \|T_1 x_n\| \leqslant \|T_1\| \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|T_1\| \cdot \|x\|.$$

Зазначимо, що $T(x)$ справді залежить тільки від x і не залежить від вибору x_n: якщо $x_n^1 \in X_1$ — це деяка інша збіжна до x послідовність, то

$$\left\|T_1 x_n - T_1 x_n^1\right\| \leqslant \|T_1\| \cdot \left\|x_n - x_n^1\right\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

і, отже, границі у $(T_1 x_n)$ і $(T_1 x_n^1)$ однакові. Перевіримо лінійність оператора T. Нехай $x_1, x_2 \in X$, $x_1^n, x_2^n \in X_1$, $x_2^n \to x_2$, $x_1^n \to x_1$ $(n \to \infty)$. Маємо

$$T(ax_1 + bx_2) = \lim_{n\to\infty} T_1(ax_1^n + bx_2^n) =$$
$$= a \lim_{n\to\infty} T_1(x_1^n) + b \lim_{n\to\infty} T_1(x_2^n) = aT(x_1) + bT(x_2).$$

З огляду на вже доведену нерівність $\|T(x)\| \leqslant \|T_1\| \cdot \|x\|$ оператор T неперервний, тобто $T \in L(X, Y)$. Отже, ми довели існування продовження. Єдиність випливає з того, що дві неперервні функції, які збігаються на щільній множині, збігаються скрізь. $\square$

Вправи

1. У наведеному вище міркуванні ми опустили перевірку того, що оператор T є продовженням оператора T_1. Перевірте це самостійно.
2. Доведіть, що в умовах попередньої теореми $\|T\| \leqslant \|T_1\|$.
3. Нехай X, Y — нормовані простори, $X_1 \subset X$ — довільний підпростір, $T \in L(X,Y)$ — це продовження оператора $T_1 \in L(X_1, Y)$. Тоді $\|T\| \geqslant \|T_1\|$.
4. Зіставивши вправи 2 і 3, доведіть, що в умовах теореми 1 $\|T\| = \|T_1\|$.
5. Наведіть приклад неперервної функції, заданої на щільній підмножині відрізка [0,1], яка проте не продовжується на весь відрізок зі збереженням неперервності.
6. Перевірте, що неперервний лінійний оператор — це рівномірно неперервне відображення. Виведіть основну теорему цього параграфа з теореми п. 1.3.4 про продовження рівномірно неперервного відображення. При цьому лінійність продовженого оператора можна вивести з єдиності продовження.

6.5.2. Проектори і продовження із замкненого підпростору

Нехай X_1 — деякий підпростір нормованого простору X. Оператор $P \in L(X, X)$ називається *проектором* на X_1, якщо $P(X) \subset X_1$ і $Px = x$ для будь-якого $x \in X_1$.

Теорема. *Для підпростору X_1 нормованого простору X такі умови еквівалентні:*

(1) в X існує проектор на X_1;

(2) для будь-якого нормованого простору Y кожний оператор $T_1 \in L(X_1, Y)$ продовжується до оператора $T \in L(X, Y)$.

Доведення. (1) $\Rightarrow$ (2). Означимо $T \in L(X,Y)$ формулою $Tx = T_1(Px)$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Візьмемо $Y = X_1$ і означимо $T_1 \in L(X_1, Y)$ за правилом $T_1 x = x$. Нехай $T \in L(X,Y)$ — продовження оператора T_1. Оскільки в нашому випадку $Y \subset X$, ми можемо розглядати T як оператор з X в X. Маємо: $T(X) \subset Y = X_1$, і для будь-якого $x \in X_1$ виконуються рівності $Tx = T_1 x = x$. Тобто T і є шуканим проектором на X_1. □

Вправи

1. Розпишіть детальніше доведення імплікації (1) $\Rightarrow$ (2) з останньої теореми.
2. Нехай X_1 — підпростір нормованого простору X, $P \in L(X,X)$ — проектор на X_1. Тоді $P(X) = X_1 = \mathrm{Ker}(I - P)$ і підпростір X_1 замкнений в X.
3. Нехай в умовах попередньої вправи $X_1 \neq \{0\}$. Тоді $\|P\| \geqslant 1$.
4. Для підпростору X_1 нормованого простору X такі умови еквівалентні:

– в X існує проектор P на X_1 з $\|P\| = 1$;

– для будь-якого нормованого простору Y кожний оператор $T_1 \in L(X_1, Y)$ продовжується до оператора $T \in L(X,Y)$ з $\|T\| = \|T_1\|$.

5. Нехай $X = l_1^3$ (означення див. в п. 6.2.1, вправа 2), X_1 — підпростір, що складається з усіх елементів з нульовою сумою координат. Доведіть, що в X не існує проектора P на X_1 з $\|P\| = 1$.

Коментарі до вправ

6.1.2

Вправа 5. Див. п. 18.2.1.

6.2.2

Вправа 3. Див. теорему 2 п. 14.1.2.

Вправа 7. Нехай $g \in L_p[a,b]$. Розглянемо послідовність зрізок $g_n = \min\{n, \max\{g, -n\}\}$. Послідовність функцій $|g_n - g|^p$ прямує майже скрізь до нуля і має інтегровну мажоранту $|g|^p$. Отже, за теоремою Лебега про мажоровану збіжність, $\|g_n - g\|_p \to 0$ $(n \to \infty)$.

Вправа 8. За попереднім твердженням, достатньо довести, що будь-яка обмежена функція $f \in L_p[a,b]$ може бути наближена неперервними в метриці L_p. Згідно з вправою 6 п. 3.2.3, існує послідовність (f_n) неперервних функцій, збіжна до f майже скрізь. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що всі f_n обмежені за модулем тією самою сталою C, що й f (інакше замінимо f_n зрізками $\tilde{f}_n = \min\{C, \max\{f_n, -C\}\}$). Збіжність $\|f_n - f\|_p$ до 0 випливає з теореми Лебега про мажоровану збіжність.

6.3.3

Вправа 5. $[x] \in q(B_X) \Leftrightarrow \exists y \in B_X : [y] = [x] \Leftrightarrow \|[x]\| < 1 \Leftrightarrow [x] \in B_{X/X_1}$.

Вправа 6.

$$\|\tilde{T}\| = \sup_{[x] \in B_{X/X_1}} \|\tilde{T}[x]\| = \sup_{[x] \in q(B_X)} \|\tilde{T}[x]\| =$$

$$= \sup_{x \in B_X} \|\tilde{T}[x]\| = \sup_{x \in B_X} \|Tx\| = \|T\|.$$