

Тема 1. Оператори у банахових просторах – загальна теорія

1. Базові приклади банахових просторів. Підпростір банахова простору.
2. Неперервні лінійні оператори. Збіжність за нормою і поточкова збіжність.
3. Теорема Банаха-Штейнгауза (формулювання).
4. Норма поточної граници послідовності операторів.
5. Критерій поточної збіжності послідовності операторів (формулювання).
6. Теорема про повноту простору операторів.
7. Фактор-простір та його повнота. Фактор-відображення.
8. Теорема про відкрите відображення (формулювання).
9. Теорема про обернений оператор (формулювання).
10. Ін'єктивні оператори та обмежені знизу оператори. Теорема про ін'єктивні оператори з замкненим образом.
11. Ін'єктивізація лінійного оператора.
12. Критерій замкненості образу оператора.
13. Теорема Гана-Банаха про продовження (формулювання).
14. Продовження оператора по неперервності.
15. Доповнюваність та продовження оператора з замкненого підпростору.
16. Спряжений оператор. Властивості.
17. Приклади: спряжений до оператора вкладення та до фактор-відображення.
18. Двоїстість між підпросторами та фактор-просторами.
19. Формула для ядра спряженого оператора.
20. Замикання образу спряженого оператора.
21. Зв'язок між властивостями вихідного оператора та спряженого до нього.

Тема 2. Базиси та їх застосування

22. Означення базису Шаудера. Лінійна незалежність та повнота. Сепарабельність простору і існування базису.
23. Канонічний базис просторів послідовностей.
24. Координатні функціонали та оператори частинних сум.
25. Теорема Банаха про оператори частинних сум.
26. Критерій базиса. Базисна константа. Монотонні базиси.
27. Опис лінійних функціоналів на просторі з базисом.
28. Загальний вигляд лінійного функціонала на c_0 та на ℓ_p .
29. Критерій поточної збіжності функціоналів на просторі з базисом.
30. Приклади обчислення спряжених операторів.
31. Другий спряжений простір. Рефлексивні простори. Приклади.

Тема 3. Компакти та компактні оператори

32. Передкомпакти та компакти у нескінченновимірному просторі.
33. Теорема Ріса про некомпактність одиничної кулі нескінченновимірному простору.
34. Скінченновимірні оператори та апроксимативна одиниця.
35. Критерій передкомпактності множини у просторі з базисом.
36. Критерії передкомпактності множин у c_0 та ℓ_p .
37. Теорема Арцела – формулювання. Одностайна неперервність та умова Ліпшиця.
38. Властивості сім'ї компактних операторів.
39. Наближення компактних операторів скінченновимірними.
40. Приклади компактних та некомпактних операторів.
41. Теорема Ріса про компактність спряженого оператора.

Тема 4. Елементи спектральної теорії операторів

42. Теорема про мале збурення одиничного оператора та формула обернення.
43. Теорема про мале збурення оборотного оператора.

44. Спектр і власні числа. Теореми про замкненість і обмеженість спектра.
45. Теорема Ліувілля для функцій зі значеннями у банаховому просторі.
46. Резольвента: означення та основна тотожність.
47. Властивості резольвенти.
48. Теорема про непорожність спектра.
49. Властивості операторів вигляду $I - T$, де T – компактний.
50. Спектральна теорема для компактних операторів у банаховому просторі.

Тема 5. Оператори у гільбертовому просторі

51. Базові приклади гільбертових просторів, відповідних скалярних добутків та норм (повторення).
52. Теорема про загальний вигляд білінійної форми.
53. Спряжений оператор до оператора у гільбертовому просторі.
54. Формула для норми самоспряженого оператора (повторення).
55. Дійсність квадратичної форми самоспряженого оператора.
56. Дійсність спектра самоспряженого оператора.
57. Додатні оператори. Нерівність між нормою значення та значенням квадратичної форми.
58. Теорема про структуру спектра самоспряженого оператора та її наслідки.
59. Поліноми від оператора – елементарні властивості.
60. Поліноми від оператора – критерій оборотності.
61. Теорема про відображення спектру для поліномів від оператора.
62. Нормальні оператори. Дійсна та уявна частини. Формула для норми.
63. Норма полінома від самоспряженого оператора.
64. Самоспряжені проектори.
65. Неперервні функції від оператора. Критерій оборотності.
66. Теорема про відображення спектру для неперервної функції від самоспряженого оператора.
67. Корінь квадратний від оператора та його властивості.

- 68. Додатні оператори: опис через спектр; додатність добутку.
- 69. Модуль оператора.
- 70. Ізометричні вкладення. Унітарні оператори.
- 71. Послаблена формула полярного розкладу.
- 72. Умови існування полярного розкладу.

Тема 5. Оператори в просторі L_p

- 73. Повторення: нерівність Гельдера, зв'язок між L_p при різних p .
- 74. Теорема Ф.Ріса про загальний вигляд лінійного функціонала на L_p .
- 75. Перетворення Фур'є в $L_1(-\infty, +\infty)$. Властивості перетворення Фур'є функції з $L_1(-\infty, +\infty)$.
- 76. Перетворення Фур'є і згортка.
- 77. Перетворення Фур'є і диференціювання.
- 78. Формула обернення.
- 79. Формула Планшереля.
- 80. Означення оператора Фур'є в $L_2(-\infty, +\infty)$.
- 81. Властивості оператора Фур'є в $L_2(-\infty, +\infty)$.