Розділ 8. Інтеграл у $C(K)$

У перших трьох підрозділах цього розділу ми розглянемо детальніше теорію інтегрування функцій на компактному топологічному просторі K.

В останньому підрозділі отримані результати будуть застосовані до доведення теореми Ріса-Маркова-Какутані про загальний вигляд лінійного функціонала в $C(K)$. В останніх двох підрозділах розглянемо інтегрування комплексних функцій за комплексними зарядами і функціонали в комплексному $C(K)$. До цього всі функції, заряди та функціонали будуть вважатися дійсними.

8.1. Регулярні борелеві міри на компакті

8.1.1. Внутрішня міра і регулярність

Нагадаємо, що борелевою мірою на топологічному просторі X називається скінченна зліченно-адитивна міра, задана на сім'ї всіх борелевих підмножин простору X.

Означення 1. Нехай μ — борелева міра на топологічному просторі X. Для будь-якої підмножини $A \subset X$ означимо *внутрішню міру* $\mu_*(A)$ як супремум мір всіх замкнених множин, які містяться в A. Міра μ називається *регулярною*, якщо для всіх відкритих підмножин $\mu_*(A) = \mu(A)$. Іншими словами, міра μ є регулярною, якщо для будь-якої відкритої підмножини $A \subset X$ і будь-якого $\varepsilon > 0$ існує замкнена підмножина $B \subset A$ з $\mu(B) \geqslant \mu(A) - \varepsilon$.

Лема. *Нехай X — метричний простір. Тоді будь-яку відкриту підмножину $A \subset X$ можна зобразити як об'єднання зростаючої послідовності замкнених множин.*

Доведення. Розглянемо на X функцію $f(x) = \rho(x, X \backslash A)$. Ця функція неперервна (п. 1.3.2), відповідно, множини $A_n = f^{-1}([1/n, +\infty))$ замкнені. Ці множини утворюють зростаючу послідовність, і

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = f^{-1}((0, +\infty)) = A. \qquad \square$$

Теорема. *На метричному просторі кожна борелева міра є регулярною.*

Доведення. Нехай μ — борелева міра на метричному просторі X, $A \subset X$ — відкрита підмножина. За попередньою лемою, існує зростаюча послідовність замкнених множин

Наведений учбовий текст є витягом з підручнику
Кадець В.М. Курс функціонального аналізу та теорії міри. – Львів: Видавець І.Е. Чижиков, 2012. – 590 с. – (Серія "Університетська бібліотека") ISBN 978-966-2645-03-3
Усі посилання на теореми, вправи, означення, такі що не увійшли до цього тексту – це посилання на підручник.

A_n, яка дає в об'єднанні всю множину A. Скориставшись зліченною адитивністю, отримуємо, що $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_k) = \mu(A)$, тобто міра множини A може бути з будь-якою точністю наближена мірами її замкнених підмножин. □

На загальних топологічних просторах є також і нерегулярні борелеві міри. Як приклад розглянемо відрізок $[0,1]$, наділений такою топологією τ: відкритими в τ вважаються множини, доповнення до яких скінченні або зліченні. У такій спеціальній топології відкриті і замкнені множини разом вже утворюють σ-алгебру. Відповідно, τ-борелевими будуть тільки τ-відкриті та τ-замкнені множини. Означимо міру μ, поклавши $\mu(A) = 0$, якщо A замкнена в топології τ (тобто якщо A — скінченна або зліченна множина) і взявши $\mu(A) = 1$ для τ-відкритих множин. Тоді $\mu([0,1]) = 1$, а $\mu_*([0,1]) = 0$[1]. У підрозділі 8.3 як наслідок загальних результатів буде показано, що для регулярної борелевої міри на компакті рівність $\mu_*(A) = \mu(A)$ виконується не лише для відкритих, але і для будь-яких борелевих множин (див. вправа 1 п. 8.3.2).

Вправи

1. Якщо підмножина $A \subset K$ замкнена, то $\mu_*(A) = \mu(A)$.
2. $\mu_*(A) \leqslant \mu(A)$ для будь-якої борелевої підмножини $A \subset K$.
3. Якщо $A \subset B \subset K$, то $\mu_*(A) \leqslant \mu_*(B)$.
4. Нехай $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ — зростаючий ланцюжок підмножин компакту K, $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Тоді $\mu_*(A) \geqslant \lim\limits_{n\to\infty} \mu_*(A_k)$.

Беровою σ-алгеброю на топологічному просторі K називається найменша σ-алгебра Σ_0, в якій всі неперервні функції, визначені на K, вимірні. Покажіть, що:
5. Якщо K — компакт, то σ-алгебра Σ_0 породжується сім'єю всіх відкритих множин, які належать до класу F_σ.
6. Якщо K — метричний компакт, то σ-алгебра Σ_0 збігається з σ-алгеброю борелевих множин.

8.1.2. Носій міри

Нехай μ — регулярна борелева міра на компакті K. Точка $x \in K$ називається *істотною точкою* міри μ, якщо будь-який окіл точки x має ненульову міру. *Носієм міри* μ називається множина $\operatorname{supp}\mu$ всіх істотних точок цієї міри.

Теорема 1. $\operatorname{supp}\mu$ *— замкнена множина,* $\mu\left(K \backslash \operatorname{supp}\mu\right) = 0$ *і жодна відкрита множина нульової міри не перетинається із* $\operatorname{supp}\mu$.

Доведення. Потрібно довести, що множина $V = K \backslash \operatorname{supp}\mu$ всіх неістотних точок міри μ відкрита, має нульову міру, і кожна відкрита множина нульової міри цілком міститься в V.

Спочатку зазначимо, що якщо U — відкрита підмножина компакту K і $\mu(U) = 0$, то $U \subset V$. Справді, кожна точка множини U має окіл (а саме U) нульової міри, отже, жодна точка множини U не є істотною. Нехай $x \in V$. Це означає, що існує відкритий окіл U точки x, яка має $\mu(U) = 0$ і, отже, що міститься у V. Ми довели, що V

[1] Для тих, хто ознайомлений з поняттям порядкових чисел (ординалів). Позначимо через ω_1 перший незліченний ординал. Розглянемо множину X всіх ординалів, що не перевищують ω_1. Околом ординала α називатимемо будь-яку підмножину $U \subset X$, яка містить відрізок вигляду $(\beta, \alpha]$ з $\beta < \alpha$. У відповідній топології множина X буде компактом. Далі, означимо борелеву міру μ на X у такий спосіб: якщо борелева множина A містить підмножину вигляду $B \setminus \{\omega_1\}$, де B — замкнена множина, для якої ω_1 — гранична точка, покладемо $\mu(A) = 1$, у протилежному випадку покладемо $\mu(A) = 0$. Маємо $\mu((1, \omega_1)) = 1$, але в водночас міра будь-якої замкненої підмножини відрізка $(1, \omega_1)$ дорівнює нулю. Отже, μ дає приклад нерегулярної борелевої міри на компактному топологічному просторі.

разом з кожною своєю точкою містить і деякий окіл, тобто V є відкритою. На підставі регулярності міри для доведення рівності $\mu(V) = 0$ достатньо перевірити, що міри всіх замкнених підмножин множини V дорівнюють нулю. Отже, нехай підмножина $W \subset V$ замкнена. Для кожного $x \in W$ виберемо відкритий окіл U_x з $\mu(U_x) = 0$. Ці околи разом утворюють відкрите покриття компакту W. Виберемо скінченне підпокриття $U_{x_1}, U_{x_2}, ..., U_{x_n}$. Маємо $\mu(W) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mu(U_{x_k}) = 0$. □

Теорема 2. *Нехай μ — регулярна борелева міра на компакті K і дві неперервні функції f_1 і f_2 на K збігаються майже скрізь за мірою μ. Тоді ці функції збігаються у всіх точках носія міри μ.*

Доведення. Множина U всіх точок, де $f_1 \neq f_2$, — відкрита множина нульової міри. Отже, U не перетинається з $\operatorname{supp} \mu$. □

8.2. Продовження елементарного інтеграла

8.2.1. Елементарний інтеграл

Означення 1. *Елементарним інтегралом* на компакті K називається лінійний функціонал $\mathcal{I}$ на $C(K)$, який задовольняє таку *умову додатності*: якщо функція f невід'ємна, то $\mathcal{I}(f) \geqslant 0$.

Властивості елементарного інтеграла

(1) Для будь-яких $f, g \in C(K)$ якщо $f \geqslant g$, то $\mathcal{I}(f) \geqslant \mathcal{I}(g)$.

(2) Якщо $|f| \leqslant g$, то $|\mathcal{I}(f)| \leqslant \mathcal{I}(g)$.

(3) $\mathcal{I}$ — неперервний лінійний функціонал на $C(K)$ і $\|\mathcal{I}\| = \mathcal{I}(\mathbb{1})$[2].

Доведення. (1) $f \geqslant g \;\Rightarrow\; f - g \geqslant 0 \;\Rightarrow\; \mathcal{I}(f-g) \geqslant 0 \;\Rightarrow\; \mathcal{I}(f) \geqslant \mathcal{I}(g)$.
(2) $|f| \leqslant g \;\Rightarrow\; -g \leqslant f \leqslant g \;\Rightarrow\; -\mathcal{I}(g) \leqslant \mathcal{I}(f) \leqslant \mathcal{I}(g) \;\Rightarrow\; |\mathcal{I}(f)| \leqslant \mathcal{I}(g)$.
(3) Нехай f — довільна функція з одиничної сфери простору $C(K)$. Тоді $|f| \leqslant 1$ у всіх точках і, за попереднім пунктом, $|\mathcal{I}(f)| \leqslant \mathcal{I}(\mathbb{1})$. □

Оскільки неперервні функції на K вимірні за Борелем і обмежені, то вони інтегровні за будь-якою борелевою мірою на K. Тому як приклад елементарного інтеграла можна взяти інтеграл за будь-якою фіксованою борелевою мірою на K.

Означення 2. *Елементарним інтегралом*, породженим борелевою мірою μ на компакті K, називається лінійний функціонал $\mathbf{F}_\mu$ на $C(K)$, який задається формулою $\mathbf{F}_\mu(f) = \int\limits_K f d\nu$.

Нижче ми покажемо, що, крім функціоналів вигляду $\mathbf{F}_\mu$, інших прикладів елементарних інтегралів не існує. Більше того, для будь-якого елементарного інтеграла $\mathcal{I}$ буде доведено існування **регулярної** борелевої міри μ, яка породжує цей інтеграл. Ідея побудови такої міри μ проста: потрібно покласти $\mu(A) = \mathcal{I}(\mathbb{1}_A)$. Проте на шляху реалізації цієї ідеї стоїть істотна перепона: функціонал $\mathcal{I}$ визначений тільки для неперервних функцій, а характеристичні функції множин, як правило, розривні. Тому наша найближча мета — поширити цей функціонал на достатньо широкий клас функцій, який містить принаймні всі характеристичні функції борелевих множин. Цьому присвячено наступні три підрозділи.

[2] Символом $\mathbb{1}$ ми позначаємо функцію, яка дорівнює тотожній одиниці.

8.2.2. Верхній інтеграл напівнеперервної знизу функції

Нагадаємо, що через $l_\infty(K)$ і $LSC(K)$ позначаються відповідно множини всіх обмежених і всіх напівнеперервних знизу функцій на K (означення і властивості напівнеперервних функцій див. в п. 1.2.4). Для функцій $g \in LSC(K) \cap l_\infty(K)$, тобто напівнеперервних знизу обмежених функцій на K, введемо в розгляд величину

$$\mathcal{I}^*(g) = \sup\{\mathcal{I}(h) : h \in C(K) \text{ і } h < g\}.$$

Теорема 1. *Величина $\mathcal{I}^*$ має такі властивості:*

(1) якщо $g \in C(K)$, то $\mathcal{I}^*(g) = \mathcal{I}(g)$;

(2) якщо $g_1, g_2 \in LSC(K) \cap l_\infty(K)$ і $g_1 \leqslant g_2$, то $\mathcal{I}^*(g_1) \leqslant \mathcal{I}^*(g_2)$;

(3) $\mathcal{I}^*(\lambda g) = \lambda \mathcal{I}^*(g)$ для додатних скалярів λ;

(4) $\mathcal{I}^*(g_1 + g_2) = \mathcal{I}^*(g_1) + \mathcal{I}^*(g_2)$ для будь-яких $g_1, g_2 \in LSC(K) \cap l_\infty(K)$.

Доведення. Перші три властивості очевидні. Доведемо четверту властивість. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ і виберемо функції $h_1, h_2 \in C(K)$, $h_1 < g_1$, $h_2 < g_2$, для яких $\mathcal{I}(h_1) \geqslant \mathcal{I}^*(g_1) - \varepsilon$ і $\mathcal{I}(h_2) \geqslant \mathcal{I}^*(g_2) - \varepsilon$. Маємо

$$\mathcal{I}^*(g_1 + g_2) \geqslant \mathcal{I}(h_1 + h_2) \geqslant \mathcal{I}^*(g_1) + \mathcal{I}^*(g_2) - 2\varepsilon.$$

З огляду на довільність ε ми довели нерівність $\mathcal{I}^*(g_1+g_2) \geqslant \mathcal{I}^*(g_1)+\mathcal{I}^*(g_2)$. Для доведення оберненої нерівності виберемо функцію $h \in C(K)$, $h < g_1+g_2$ з $\mathcal{I}(h) \geqslant \mathcal{I}^*(g_1+g_2)-\varepsilon$. Згідно з теоремою 3 п. 1.2.4, застосованої до функцій g_1, g_2, для будь-якого $x \in K$ існують такі функції $h_{1,x}, h_{2,x} \in C(K)$, що $h_{1,x} < g_1$, $h_{2,x} < g_2$ у всіх точках компакту і $h_{1,x}(x)+h_{2,x}(x) > h(x)$. На підставі неперервності функцій, що беруть участь в останній нерівності, у будь-якого $x \in K$ існує відкритий окіл U_x, для всіх точок t якого усе ще $h_{1,x}(t)+h_{2,x}(t) > h(t)$. Ці околи U_x, $x \in K$ сукупно утворюють покриття компакту K, отже, можна вибрати скінченне підпокриття $U_{x_1}, U_{x_2}, ..., U_{x_n}$. Приймемо $h_1 = \max\limits_{k\in\{1,2,..,n\}} h_{1,x}$, $h_2 = \max\limits_{k\in\{1,2,..,n\}} h_{2,x}$. Ці неперервні функції задовольняють нерівностям $h_1 < g_1$, $h_2 < g_2$, і за побудовою $h_1 + h_2 > h$ вже у всіх точках. Отже,

$$\mathcal{I}^*(g_1 + g_2) \leqslant \mathcal{I}(h) + \varepsilon \leqslant \mathcal{I}(h_1 + h_2) + \varepsilon \leqslant \mathcal{I}^*(g_1) + \mathcal{I}^*(g_2) + \varepsilon.$$

Залишилось спрямувати ε до нуля. □

Зауваження. Величину $\mathcal{I}^*$ ми не можемо назвати лінійним функціоналом, оскільки її область визначення не є лінійним простором. Напівнеперервність знизу зберігається при додаванні і множенні на додатний скаляр, але при множенні на від'ємний скаляр або відніманні може втрачатись. Проте якщо $h \in C(K)$, то й $-h \in C(K) \subset LSC(K) \cap l_\infty(K)$. Тоді для будь-якого $g \in LSC(K) \cap l_\infty(K)$ різниця $g - h$ лежить в області визначення $\mathcal{I}^*$, і $\mathcal{I}^*(g - h) = \mathcal{I}^*(g) - \mathcal{I}^*(h)$.

Теорема 2. *Нехай $g_n \in LSC(K) \cap l_\infty(K)$, (g_n) — зростаюча, рівномірно обмежена послідовність функцій, збіжна поточково до деякої функції g. Тоді $g \in LSC(K) \cap l_\infty(K)$ і $\mathcal{I}^*(g) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{I}^*(g_n)$.*

Доведення. Функція g обмежена тією ж сталою, що й усі g_n, тобто $g \in l_\infty(K)$. Далі, $g(x) = \sup\{g_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$. Згідно з теоремою 1 (підпункт 4) п. 1.2.4, $g \in LSC(K)$. Тобто $g \in LSC(K) \cap l_\infty(K)$.

Числа $\mathcal{I}^*(g_n)$ утворюють неспадну послідовність і обмежені зверху числом $\mathcal{I}^*(g)$. Отже, $\lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{I}^*(g_n)$ існує і не перевищує $\mathcal{I}^*(g)$. Для доведення оберненої нерівності достатньо отримати оцінку $\lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{I}^*(g_n) \geqslant \mathcal{I}(h)$ для всіх неперервних функцій h, менших за g. Розглянемо при фіксованому h множини $A_n = \{t \in K : g_n(t) > h(t)\}$. Множини A_n відкриті, утворюють зростаючий ланцюжок і покривають в сукупності весь компакт K. Отже, існує індекс $n = n_0$, для якого $A_{n_0} = K$. Це означає, що $g_{n_0}(t) > h(t)$ скрізь на K. Отже, $\lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{I}^*(g_n) \geqslant \mathcal{I}^*(g_{n_0}) \geqslant \mathcal{I}(h)$. □

8.2.3. Верхній інтеграл на $l_\infty(K)$

Верхнім інтегралом функції $f \in l_\infty(K)$ називається величина

$$\overline{\mathcal{I}}(f) = \inf\left\{\mathcal{I}^*(g) : g \in LSC(K) \cap l_\infty(K), g \geqslant f\right\}.$$

Теорема 1. *Величина $\overline{\mathcal{I}}$ має такі властивості:*

(1) якщо $f \in LSC(K) \cap l_\infty(K)$, то $\overline{\mathcal{I}}(f) = \mathcal{I}^*(f)$;[3]

(2) якщо $f_1, f_2 \in l_\infty(K)$ і $f_1 \leqslant f_2$, то $\overline{\mathcal{I}}(f_1) \leqslant \overline{\mathcal{I}}(f_2)$;

(3) $\overline{\mathcal{I}}(\lambda f) = \lambda \overline{\mathcal{I}}(f)$ для додатних скалярів λ;

(4) $\overline{\mathcal{I}}(f_1 + f_2) \leqslant \overline{\mathcal{I}}(f_1) + \overline{\mathcal{I}}(f_2)$ для будь-яких $f_1, f_2 \in l_\infty(K)$.

Доведення. Як і в теоремі 1 попереднього підрозділу, доведення потребує лише четверта властивість. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ і виберемо функції $g_1, g_2 \in LSC(K) \cap l_\infty(K)$, $g_i \geqslant f_i$ з $\mathcal{I}^*(g_i) \leqslant \overline{\mathcal{I}}(f_i) + \varepsilon$, $i = 1, 2$. Маємо

$$\overline{\mathcal{I}}(f_1 + f_2) \leqslant \mathcal{I}^*(g_1 + g_2) \leqslant \overline{\mathcal{I}}(f_1) + \overline{\mathcal{I}}(f_2) + 2\varepsilon.$$

Залишається спрямувати ε до нуля. □

Зауваження. Остання теорема означає, зокрема, що $\overline{\mathcal{I}}$ — це опуклий функціонал на $l_\infty(K)$, причому на $C(K)$ цей функціонал мажорує елементарний інтеграл $\mathcal{I}$. Тому для шуканого продовження елементарного інтеграла і побудови борелевої міри, яка породжує цей інтеграл, можна використати теорему Гана-Банаха. Такий підхід цілком можливий, але ми підемо іншим шляхом, на якому буде отримано явну конструкцію продовження. Цим ми дещо ускладнимо саме означення потрібної міри, але полегшимо доведення її зліченної адитивності і регулярності. **Теорема 2.** *Нехай $f, f_n \in l_\infty(K)$, $f_n \geqslant 0$ і $f \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ у всіх точках. Тоді $\overline{\mathcal{I}}(f) \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} \overline{\mathcal{I}}(f_n)$.*

Доведення. Нехай $a = \sup\{f(x) : x \in K\}$. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ і для кожного $n \in \mathbb{N}$ виберемо функцію $g_n \in LSC(K) \cap l_\infty(K)$, $g_n \geqslant f_n$ з $\mathcal{I}^*(g_n) \leqslant \overline{\mathcal{I}}(f_n) + \varepsilon/2^n$. Розглянемо допоміжні функції $s_n(x) = \min\left\{a, \sum_{j=1}^n g_j(x)\right\}$. Оскільки $g_n \geqslant 0$, послідовність (s_n)

[3] Ця властивість обґрунтовує застосування назви «верхній інтеграл» і до величини $\mathcal{I}^*$.

зростає. Далі, $s_1 \leqslant s_n \leqslant a$, тобто послідовність (s_n) рівномірно обмежена. Позначимо поточкову границю послідовності (s_n) через s. За теоремою 2 попереднього пункту, $s \in LSC(K) \cap l_\infty(K)$ і $\mathcal{I}^*(s) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{I}^*(s_n)$. Маємо

$$s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) = \min\left\{a, \sum_{j=1}^{\infty} g_j(x)\right\} \geqslant$$

$$\geqslant \min\left\{a, \sum_{j=1}^{\infty} f_j(x)\right\} \geqslant \min\{a, f(x)\} = f(x),$$

отже,

$$\overline{\mathcal{I}}(f) \leqslant \mathcal{I}^*(s) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{I}^*(s_n) \leqslant \lim_{n\to\infty} \mathcal{I}^*\left(\sum_{j=1}^{n} g_j(x)\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{I}^*(g_j) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \overline{\mathcal{I}}(f_j) + \varepsilon.$$

З огляду на довільність ε теорему доведено. □

8.2.4. Простір $L(K,\mathcal{I})$

Задамо на $l_\infty(K)$ напівнорму $p(f) = \overline{\mathcal{I}}(|f|)$. Тоді у псевдометриці $\rho(f_1, f_2) = \overline{\mathcal{I}}(|f_1 - f_2|)$, породженій цією напівнормою, $l_\infty(K)$ є псевдометричним простором. Позначимо через $L(K,\mathcal{I})$ замикання за цією псевдометрикою в $l_\infty(K)$ підмножини $C(K)$ всіх неперервних функцій.

Теорема 1. *$L(K,\mathcal{I})$ — замкнений лінійний підпростір в $(l_\infty(K), p)$, і $LSC(K) \cap l_\infty(K) \subset L(K,\mathcal{I})$.*

Доведення. Оскільки $C(K)$ — лінійний підпростір, то і його замикання — лінійний підпростір. Доведення потребує лише включення $LSC(K) \cap l_\infty(K) \subset L(K,\mathcal{I})$. Нехай $f \in LSC(K) \cap l_\infty(K)$. За означенням функціонала $\mathcal{I}^*$, для будь-якого n існує неперервна функція $f_n < f$, для якої $\mathcal{I}^*(f - f_n) = \mathcal{I}^*(f) - \mathcal{I}(f_n) < 1/n$. Але тоді

$$\rho(f, f_n) = \overline{\mathcal{I}}(|f - f_n|) = \mathcal{I}^*(f - f_n) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Тобто нам вдалося зобразити f як границю послідовності неперервних функцій. □

Теорема 2. *$L(K,\mathcal{I})$ має такі властивості:*

(1) якщо $f \in L(K,\mathcal{I})$, то $|f| \in L(K,\mathcal{I})$;

(2) якщо $f \in L(K,\mathcal{I})$, то $f^+ \in L(K,\mathcal{I})$ і $f^- \in L(K,\mathcal{I})$;

(3) якщо $f, g \in L(K,\mathcal{I})$, то $\max\{f, g\} \in L(K,\mathcal{I})$ і $\min\{f, g\} \in L(K,\mathcal{I})$.

Доведення. (1) Нехай $f_n \in C(K)$, $\overline{\mathcal{I}}(|f - f_n|) \to 0$ $(n \to \infty)$. Тоді $|f_n| \in C(K)$ і

$$\rho(|f|, |f_n|) = \overline{\mathcal{I}}(|f| - |f_n|) \leqslant \overline{\mathcal{I}}(|f - f_n|) \to 0, \quad n \to \infty,$$

тобто функція $|f|$ — це границя послідовності $|f_n| \in C(K)$ і, отже, $|f| \in L(K,\mathcal{I})$.

(2) Потрібно скористатись вже доведеним пунктом (1) і формулами $f^+ = \frac{f+|f|}{2}$, $f^- = (-f)^+$.

(3) Випливає з (2) і формул $\max\{f, g\} = f + (g - f)^+$, $\min\{f, g\} = -\max\{-f, -g\}$. □

Наступна теорема показує, що елементарний інтеграл $\mathcal{I}$ продовжується до лінійного функціонала на $L(K,\mathcal{I})$, причому за це продовження можна взяти верхній інтеграл.

Теорема 3. *На $L(K,\mathcal{I})$ верхній інтеграл $\overline{\mathcal{I}}$ — це p-неперервний лінійний функціонал.*

Доведення. Для будь-яких $f, g \in L(K,\mathcal{I})$ маємо

$$\left|\overline{\mathcal{I}}(f) - \overline{\mathcal{I}}(g)\right| \leqslant \overline{\mathcal{I}}\left(|f-g|\right) = \rho(f,g),$$

тобто $\overline{\mathcal{I}}$ неперервний (навіть задовольняє умову Ліпшиця). Лінійність випливає з неперервності і того, що на A (тобто на щільній підмножині) $\overline{\mathcal{I}}$ збігається з лінійним функціоналом $\mathcal{I}$, і, отже, на $C(K)$ верхній інтеграл також лінійний. Справді, нехай $f, g \in L(K,\mathcal{I})$, a, b — скаляри, (f_n) і (g_n) — послідовності неперервних функцій, збіжні у псевдометриці ρ до f і g відповідно. Тоді при $n \to \infty$

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{I}}(af+bg) &= \lim_{n\to\infty} \overline{\mathcal{I}}(af_n + bg_n) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{I}(af_n + bg_n)\\ &= a \lim_{n\to\infty} \mathcal{I}(f_n) + b \lim_{n\to\infty} \mathcal{I}(g_n) = a\overline{\mathcal{I}}(f) + b\overline{\mathcal{I}}(g).\end{aligned}$$

□

Наступна теорема — це аналог теореми Леві про ряди для верхнього інтеграла на $L(K,\mathcal{I})$.

Теорема 4. *Нехай $f_n \in L(K,\mathcal{I})$, $f \in l_\infty(K)$, $f_n \geqslant 0$ і ряд $\sum_{n=1}^\infty f_n$ збігається до f у всіх точках. Тоді $f \in L(K,\mathcal{I})$ і $\overline{\mathcal{I}}(f) = \sum_{n=1}^\infty \overline{\mathcal{I}}(f_n)$.*

Доведення. Спочатку доведемо, що $f \in L(K,\mathcal{I})$. Позначимо $\sup\{f(x)\colon x \in K\}$ через a. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ і наблизимо кожну з функцій f_n неперервною функцією g_n з точністю до $\frac{\varepsilon}{2^n}$: $\overline{\mathcal{I}}\left(|f_n - g_n|\right) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^n}$. Замінивши, за потребою, g_n на g_n^+, можемо вважати, що всі функції g_n невід'ємні. Розглянемо функцію $s(x) = \min\left\{a, \sum_{j=1}^\infty g_j(x)\right\}$. Функція s напівнеперервна знизу й обмежена, тобто за теоремою 1, $s \in L(K,\mathcal{I})$. При цьому $|s - f| \leqslant \sum_{n=1}^\infty |f_n - g_n|$ у всіх точках, і, за теоремою 2 попереднього пункту,

$$\overline{\mathcal{I}}\left(|s-f|\right) \leqslant \sum_{n=1}^\infty \overline{\mathcal{I}}\left(|f_n - g_n|\right) \leqslant \varepsilon.$$

Тобто функцію f можна з будь-якою точністю наблизити у псевдометриці K елементами простору $L(K,\mathcal{I})$, що з огляду на замкненість $L(K,\mathcal{I})$ в $l_\infty(K)$ означає, що $f \in L(K,\mathcal{I})$.

Перейдемо до доведення рівності $\overline{\mathcal{I}}(f) = \sum_{n=1}^\infty \overline{\mathcal{I}}(f_n)$. Нерівність в один бік $\overline{\mathcal{I}}(f) \leqslant \sum_{n=1}^\infty \overline{\mathcal{I}}(f_n)$ випливає з теореми 2 попереднього пункту. Нерівність в інший бік легко випливає з лінійності верхнього інтеграла на $L(K,\mathcal{I})$. Справді, на підставі додатності доданків для будь-якого натурального n виконується нерівність $\sum_{k=1}^n f_k \leqslant f$. Отже,

$$\sum_{k=1}^n \overline{\mathcal{I}}(f_k) = \overline{\mathcal{I}}\left(\sum_{k=1}^n f_k\right) \leqslant \overline{\mathcal{I}}(f).$$

Залишається спрямувати n до нескінченності. □

Наслідок (аналог теореми Леві про послідовності). *Нехай $g_n \in L(K,\mathcal{I})$, $g \in l_\infty(K)$, послідовність (g_n) поточково не спадає і збігається до g. Тоді $g \in L(K,\mathcal{I})$ і $\overline{\mathcal{I}}(g) = \lim\limits_{n\to\infty} \overline{\mathcal{I}}(g_n)$.*

Для доведення достатньо застосувати попередню теорему до ряду $\sum_{n=1}^\infty (g_{n+1} - g_n)$. Частинні суми цього ряду дорівнюють $g_{n+1} - g_1$, тобто ряд збігається до $g - g_1$. Відповідно, $g - g_1 \in L(K,\mathcal{I})$, отже, $g = (g - g_1) + g_1 \in L(K,\mathcal{I})$ і

$$\overline{\mathcal{I}}(g) - \overline{\mathcal{I}}(g_1) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \overline{\mathcal{I}}(g_{k+1} - g_k) = \lim_{n\to\infty} \overline{\mathcal{I}}(g_n) - \overline{\mathcal{I}}(g_1).$$

8.3. Регулярні борелеві міри й інтеграл

8.3.1. $\mathcal{I}$-вимірні множини. Міра, породжена інтегралом

Підмножина $A \subset K$ називається *$\mathcal{I}$-вимірною*, якщо $\mathbb{1}_A \in L(K, \mathcal{I})$. Сім'ю всіх $\mathcal{I}$-вимірних підмножин компакту K позначимо $\Sigma_{\mathcal{I}}$. Для кожної множини $A \in \Sigma_{\mathcal{I}}$ покладемо $\mu_{\mathcal{I}}(A) = \overline{\mathcal{I}}(\mathbb{1}_A)$.

Теорема 1. *Сім'я $\Sigma_{\mathcal{I}}$ утворює σ-алгебру, а $\mu_{\mathcal{I}}$ — зліченно-адитивна міра на $\Sigma_{\mathcal{I}}$.*

Доведення. Будемо спиратись на теореми 1–4 з попереднього пункту. Нехай $A \in \Sigma_{\mathcal{I}}$. Тоді $\mathbb{1}_{K\setminus A} = \mathbb{1} - \mathbb{1}_A \in L(K, \mathcal{I})$, отже, $K\setminus A \in \Sigma_{\mathcal{I}}$. Нехай $A, B \in \Sigma_{\mathcal{I}}$. Тоді $\mathbb{1}_{A\cap B} = \min\{\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B\} \in L(K, \mathcal{I})$, отже, $A \cap B \in \Sigma_{\mathcal{I}}$. Нарешті, нехай $A_n \in \Sigma_{\mathcal{I}}$ — диз'юнктна послідовність множин, $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_n}$ збігається поточково до $\mathbb{1}_A$. За теоремою 4 попереднього пункту, це означає, що $\mathbb{1}_A \in L(K, \mathcal{I})$ і

$$\mu_{\mathcal{I}}(A) = \overline{\mathcal{I}}(\mathbb{1}_A) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mathcal{I}}(\mathbb{1}_{A_n}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_{\mathcal{I}}(A_n). \qquad \square$$

Теорема 2. *Множина $L(K, \mathcal{I})$ збігається із сім'єю всіх обмежених $\Sigma_{\mathcal{I}}$-вимірних функцій і $\int_K f d\mu_{\mathcal{I}} = \overline{\mathcal{I}}(f)$ для $f \in L(K, \mathcal{I})$.*

Доведення. Спочатку доведемо, що $L(K, \mathcal{I})$ складається з $\Sigma_{\mathcal{I}}$-вимірних функцій. Нехай $f \in L(K, \mathcal{I})$, a — довільне дійсне число. Розглянемо послідовність функцій $g_n = \min\{n(f-a)^+, 1\}$. Ця послідовність поточково не спадає. Якщо $f(t) \leqslant a$, то $g_n(t) = 0$, якщо ж $f(t) > 0$, то $n(f-a)^+(t) \to \infty$ $(n \to \infty)$, тобто починаючи з деякого номера $g_n(t) = 1$. Іншими словами, послідовність, не спадаючи, поточково прямує до характеристичної функції множини $f_{>a}$. Згідно з аналогом теореми Леві (наслідок в кінці попереднього пункту), ця характеристична функція належить до $L(K, \mathcal{I})$, тобто $f_{>a} \in \Sigma_{\mathcal{I}}$. Цим доведено вимірність функції f.

Для доведення частини твердження, що залишилася, позначимо через X множину тих $f \in L(K, \mathcal{I})$, для яких $\int_K f d\mu_{\mathcal{I}} = \overline{\mathcal{I}}(f)$. За означенням міри $\mu_{\mathcal{I}}$, характеристичні функції всіх множин з $\Sigma_{\mathcal{I}}$ лежать в X. Оскільки X — лінійний простір, звідси випливає, що всі скінченнозначні вимірні функції (лінійні комбінації характеристичних функцій) також лежать в X. Кожну $\Sigma_{\mathcal{I}}$-вимірну обмежену функцію, за теоремою про апроксимацію (наслідок з теореми 3 п. 3.1.4), можна зобразити як поточкову (і навіть рівномірну) границю зростаючої послідовності скінченнозначних $\Sigma_{\mathcal{I}}$-вимірних функцій. На підставі теореми Леві та її аналога для $L(K, \mathcal{I})$, звідси випливає, що всі обмежені $\Sigma_{\mathcal{I}}$-вимірні функції належать до множини X. $\square$

Теорема 3. *Сім'я $\Sigma_{\mathcal{I}}$ містить як елементи всі борелеві підмножини компакту K, і для будь-якого $A \in \Sigma_{\mathcal{I}}$ і будь-якого $\varepsilon > 0$ існує відкрита множина U, яка містить A, і така, що $\mu_{\mathcal{I}}(U) < \mu_{\mathcal{I}}(A) + \varepsilon$.*

Доведення. Оскільки характеристичні функції відкритих підмножин компакту K напівнеперервні знизу, такі функції лежать в $L(K, \mathcal{I})$, отже, всі відкриті множини належать до $\Sigma_{\mathcal{I}}$. А оскільки $\Sigma_{\mathcal{I}}$ — σ-алгебра, то й усі борелеві підмножини також належать до $\Sigma_{\mathcal{I}}$. Нехай тепер A — довільний елемент σ-алгебри $\Sigma_{\mathcal{I}}$. Скориставшись означенням верхнього інтеграла для функції $\mathbb{1}_A$ і тим, що верхній інтеграл на $L(K, \mathcal{I})$ збігається з інтегралом за мірою $\mu_{\mathcal{I}}$, виберемо таку функцію $f \in LSC(K) \cap l_\infty(K)$, що $f > \mathbb{1}_A$ і

$$\int\limits_K f d\mu_{\mathcal{I}} < \int\limits_K \mathbb{1}_A d\mu_{\mathcal{I}} + \varepsilon = \mu_{\mathcal{I}}(A) + \varepsilon.$$

За шукану множину U візьмемо множину $f_{>1}$ тих точок $t \in K$, де $f(t) > 1$. На підставі напівнеперервності функції f множина U відкрита. Для будь-якої точки $t \in A$ маємо $f(t) > \mathbb{1}_A(t) = 1$, тобто $t \in U$. Цим доведено включення $A \subset U$. Нарешті, як бачимо, $\mathbb{1}_U \leqslant f$ у всіх точках, отже,

$$\mu_{\mathcal{I}}(U) = \int\limits_K \mathbb{1}_U d\mu_{\mathcal{I}} \leqslant \int\limits_K f d\mu_{\mathcal{I}} < \mu_{\mathcal{I}}(A) + \varepsilon. \qquad \square$$

Переходячи до доповнень, отримуємо такий наслідок.

Наслідок. *Для будь-якого $A \in \Sigma_{\mathcal{I}}$ і будь-якого $\varepsilon > 0$ існує замкнена множина V, яка міститься в A, з $\mu_{\mathcal{I}}(V) > \mu_{\mathcal{I}}(A) - \varepsilon$. Іншими словами, внутрішня міра, породжена мірою $\mu_{\mathcal{I}}$, на $\Sigma_{\mathcal{I}}$ збігається з мірою $\mu_{\mathcal{I}}$.*

Вправи

1. $(K, \Sigma_{\mathcal{I}}, \mu_{\mathcal{I}})$ — повний простір з мірою.

2. Поповнення простору з мірою $(K, \mathfrak{B}, \mu_{\mathcal{I}})$, де $\mathfrak{B}$ — σ-алгебра борелевих підмножин компакту K, збігається з $(K, \Sigma_{\mathcal{I}}, \mu_{\mathcal{I}})$.

3. Нехай $K = [0, 1]$. За елементарний інтеграл $\mathcal{I}$ візьмемо інтеграл Рімана на відрізку. Перевірте, що в цьому випадку $\Sigma_{\mathcal{I}}$ збігається з σ-алгеброю вимірних за Лебегом підмножин відрізка, а $\mu_{\mathcal{I}}$ — з мірою Лебега.

8.3.2. Теорема про загальний вигляд елементарного інтеграла

Будемо вважати, що борелева міра μ *породжує елементарний інтеграл* $\mathcal{I}$ на $C(K)$, якщо $\int_K f d\mu = \mathcal{I}(f)$ для всіх функцій $f \in C(K)$. (У позначеннях означення 2 п. 8.2.1, $\mathcal{I} = \mathbf{F}_\mu$.)

Теорема. *Для будь-якого елементарного інтеграла $\mathcal{I}$ на $C(K)$ існує єдина регулярна борелева міра μ, яка породжує цей елементарний інтеграл.*

Доведення. Існування потрібної міри ми фактично вже довели: за μ можна взяти обмеження міри $\mu_{\mathcal{I}}$, побудованої в попередньому пункті, на σ-алгебру $\mathfrak{B}$ борелевих підмножин. Справді, згідно з теоремою 3 п. 8.3.1 і наслідку з неї, міра $\mu_{\mathcal{I}}$ визначена на борелевих підмножинах і є регулярною, а теорема 2 того ж пункту стверджує, що рівність $\int_K f d\mu_{\mathcal{I}} = \overline{\mathcal{I}}(f)$ виконується не лише для неперервних функцій, але і для будь-яких $f \in L(K, \mathcal{I})$. Тому головне наше завдання — довести єдиність, тобто якщо μ — регулярна борелева міра, що задовольняє умову теореми, то μ збігається з $\mu_{\mathcal{I}}$ на $\mathfrak{B}$.

Зазначимо спочатку, що $\mu_{\mathcal{I}}(U) \geqslant \mu(U)$ для будь-якої відкритої множини U. Для цього скористаємось регулярністю міри μ. Для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує замкнена множина V, яка міститься в U, з $\mu(V) > \mu(U) - \varepsilon$. За лемою Урисона, існує неперервна функція f, яка має такі властивості: $0 \leqslant f \leqslant 1$ скрізь на K, $f(t) = 1$ на V і $f(t) = 0$ на $K \backslash U$. Маємо

$$\mu_{\mathcal{I}}(U) \geqslant \int\limits_K f d\mu_{\mathcal{I}} = \int\limits_K f d\mu \geqslant \mu(V) \geqslant \mu(U) - \varepsilon.$$

Залишається спрямувати ε до нуля. Доведемо тепер виконання нерівності $\mu_{\mathcal{I}}(A) \geqslant \mu(A)$ вже для всіх борелевих множин. Для цього знову зафіксуємо $\varepsilon > 0$ і виберемо відкриту множину $U \supset A$ з $\mu_{\mathcal{I}}(U) < \mu_{\mathcal{I}}(A) + \varepsilon$ (це можливо, згідно з теоремою 3 п. 8.3.1). Маємо

$$\mu_{\mathcal{I}}(A) \geqslant \mu_{\mathcal{I}}(U) - \varepsilon \geqslant \mu(U) - \varepsilon \geqslant \mu(A) - \varepsilon,$$

тобто з огляду на довільність ε $\mu_{\mathcal{I}}(A) \geqslant \mu(A)$.

Застосувавши доведену нерівність до доповнення до множини A і скориставшись очевидною рівністю

$$\mu(K) = \int\limits_K d\mu = \int\limits_K d\mu_{\mathcal{I}} = \mu_{\mathcal{I}}(K),$$

отримуємо обернену нерівність:

$$\mu_{\mathcal{I}}(A) = \mu_{\mathcal{I}}(K) - \mu_{\mathcal{I}}(K \backslash A) \leqslant \mu(K) - \mu(K \backslash A) = \mu(A).$$

Отже, ми довели, що міри μ і $\mu_{\mathcal{I}}$ збігаються на борелевих множинах. □

Вправи

1. Спираючись на наслідок, наведений наприкінці пункту 8.3.1, і теорему єдиності, доведіть, що якщо μ — регулярна борелева міра на компакті, то для будь-якого $A \in \mathfrak{B}$ і будь-якого $\varepsilon > 0$ існує замкнена множина V, яка міститься в A, з $\mu(V) > \mu(A) - \varepsilon$.

2. Спираючись на теорему про загальний вигляд борелевої міри на відрізку (п. 2.3.5), доведіть таку теорему: для будь-якого елементарного інтеграла $\mathcal{I}$ на $[0,1]$ існує така монотонна функція F на $[0,1]$, що елементарний інтеграл $\mathcal{I}$ подається інтегралом Стілтьєса за $dF : \mathcal{I}(f) = \int_0^1 f dF$ для всіх $f \in C[0,1]$.

Степеневою проблемою моментів на відрізку $[0,1]$ називається задача знаходження за даною послідовністю чисел $a_0, a_1, \ldots$ такої функції F на $[0,1]$, що $\int_0^1 t^n dF(t) = a_n$ для всіх $n = 0, 1, 2, \ldots$. Пропонуємо читачеві вивести з попередньої вправи такий результат.

3. Для того, щоб степенева проблема моментів для послідовності $a_0, a_1, \ldots$ мала розв'язок, який є неспадною функцією, необхідно і достатньо, щоб для будь-якого невід'ємного на $[0,1]$ полінома $b_0 + b_1 t + \ldots + b_n t^n$ виконувалась умова $\sum_{k=0}^n a_k b_k \geqslant 0$.

8.3.3. Наближення вимірних функцій неперервними. Теорема Лузіна

Лема 1. *Нехай (Ω, Σ, μ) — простір з мірою. Тоді підмножина всіх обмежених функцій щільна в $L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$.*

Доведення. Нехай $f \in L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ — довільна функція. Означимо множини $A_n = \{t \in \Omega : |f|(t) <$ і розглянемо функції $f_n = f \cdot \mathbb{1}_{A_n}$. Функції $|f_n - f| = |f| \cdot \mathbb{1}_{\Omega \backslash A_n}$ мають спільну інтегровну мажоранту $|f|$, поточково прямують до 0; отже,

$$\|f_n - f\| = \int\limits_K |f_n - f| \, d\mu \to 0, \quad n \to \infty.$$

Оскільки функції f_n обмежені ($|f_n| < n$ у всіх точках), це доводить потрібну щільність множини обмежених функцій в L_1. □

Нехай μ — регулярна борелева міра на компакті K. Позначимо через $\mathfrak{B}$ σ-алгебру борелевих підмножин компакту K, а через L_1 — банахів простір $L_1(K, \mathfrak{B}, \mu)$.

Теорема 1. *Підмножина $C(K)$ неперервних функцій щільна в L_1.*

Доведення. Нехай $\mathcal{I}$ — елементарний інтеграл на $C(K)$, який задається формулою $\mathcal{I}(f) = \int_K f d\mu$. Тоді, за теоремою про загальний вигляд елементарного інтеграла, доведеною в попередньому пункті (в частині єдиності), міра $\mu_{\mathcal{I}}$, породжена інтегралом

$\mathcal{I}$, збігається на $\mathfrak{B}$ з вихідною мірою μ. Отже, для обмежених борелевих функцій $\overline{\mathcal{I}}(f) = \int_K f d\mu$ (див. теорему 2 п. 8.3.1). Відповідно, для обмежених функцій з L_1 відстань ρ, визначена в п. 8.2.4, збігається з відстанню в L_1. Оскільки $L(K,\mathcal{I})$ був ρ-замиканням множини $C(K)$, то, за теоремою 2 п. 8.3.1, замикання множини $C(K)$ в L_1 містить всі обмежені функції з L_1. Залишається скористатись лемою 1. □

Теорема 2. *Підмножина $C(K)$ неперервних функцій щільна у просторі L_0 всіх вимірних за Борелем функцій на K у розумінні збіжності майже скрізь.*

Доведення. Використовуючи функції $f_n = f \cdot \mathbb{1}_{A_n}$ з леми 1, так само як і в попередній теоремі, легко довести, що L_1 щільна в L_0 у розумінні збіжності майже скрізь. Далі, за попередньою теоремою, $C(K)$ щільна в L_1 за нормою простору L_1. Оскільки із збіжності за нормою простору L_1 випливає збіжність за мірою, а із збіжної за мірою послідовності завжди можна вибрати збіжну майже скрізь підпослідовність, $C(K)$ щільний в L_1 і в сенсі збіжності майже скрізь. Для завершення доведення в цьому випадку скористатись транзитивністю відношення «щільність» (наслідок 2 п. 3.2.3). □

Теорема 3 (теорема Лузіна). *Нехай f — вимірна за Борелем функція на K. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує така борелева підмножина $A \subset K$ з $\mu(K \backslash A) < \varepsilon$, що обмеження функції f на підмножину A неперервне.*

Доведення. За попередньою теоремою, існує послідовність (f_n) неперервних функцій, збіжна до f майже скрізь. Скориставшись теоремою Єгорова, виберемо таку підмножину $A \subset K$ з $\mu(K \backslash A) < \varepsilon$, на якій послідовність (f_n) збігається рівномірно. Тоді обмеження функції f на підмножину A — це границя вже рівномірно збіжної послідовності неперервних функцій, тобто неперервна функція. □

Вправи

1. Доведіть, що множину A у формулюванні теореми Лузіна завжди можна вибрати замкненою.

2. Наведіть приклад (на відрізку), коли множину A у формулюванні теореми Лузіна не можна вибрати відкритою.

8.4. Теорема про загальний вигляд лінійного функціонала в $C(K)$

8.4.1. Регулярні борелеві заряди

Заряд ν, заданий на σ-алгебрі $\mathfrak{B}$ борелевих підмножин компакту K, називається *регулярним борелевим зарядом на K*, якщо для будь-якого $A \in \mathfrak{B}$ і будь-якого $\varepsilon > 0$ існує така замкнена підмножина $C \subset A$, що $|\nu(A) - \nu(C)| < \varepsilon$.

Зазначимо, що, згідно з вправою 1 п. 8.3.2, будь-яка регулярна борелева міра є й регулярним борелевим зарядом. Далі, з означення випливає, що лінійна комбінація регулярних борелевих зарядів — знову регулярний борелів заряд. Зокрема, різниця двох регулярних борелевих мір є регулярним борелевим зарядом. Наступна теорема показує, що такими різницями вичерпуються всі регулярні борелеві заряди.

Теорема. *Для борелевого заряду ν на компакті K такі умови еквівалентні:*

(1) ν — регулярний борелів заряд;

(2) ν^+ *і* ν^- *— регулярні борелеві міри;*

(3) заряд ν *зображується у вигляді різниці двох регулярних борелевих мір;*

(4) $|\nu|$ *— регулярна борелева міра.*

Доведення. (1) $\Rightarrow$ (2). Нагадаємо, що для будь-якого $A \in \mathfrak{B}$ величина $\nu^+(A)$ визначається формулою $\nu^+(A) = \sup\{\nu(\Delta) : \Delta \in \mathfrak{B}, \Delta \subset A\}$. Тобто для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує борелева підмножина $\Delta \subset A$, з $\nu(\Delta) > \nu^+(A) - \varepsilon$. На підставі регулярності заряду ν можна вибрати замкнену підмножину $C \subset \Delta$ з $\nu(C) > \nu^+(A) - \varepsilon$. Скориставшись тим, що $\nu^+(C) \geqslant \nu(C)$, у підсумку одержуємо існування замкненої підмножини $C \subset A$ з $\nu^+(C) > \nu^+(A) - \varepsilon$, тобто регулярність міри ν^+. Регулярність міри ν^- тепер випливає зі співвідношення $\nu^- = \nu^+ - \nu$.

(2) $\Rightarrow$ (3): $\nu = \nu^+ - \nu^-$.

(3) $\Rightarrow$ (1). Нехай $\nu = \mu_1 - \mu_2$, де μ_1, μ_2 — регулярні борелеві міри. Тоді для будь-якого $A \in \mathfrak{B}$ і будь-якого $\varepsilon > 0$ існують замкнені підмножини $C_1, C_2 \subset A$, з $\mu_1(C_1) > \mu_1(A) - \varepsilon$ і $\mu_2(C_2) > \mu_2(A) - \varepsilon$.

Покладемо $C = C_1 \cup C_2$. Така C є замкненою підмножиною множини A, для якої виконуються нерівності $\mu_1(A) - \varepsilon < \mu_1(C) < \mu_1(A)$ і $\mu_2(A) - \varepsilon < \mu_2(C) < \mu_2(A)$. Відповідно,

$$|\nu(A) - \nu(C)| \leqslant |\mu_1(A) - \mu_1(C)| + |\mu_2(A) - \mu_2(C)| < 2\varepsilon.$$

З огляду на довільність ε цим доведено регулярність заряду ν.

(2) $\Rightarrow$ (4). Достатньо скористатись рівністю $|\nu| = \nu^+ + \nu^-$.

(4) $\Rightarrow$ (1). Нехай $A \in \mathfrak{B}$, а $C \subset A$ — така замкнена підмножина, що $|\nu|(A) - |\nu|(C) < \varepsilon$. Тоді

$$|\nu(A) - \nu(C)| = |\nu(A \backslash C)| \leqslant |\nu|(A \backslash C) = |\nu|(A) - |\nu|(C) < \varepsilon. \qquad \square$$

Вправи

1. Нехай борелів заряд ν абсолютно неперервний щодо регулярної борелевої міри μ. Тоді ν — регулярний борелів заряд.

2. На метричному компакті будь-який борелів заряд регулярний.

3. Нехай $M(K, \mathfrak{B})$ — простір всіх борелевих зарядів на компакті K, наділений нормою $\|\nu\| = |\nu|(K)$. Позначимо через $M_r(K)$ множину всіх регулярних борелевих зарядів на K. Доведіть, що $M_r(K)$ — замкнений лінійний підпростір простору $M(K, \mathfrak{B})$.

4. З наведеної вище і з вправи 6 п. 7.1.1 виведіть, що $M_r(K)$ в нормі $\|\nu\| = |\nu|(K)$ — банахів простір.

5. Нехай компакт K незліченний. Тоді простір $M_r(K)$ несепарабельний.

8.4.2. Формулювання теореми Ріса-Маркова-Какутані. Теорема єдиності. Приклади

Нагадаємо, що у вправах п. 7.1.2 за аналогією з інтегралом за мірою було введено означення інтеграла за зарядом як границі відповідних інтегральних сум. Щоб не спиратись на результати вищезгаданих вправ і не розв'язувати їх замість читача, означимо інтеграл за зарядом зведенням до інтеграла за мірою. Спочатку зазначимо одну просту властивість інтеграла за мірою.

Теорема 1. *Нехай* (Ω, Σ) *— множина із заданою на ній* σ*-алгеброю,* $\Delta \in \Sigma$, $\mu_1, \mu_2 : \Sigma \to [0, +\infty)$ *— зліченно-адитивні міри і* $\mu_1 \leqslant \mu_2$. *Тоді якщо функція* $f \colon \Delta \to \mathbb{R}$ *інтегровна за* μ_2*, то ця функція інтегровна і за* μ_1.

Доведення. Згідно з теоремою 2 п. 4.2.2, функція f інтегровна на множині Δ за мірою μ тоді і тільки тоді, коли для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке розбиття D_ε множини Δ,

що відповідні верхня і нижня інтегральні суми $\bar{S}_\Delta(f, D_\varepsilon, \mu)$ і $\underline{S}_\Delta(f, D_\varepsilon, \mu)$ функції f за мірою μ визначені і відрізняються менше ніж на ε. Твердження теореми випливає з нерівності

$$\left|\bar{S}_\Delta(f, D_\varepsilon, \mu_1) - \underline{S}_\Delta(f, D_\varepsilon, \mu_1)\right| \leqslant \left|\bar{S}_\Delta(f, D_\varepsilon, \mu_2) - \underline{S}_\Delta(f, D_\varepsilon, \mu_2)\right|. \qquad \square$$

Означення 1. Нехай (Ω, Σ) — множина із заданою на ній σ-алгеброю, ν — заряд на компакті K і f — вимірна функція на Ω. Функція f називається *інтегровною на множині* $\Delta \in \Sigma$ *за зарядом* ν, якщо f інтегровна за варіацією цього заряду.

З теореми 1 і нерівності $\nu^+ \leqslant |\nu|$, $\nu^- \leqslant |\nu|$ випливає, що якщо f інтегровна за ν, то f інтегровна як за ν^+, так і за ν^-.

Означення 2. Назвемо *інтегралом функції* f *за зарядом* ν *на підмножині* Δ величину

$$\int\limits_\Delta f d\nu = \int\limits_\Delta f d\nu^+ - \int\limits_\Delta f d\nu^-. \tag{1}$$

За допомогою формули (1) на інтеграл за зарядом легко переносяться такі основні властивості інтеграла за мірою, як лінійність за функцією, зліченна адитивність за множиною і навіть теорема Лебега про мажоровану збіжність. Дещо складніше з оцінками інтегралів: інтеграл за зарядом від більшої з двох функцій може виявитись меншим за інтеграл від меншої з них. Тому у випадку інтегрування за зарядом використовують нерівність

$$\left|\int\limits_A f d\nu\right| \leqslant \int\limits_A |f|\, d|\nu|, \tag{2}$$

яка також легко випливає з означення:

$$\left|\int\limits_A f d\nu\right| = \left|\int\limits_A f d\nu^+ - \int\limits_A f d\nu^-\right| \leqslant \int\limits_A |f|\, d\nu^+ + \int\limits_A |f|\, d\nu^- = \int\limits_A |f|\, d|\nu|.$$

Покажемо, що подане означення інтеграла за зарядом узгоджується з означенням із вправи п. 7.1.2.

Теорема 2. *Якщо f інтегровна на множині $\Delta \in \Sigma$ за зарядом ν, то інтегральні суми цієї функції прямують за напрямленістю розбиттів до $\int_\Delta f d\nu$.*

Доведення. Застосуємо теорему Гана до заряду ν на Δ. Нехай Δ^+ і Δ^- — відповідні множини додатності і від'ємності. Тоді міра ν^+ зосереджена на Δ^+, а ν^- — на Δ^-. Скористаємось означенням інтеграла за мірою і виберемо для будь-якого $\varepsilon > 0$ такі розбиття D_1 і D_2 множин Δ^+ і Δ^- відповідно, що будь-які інтегральні суми функції f на Δ^+ за розбиттям, яке є наступником D_1, а на Δ^- — за розбиттям, яке є наступником D_2, наближають відповідно $\int_{\Delta^+} f d\nu^+$ і $\int_{\Delta^-} f d\nu^-$ з точністю до $\varepsilon/2$. Побудуємо розбиття D множини Δ, взявши за елементи розбиття всі елементи розбиттів D_1 і D_2. Тоді кожна інтегральна сума s, породжена розбиттям, що є наступником D, розпадається на частини s_1 і s_2, породжені частинами цього розбиття, які є наступниками D_1 і D_2 відповідно. Отже,

$$\left|s - \int\limits_\Delta f d\nu\right| \leqslant \left|s_1 - \int\limits_\Delta f d\nu^+\right| + \left|s_2 - \int\limits_\Delta f d\nu^-\right| =$$

$$= \left| s_1 - \int\limits_{\Delta^+} f d\nu^+ \right| + \left| s_2 - \int\limits_{\Delta^-} f d\nu^- \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

що й означає потрібну збіжність інтегральних сум до інтеграла. □

Теорема 3. *Інтеграл за зарядом лінійний як функція заряду: якщо $\nu_1, \nu_2 \colon \Sigma \to \mathbb{R}$ — заряди, $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ — скаляри і функція $f \colon \Delta \to \mathbb{R}$ інтегровна за зарядами ν_1 і ν_2, то ця функція інтегровна і за зарядом $a_1\nu_1 + a_2\nu_2$, і*

$$\int\limits_{\Delta} f d(a_1\nu_1 + a_2\nu_2) = a_1 \int\limits_{\Delta} f d\nu_1 + a_2 \int\limits_{\Delta} f d\nu_2. \tag{3}$$

Доведення. Інтегровність випливає з нерівності $|a_1\nu_1 + a_2\nu_2| \leqslant |a_1| \cdot |\nu_1| + |a_2| \cdot |\nu_2|$ і теореми 1. Рівність (3) легко отримати граничним переходом з аналогічної рівності для інтегральних сум. □

У цьому підрозділі нас цікавитиме частковий випадок борелевих зарядів і неперервних функцій на компакті K.

Означення 3. Нехай ν — борелів заряд на компакті K. *Функціоналом, породженим зарядом ν*, називатимемо відображення $\mathbf{F}_\nu \colon C(K) \to \mathbb{R}$, яке діє за правилом $\mathbf{F}_\nu(f) = \int\limits_K f d\nu$.

Існування інтеграла у цьому випадку гарантується формулою (1) і тим, що будь-яка обмежена вимірна функція інтегровна за будь-якою скінченною мірою (п. 4.3.3).

Твердження 1. *$\mathbf{F}_\nu$ — неперервний лінійний функціонал на $C(K)$ і $\|\mathbf{F}_\nu\| \leqslant \|\nu\|$ (тут і надалі ми використовуємо введене у вправі 3 п. 8.4.1 позначення $\|\nu\| = |\nu|\,(K)$).*

Доведення. Лінійність функціонала $\mathbf{F}_\nu$ очевидна. Оцінимо його норму. Нехай $f \in C(K)$, $\|f\| = 1$. Тоді $|f(t)| \leqslant 1$ у всіх точках компакту K. Застосуємо нерівність (2):

$$|\mathbf{F}_\nu(f)| = \left| \int\limits_K f d\nu \right| \leqslant \int\limits_K |f|\, d\,|\nu| \leqslant \int\limits_K d\,|\nu| = |\nu|\,(K) = \|\nu\|\,. \qquad \square$$

Наступна властивість є очевидною, тому наведемо її без доведення.

Твердження 2. *Нехай ν_1, ν_2 — борелеві заряди на компакті K, a_1, $a_2 \in \mathbb{R}$. Тоді $\mathbf{F}_{a_1\nu_1 + a_2\nu_2} = a_1\mathbf{F}_{\nu_1} + a_2\mathbf{F}_{\nu_2}$. Іншими словами, відображення $\nu \mapsto F_\nu$ лінійне.*

Твердження 3. *Нехай ν — регулярний борелів заряд на компакті K, для якого $\mathbf{F}_\nu = 0$. Тоді ν — нульовий заряд. Якщо для регулярних борелевих зарядів ν_1, ν_2 виконується рівність $\mathbf{F}_{\nu_1} = \mathbf{F}_{\nu_2}$, то $\nu_1 = \nu_2$.*

Доведення. Нехай $\mathbf{F}_\nu = 0$. Тоді

$$\int\limits_K f d\nu^+ - \int\limits_K f d\nu^- = \int\limits_K f d\nu = 0$$

для будь-якої функції $f \in C(K)$. Тобто елементарні інтеграли на $C(K)$, породжені мірами ν^+ і ν^-, збігаються. Оскільки ν^+ і ν^- — регулярні борелеві міри, з єдиності зображення в теоремі про загальний вигляд елементарного інтеграла (п. 8.3.2) випливає, що міри ν^+ і ν^- збігаються. Отже, $\nu = \nu^+ - \nu^- = 0$.

Друга частина твердження зводиться до першої з огляду на лінійність відображення $\nu \mapsto \mathbf{F}_\nu$. Справді, якщо $\mathbf{F}_{\nu_1} = \mathbf{F}_{\nu_2}$, то для допоміжного заряду $\nu = \nu_1 - \nu_2$ маємо $\mathbf{F}_\nu = \mathbf{F}_{\nu_1} - \mathbf{F}_{\nu_2} = 0$. Тобто $\nu = \nu_1 - \nu_2 = 0$. □

Наведені твердження разом означають, що відображення $U\colon \nu \mapsto F_\nu$, яке розглядається як оператор, що діє з простору $M_r(K)$ всіх регулярних борелевих зарядів на K у простір $C(K)^*$, — це лінійний неперервний ін'єктивний оператор з $\|U\| \leqslant 1$.

Наступну теорему можна розуміти так: U — це бієктивна ізометрія просторів $M_r(K)$ і $C(K)^*$.

Теорема 4 (про загальний вигляд лінійного функціонала в $C(K)$). *Для будь-якого неперервного лінійного функціонала F на $C(K)$ існує єдиний регулярний борелів заряд ν на K, який породжує цей функціонал (тобто для якого $F = \mathbf{F}_\nu$). При цьому $\|F\| = \|\nu\|$.*

Частина твердження сформульованої вище теореми Ріса–Маркова–Какутані — єдиність заряду ν і нерівність $\|\mathbf{F}_\nu\| \leqslant \|\nu\|$ — ми вже довели. Теорему існування вказаного заряду буде доведено нижче в п. 8.4.3 на основі теореми про загальний вигляд елементарного інтеграла. Ідея доведення — зобразити функціонал F у вигляді різниці двох елементарних інтегралів. Формулу для норми буде доведено в п. 8.4.4.

Вправи

1. Доведіть такий аналог теореми Лебега про мажоровану збіжність: нехай функції f_n інтегровні на множині Δ за зарядом ν, $f_n \to f$ $(n \to \infty)$ $|\nu|$-майже скрізь, і існує ν-інтегровна функція g, що мажорує всі f_n (тобто нерівність $|f_n| \leqslant g$ виконується $|\nu|$-майже скрізь для всіх $n \in \mathbb{N}$). Тоді функція f також ν-інтегровна, і $\int_\Delta f d\nu = \lim\limits_{n\to\infty} \int_\Delta f_n d\nu$.

2. Нехай ν_1, ν_2 — регулярні борелеві заряди і f_1, f_2 — обмежені функції на компакті K, що мають таку властивість: $\int_K g f_1 d\nu_1 = \int_K g f_2 d\nu_2$ для будь-якої $g \in C(K)$. Тоді рівність $\int_K g f_1 d\nu_1 = \int_K g f_2 d\nu_2$ виконується для всіх обмежених вимірних за Борелем функцій g на K.

Для кожного з перерахованих нижче функціоналів G_j на $C[0,1]$: (a) перевірте лінійність і неперервність; (b) обчисліть норму; (c) знайдіть зображення у вигляді $\mathbf{F}_\nu$, де ν — регулярний борелів заряд на відрізку $[0,1]$; (d) знайдіть варіацію отриманого заряду і перевірте на цих прикладах формулу $\|\mathbf{F}_\nu\| = \|\nu\|$.

3. $G_1(f) = f(0)$.

4. $G_2(f) = f(0) - f(1)$.

5. $G_3(f) = \int_0^{1/2} f(t)dt$.

6. $G_4(f) = \int_0^1 f(t)(t - \frac{1}{2})dt$.

8.4.3. Додатна і від'ємна частини функціонала $F \in C(K)^*$

Введемо до розгляду $C^+(K) = \{f \in C(K) : f \geqslant 0\}$ — *додатний конус* простору $C(K)$.

Для будь-якого $f \in C^+(K)$ через $[0, f]_c$ позначимо таку множину функцій: $[0, f]_c = \{g \in C(K) : 0 \leqslant g \leqslant f\}$. Нехай F — неперервний лінійний функціонал на $C(K)$. Означимо *додатну частину F^+ функціонала F* так: для $f \in C^+(K)$ покладемо

$$F^+(f) = \sup\{F(g) : g \in [0, f]_c\} \tag{I}$$

для довільної ж функції $f \in C(K)$ покладемо

$$F^+(f) = F^+(f^+) - F^+(f^-). \tag{II}$$

Далі означимо *від'ємну частину F^- функціонала F* рівністю $F^- = F^+ - F$.

Мета наступного ланцюжка вправ — довести, що F^+ і F^- — це елементарні інтеграли.

Лема 1. *Нехай* $f_1, f_2 \in C^+(K)$. *Тоді* $[0, f_1 + f_2]_c = [0, f_1]_c + [0, f_2]_c$.

Доведення. Нехай $g_1 \in [0, f_1]_c$, $g_2 \in [0, f_2]_c$, тобто $0 \leqslant g_1 \leqslant f_1$, $0 \leqslant g_2 \leqslant f_2$. Тоді $0 \leqslant g_1 + g_2 \leqslant f_1 + f_2$, тобто $g_1 + g_2 \in [0, f_1 + f_2]_c$. Цим доведено включення $[0, f_1 + f_2]_c \supset [0, f_1]_c + [0, f_2]_c$. Нехай тепер $g \in [0, f_1 + f_2]_c$. Задамо допоміжні функції g_1, g_2 рівностями $g_1 = \min\{g, f_1\}$, $g_2 = g - g_1$. Оскільки $g_1 \in [0, f_1]_c$, а $g_2 \in [0, f_2]_c$, маємо $g = g_1 + g_2 \in [0, f_1]_c + [0, f_2]_c$. Цим доведено включення $[0, f_1 + f_2]_c \subset [0, f_1]_c + [0, f_2]_c$. □

Лема 2. *Нехай* $f_1, f_2 \in C^+(K)$. *Тоді* $F^+(f_1 + f_2) = F^+(f_1) + F^+(f_2)$.
Доведення.

$$F^+(f_1) + F^+(f_2) = \sup\{F(g_1) : g_1 \in [0, f_1]_c\} + \sup\{F(g_2) : g_2 \in [0, f_2]_c\} =$$

$$= \sup\{F(g_1 + g_2) : g_1 \in [0, f_1]_c,\ g_2 \in [0, f_2]_c\} =$$

$$= \sup\{F(g) : g \in [0, f_1]_c + [0, f_2]_c\} =$$

$$= \sup\{F(g) : g \in [0, f_1 + f_2]_c\} = F^+(f_1 + f_2).$$ □

Лема 3. *Нехай* $f \in C^+(K)$, $a \in \mathbb{R}^+$. *Тоді* $F^+(af) = aF^+(f)$.
Доведення.

$$F^+(af) = \sup\{F(g) : g \in [0, af]_c\} =$$

$$= \sup\{F(ah) : h \in [0, f]_c\} = a \sup\{F(h) : h \in [0, f]_c\} = aF^+(f).$$ □

Лема 4. *Нехай* $f_1, f_2 \in C^+(K)$. *Тоді* $F^+(f_1 - f_2) = F^+(f_1) - F^+(f_2)$.
Доведення. Функція $f = f_1 - f_2$ не обов'язково є додатною, тому для обчислення $F^+(f)$ потрібно скористатися формулою (II). Оскільки

$$f^+ - f^- = f = f_1 - f_2, \quad f^+ + f_2 = f_1 + f^-,$$

то, за лемою 2, $F^+(f^+) + F^+(f_2) = F^+(f_1) + F^+(f^-)$. Відповідно,

$$F^+(f_1 - f_2) = F^+(f) = F^+(f^+) - F^+(f^-) = F^+(f_1) - F^+(f_2).$$ □

Теорема 1. F^+ *— це елементарний інтеграл на* $C(K)$.
Доведення. Спочатку перевіримо, що F^+ — це лінійний функціонал. Нехай $h_1, h_2 \in C(K)$ — довільні функції. Запишемо $h_1 + h_2$ у вигляді $(h_1^+ + h_2^+) - \left(h_1^- + h_2^-\right)$ і скористаємось лемами 4 і 2:

$$F^+(h_1 + h_2) = F^+(h_1^+ + h_2^+) - F^+(h_1^- + h_2^-) = F^+(h_1^+) - F^+(h_1^-) +$$

$$+ F^+(h_2^+) - F^+(h_2^-) = F^+(h_1) + F^+(h_2).$$

Цим доведено адитивність функціонала. Додатна однорідність випливає з леми 3 і формули (II): якщо $f \in C(K)$, $a \in \mathbb{R}^+$, то

$$F^+(af) = F^+(af^+) - F^+(af^-) = aF^+(f^+) - aF^+(f^-) = aF^+(f).$$

Можливість винесення мінуса випливає з леми 4:

$$F^+(-f) = F^+(f^- - f^+) = F^+(f^-) - F^+(f^+) = -F^+(f).$$

Для завершення доведення залишилось перевірити, що на $C^+(K)$ функціонал F^+ приймає лише невід'ємні значення. Справді, нехай $f \in C^+(K)$. Скористаємось формулою (I):

$$F^+(f) = \sup\{F(g) : g \in [0, f]_c\} \geqslant F(0) = 0. \qquad \square$$

Теорема 2. $F^- = (-F)^+$. *Зокрема, F^- — це елементарний інтеграл на $C(K)$.*

Доведення. З попередньої теореми і формули $F^- = F^+ - F$ випливає, що F^- — лінійний функціонал. Тому рівність $F^-(f) = (-F)^+(f)$ достатньо перевіряти для $f \in C^+(K)$: на всі $C(K)$ вона поширюється за лінійністю. Отож,

$$F^-(f) = F^+(f) - F(f) =$$

$$= \sup\{F(g) - F(f) : g \in [0, f]_c\} = \sup\{-F(f - g) : g \in [0, f]_c\}.$$

Перепозначивши $f - g$ через h і помітивши, що умови $g \in [0, f]_c$ і $h \in [0, f]_c$ еквівалентні, одержуємо потрібну рівність

$$F^-(f) = \sup\{-F(h) : h \in [0, f]_c\} = (-F)^+(f). \qquad \square$$

Як наслідок із доведених теорем і рівності $F = F^+ - F^-$ отримуємо існування потрібного заряду в теоремі п. 8.4.2 про загальний вигляд лінійного функціонала в $C(K)$.

Наслідок. *Для будь-якого неперервного лінійного функціонала F на $C(K)$ існує регулярний борелів заряд ν на K, який породжує цей функціонал за правилом $F = F_\nu$.*

Доведення. Оскільки F^+ і F^- — це елементарні інтеграли, існують (теорема п. 8.3.2) регулярні борелеві міри μ_1, μ_2, які породжують ці елементарні інтеграли: $F^+ = \mathbf{F}_{\mu_1}$, $F^- = \mathbf{F}_{\mu_2}$. Відповідно,

$$F = F^+ - F^- = \mathbf{F}_{\mu_1} - \mathbf{F}_{\mu_2} = \mathbf{F}_{\mu_1 - \mu_2},$$

тобто за шуканий заряд ν можна взяти $\mu_1 - \mu_2$. $\square$

Зауваження. Читач напевно зауважив, що поняття додатної і від'ємної частин можна означити для багатьох зовсім несхожих об'єктів: чисел, функцій, зарядів, а тепер — і для функціоналів. Загальний підхід до таким об'єктів лежить в руслі теорії напівупорядкованих просторів, векторних і нормованих ґраток. Початкове уявлення про цей корисний і глибоко розроблений напрям функціонального аналізу читач може одержати з підручника Л. В. Канторовича (одного із засновників цього напрямку) і Г. П. Акілова [К-А, гл. 10].

Вправи

1. Перевірте, що формула (II) не суперечить формулі (I), тобто, якщо для доданих функцій f величину $F^+(f)$ означити за формулою (I), то формула (II) дасть той самий результат.

2. Для функцій $g_1 = \min\{g, f_1\}$, $g_2 = g - g_1$ з другої частини доведення леми 1 перевірте умови $g_1 \in [0, f_1]_c$ і $g_2 \in [0, f_2]_c$.

8.4.4. Норма функціонала на $C(K)$

Як і вище, позначатимемо через $\mathbb{1}$ функцію, яка тотожно дорівнює одиниці на K. Нехай F — неперервний лінійний функціонал на $C(K)$, F^+ і F^- — його додатна і від'ємна частини, μ_1 і μ_2 — регулярні борелеві міри, що породжують, відповідно, елементарні інтеграли F^+ і F^-: $F^+(f) = \int_K f d\mu_1$ і $F^-(f) = \int_K f d\mu_2$ для будь-якої функції $f \in C(K)$.

Лема. $\|F\| = \mu_1(K) + \mu_2(K)$.

Доведення. Спочатку зазначимо, що

$$\mu_1(K) + \mu_2(K) = \int\limits_K d\mu_1 + \int\limits_K d\mu_2 = F^+(\mathbb{1}) + F^-(\mathbb{1}),$$

тобто потрібно довести рівність $\|F\| = F^+(\mathbb{1}) + F^-(\mathbb{1})$. Маємо:

$$\|F\| = \sup\left\{F(f) : f \in S_{C(K)}\right\} = \sup\left\{F(f^+ - f^-) : f \in S_{C(K)}\right\}.$$

Оскільки f^+ і f^- в цьому випадку належать до множини $[0, \mathbb{1}]_c$, ми можемо продовжити оцінку таким чином:

$$\|F\| \leqslant \sup\{F(f_1) - F(f_2) : f_1, f_2 \in [0, \mathbb{1}]_c\} = \sup\{F(f_1) : f_1 \in [0, \mathbb{1}]_c\} +$$
$$+ \sup\{-F(f_2) : f_2 \in [0, \mathbb{1}]_c\} = F^+(\mathbb{1}) + F^-(\mathbb{1}).$$

Тепер обернена оцінка. Ми вже довели у попередніх міркуваннях, що $F^+(\mathbb{1}) + F^-(\mathbb{1}) = \sup\{F(f_1 - f_2) : f_1, f_2 \in [0, \mathbb{1}]_c\}$. Оскільки в останньому виразі $-1 \leqslant f_1 - f_2 \leqslant 1$, то $\|f_1 - f_2\| \leqslant 1$ і $F(f_1 - f_2) \leqslant \|F\|$, тобто $F^+(\mathbb{1}) + F^-(\mathbb{1}) \leqslant \|F\|$. □

Для функціонала F, що вивчається, введемо в розгляд заряд $\nu = \mu_1 - \mu_2$. Тоді $F = \mathbf{F}_\nu$.

Теорема. $\|F\| = \|\nu\|$.

Доведення. Оцінку $\|F\| \leqslant \|\nu\|$ доведено у вправі 1 п. 8.4.2. Доведемо обернену нерівність. Оскільки міри μ_1 і μ_2 приймають тільки невід'ємні значення, для будь-якої борелевої множини $\Delta \subset K$ маємо

$$\nu(\Delta) = \mu_1(\Delta) - \mu_2(\Delta) \leqslant \mu_1(\Delta) \leqslant \mu_1(K).$$

Отже,

$$\nu^+(K) = \sup\{\nu(\Delta) : \Delta \in \mathfrak{B}\} \leqslant \mu_1(K).$$

Аналогічно, $\nu^-(K) \leqslant \mu_2(K)$. Залишається скористатись попередньою лемою:

$$\|F\| = \mu_1(K) + \mu_2(K) \geqslant \nu^+(K) + \nu^-(K) = \|\nu\|. \qquad \square$$

Останнє твердження завершує доведення теореми про загальний вигляд лінійного функціонала в $C(K)$, сформульованої в п. 8.4.2. Оскільки саме ця теорема встановлює ізоморфізм (який називається канонічним ізоморфізмом) просторів $C(K)^*$ і $M_r(K)$, її часто записують у вигляді умовної рівності $C(K)^* = M_r(K)$.

Вправи

1. Перевірте, що $\overline{B}_{C(K)} = [0, \mathbb{1}]_c - [0, \mathbb{1}]_c$. Звідси виведіть доведену вище рівність $\|F\| = F^+(\mathbb{1}) + F^-(\mathbb{1})$.

2. $\|F\| = \|F^+\| + \|F^-\|$.

3. Для будь-якого (не обов'язково регулярного) борелевого заряду ν на K розглянемо елементарний інтеграл F_ν, породжений зарядом ν. За елементарним інтегралом $\mathbf{F}_\nu$, побудуємо регулярний борелів заряд $P(\nu)$, для якого $\mathbf{F}_\nu = \mathbf{F}_{P(\nu)}$. Доведіть, що так означене відображення P — це проектор простору $M(K, \mathfrak{B})$ на підпростір $M_r(K)$ (див. вправу 3 п. 8.4.1). Доведіть, що $\|P\| = 1$.

4. На прикладі простору $C[0, 1]$ переконайтесь, що спряжений простір до сепарабельного банахового простору може бути несепарабельним.

5. Нехай σ — регулярний борелів заряд на K і g — інтегровна за σ функція на K. Задамо функціонал $F \in C(K)^*$ формулою $F(f) = \int_K fg d\sigma$. Як записати цей функціонал у вигляді, вказаному в теоремі про загальний вигляд лінійного функціонала в $C(K)$? Доведіть рівність $\|F\| = \int_K |g| \, d|\sigma|$.

8.4.5. Комплексні заряди й інтеграл

У цьому пункті ми звернемося до інтегрування комплекснозначних функцій за такими самими комплекснозначними зарядами. Ті твердження, де, на наш погляд, відмінність із дійсним випадком неістотна, ми будемо тільки формулювати, залишаючи доведення читачеві.

Означення 1. Нехай (Ω, Σ) — множина із заданою на ній σ-алгеброю. Комплекснозначна функція множини $\eta\colon \Sigma \to \mathbb{C}$ називається *комплексним зарядом* на Ω, якщо вона задовольняє умову зліченної адитивності. Для комплексного заряду η означимо у природний спосіб дійсні заряди $\operatorname{Re}\eta$ і $\operatorname{Im}\eta$: $(\operatorname{Re}\eta)(\Delta) = \operatorname{Re}(\eta(\Delta))$ і $(\operatorname{Im}\eta)(\Delta) = \operatorname{Im}(\eta(\Delta))$ для всіх $\Delta \in \Sigma$. Тоді

$$\eta = \operatorname{Re}\eta + i \operatorname{Im}\eta. \qquad (*)$$

Означення 2. *Варіацією комплексного заряду* η на множині $\Delta \in \Sigma$ називається величина $|\eta|(\Delta)$, яка означається як супремум сум вигляду $\sum_{k=1}^{n} |\eta(\Delta_k)|$, де супремум береться за всіма скінченними наборами $\{\Delta_k\}_1^n$ попарно неперетинних вимірних підмножин множини Δ.

Теорема 1. *Для дійсного заряду значення варіації, обчислене за означенням 2, збігається зі значенням, обчисленим за правилом $|\eta|(\Delta) = \eta^+(\Delta) + \eta^-(\Delta)$. Іншими словами, нове означення варіації узгоджується з відомим раніше.*

Теорема 2. *Варіація комплексного заряду η має такі властивості:*

(i) $|\eta(\Delta)| \leqslant |\eta|(\Delta)$;

(ii) $\max\{|\operatorname{Re}\eta|(\Delta), |\operatorname{Im}\eta|(\Delta)\} \leqslant |\eta|(\Delta) \leqslant |\operatorname{Re}\eta|(\Delta) + |\operatorname{Im}\eta|(\Delta)$;

(iii) $|\eta|$ *— скінченна зліченно-адитивна міра на* Ω.

Так само, як і у випадку мір, означимо допустимі розбиття (такі, що $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sup\limits_{t\in\Delta_k} [|f(t)| \cdot |\nu|(\Delta_k)] < \infty$) й інтегральні суми комплексної функції f за комплексним зарядом ν: $S_A(f, D, T, \nu) = \sum_{k=1}^{\infty} f(t_k)\nu(\Delta_k)$. Інтегровність та інтеграл функції за зарядом також означимо через границю інтегральних сум за подрібненням розбиттів.

Теорема 3. *Інтеграл комплекснозначної функції за комплексним зарядом лінійно залежить від функції при фіксованому заряді і лінійно залежить від заряду при фіксованій функції:*

$$\int\limits_{\Delta} f d(a_1\eta_1 + a_2\eta_2) = a_1 \int\limits_{\Delta} f d\eta_1 + a_2 \int\limits_{\Delta} f d\eta_2,$$

$$\int\limits_{\Delta} (a_1 f_1 + a_2 f_2) d\eta = a_1 \int\limits_{\Delta} f_1 d\eta + a_2 \int\limits_{\Delta} f_2 d\eta,$$

причому з існування інтегралів у правій частині рівності випливає їх існування в лівій частині.

Теорема 4. *Вимірна функція f інтегровна на множині Δ за комплексним зарядом η тоді і тільки тоді, коли існує $\int_\Delta |f|\, d|\eta|$. При цьому*

$$\left|\int\limits_{\Delta} f\, d\eta\right| \leqslant \int\limits_{\Delta} |f|\, d|\eta|.$$

Доведення. Якщо для вимірної функції існує $\int_\Delta |f|\ d\,|\eta|$, то на підставі нерівностей $|\mathrm{Im}\ \eta|\,(\Delta) \leqslant |\eta|\,(\Delta)$, $|\mathrm{Re}\,\eta|\,(\Delta) \leqslant |\eta|\,(\Delta)$ будуть існувати і наступні 4 дійсні інтеграли: $\int_\Delta \mathrm{Re}\, f\, d\,\mathrm{Re}\,\eta$, $\int_\Delta \mathrm{Re}\, f\, d\,\mathrm{Im}\,\eta$, $\int_\Delta \mathrm{Im}\, f\, d\,\mathrm{Re}\ \eta$ і $\int_\Delta \mathrm{Im}\, f\, d\,\mathrm{Im}\ \eta$. Скориставшись лінійністю (попередня теорема), з цих інтегралів можна сконструювати $\int_\Delta f\ d\eta$. Навпаки, з існування $\int_\Delta f\ d\eta$ випливає існування допустимого розбиття D для f за ν. Це розбиття буде допустимим і для $|f|$ за $|\nu|$, що з огляду на вимірність функції $|f|$ і вправу 2 п. 4.3.3 означатиме існування інтеграла $\int_\Delta |f|\ d\,|\eta|$. Нарешті, нерівність $\left|\int_\Delta f\ d\eta\right| \leqslant \int_\Delta |f|\ d\,|\eta|$ отримується граничним переходом з відповідної нерівності для інтегральних сум. □

За допомогою формули $(*)$ основні поняття і результати, пов'язані з дійсними зарядами (скажімо, критерій абсолютної неперервності і теорема Радона-Никодима з розділу 7.1), легко переносяться на випадок комплексних зарядів. Також відділенням дійсної і уявної частин легко поширити на комплексний випадок такі властивості інтеграла, як зліченна адитивність за множиною і теорема Лебега про мажоровану збіжність.

8.4.6. Регулярні комплексні заряди і функціонали в комплексному $C(K)$

Означення 1. *Комплексним борелевим зарядом* на компакті K називається комплексний заряд, заданий на σ-алгебрі борелевих підмножин компакту K. Комплексний борелів заряд η на компакті K називається *регулярним*, якщо $|\eta|$ — регулярна борелева міра.

З властивості (ii) теореми 2 п. 8.4.5 і вправи 1 п. 8.4.1 випливає, що комплексний борелів заряд η на компакті K буде регулярним тоді і тільки тоді, коли регулярні дійсні заряди $\mathrm{Re}\,\eta$ і $\mathrm{Im}\,\eta$.

Перейдемо до розгляду лінійних функціоналів на комплексному $C\,(K)$ — просторі всіх комплекснозначних неперервних функцій на K.

Означення 2. Нехай η — борелів заряд на компакті K. *Функціоналом, породженим зарядом* η, називатимемо відображення $\mathbf{F}_\eta\colon C(K) \to \mathbb{C}$, яке діє за правилом $\mathbf{F}_\eta(f) = \int_K f d\eta$. Існування інтеграла тут гарантується теоремою 4 попереднього пункту і критерієм інтегровності вимірної дійсної функції (п. 4.3.3).

Як і в дійсному випадку, для комплексних борелевих зарядів на компакті K будемо використовувати позначення $\|\eta\| = |\eta|\,(K)$.

Теорема 1. $\mathbf{F}_\eta$ — *неперервний лінійний функціонал на* $C(K)$ *і* $\|\mathbf{F}_\eta\| \leqslant \|\eta\|$. *Більше того, якщо заряд* η *регулярний, то* $\|\mathbf{F}_\eta\| = \|\eta\|$.

Доведення. Лінійність функціонала $\mathbf{F}_\nu$ очевидна. Оцінка норми зверху, як і для дійсного варіанта, випливає з нерівності $\left|\int_K f\ d\eta\right| \leqslant \int_K |f|\ d\,|\eta|$. Залишилось довести у випадку регулярного заряду оцінку $\|\mathbf{F}_\eta\| \geqslant \|\eta\|$.

Зафіксуємо $\varepsilon > 0$. За означенням варіації, існує такий скінченний набір $\{\Delta_k\}_1^n$ попарно неперетинних борелевих підмножин компакту K, що $\sum_{k=1}^n |\eta(\Delta_k)| > |\eta|\,(K) - \varepsilon$. З огляду на регулярність заряду можемо, не обмежуючи загальності, вважати всі множини Δ_k замкненими: якщо це не так, то їх можна замінити меншими замкненими множинами, які мають заряд як завгодно близький до $\eta(\Delta_k)$. Розглянемо множину $K_1 = \bigcup_{k=1}^n \Delta_k$. Множина K_1 замкнена, і

$$|\eta|\,(K\backslash K_1) = |\eta|\,(K) - |\eta|\,(K_1) \leqslant |\eta|\,(K) - \sum_{k=1}^n |\eta(\Delta_k)| < \varepsilon.$$

Задамо на K_1 функцію f, яка набуває на кожному з Δ_k стале значення $\alpha_k = e^{-i\arg\eta(\Delta_k)}$. Оскільки множини Δ_k попарно не перетинаються, кусково-стала функція

f неперервна на K_1. Продовжимо f до неперервної функції на всьому K зі збереженням умови $|f| \leqslant 1$. Тоді $f \in S_{C(K)}$ і

$$\|\mathbf{F}_\eta\| \geqslant |\mathbf{F}_\eta(f)| = \left|\int\limits_K f d\eta\right| \geqslant \left|\int\limits_{K_1} f d\eta\right| - \varepsilon =$$

$$= \left|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \eta\left(\Delta_k\right)\right| - \varepsilon = \sum_{k=1}^{n} \left|\eta\left(\Delta_k\right)\right| - \varepsilon \geqslant \|\eta\| - 2\varepsilon.$$

Спрямувавши ε до нуля, одержимо потрібну оцінку. □

Формулювання теореми про загальний вигляд лінійного функціонала в комплексному $C(K)$ дослівно повторює дійсний варіант, і доведення може бути отримане зведенням до дійсного випадку.

Теорема 2. *Для будь-якого неперервного лінійного функціонала F на комплексному $C(K)$ існує єдиний регулярний комплексний борелів заряд η на K, породжуючий цей функціонал (тобто для якого $F = \mathbf{F}_\eta$). При цьому $\|F\| = \|\eta\|$.*

Доведення. Формулу $\|\mathbf{F}_\eta\| = \|\eta\|$ вже доведено. З неї випливає ін'єктивність відображення $\eta \mapsto F_\eta$ на просторі регулярних комплексних борелевих зарядів, тобто єдиність заряду η в умовах теореми. Залишилось довести існування потрібного заряду. Розглянемо простір $C_{\mathbb{R}}(K)$ дійсних неперервних функцій на K як підмножину комплексного $C(K)$. Задамо на $C_{\mathbb{R}}(K)$ два дійсних лінійних функціонали F_1 і F_2 формулами $F_1(f) = \operatorname{Re} F(f)$ і $F_2(f) = \operatorname{Im} F(f)$. За дійсною версією теореми про загальний вигляд лінійного функціонала в $C(K)$, застосованою до F_1 і F_2, існують такі регулярні дійсні борелеві заряди ν_1, ν_2, що для будь-якої функції $f \in C_{\mathbb{R}}(K)$ правильні рівності $F_1(f) = \int_K f d\nu_1$ і $F_2(f) = \int_K f d\nu_2$. Підставивши ці рівності у формулу $F(f) = F_1(f) + iF_2(f)$ і вводячи позначення $\eta = \nu_1 + i\nu_2$, одержимо рівність $F(f) = \int_K f d\eta$, яка виконується для всіх $f \in C_{\mathbb{R}}(K)$. Оскільки обидві частини останнього співвідношення лінійно залежать від f, співвідношення легко поширюється і на комплексні функції вигляду $f = f_1 + if_2$, де $f_1, f_2 \in C_{\mathbb{R}}(K)$. Отже, рівність $F(f) = \int_K f d\eta$ виконується на всьому комплексному $C(K)$, і, як наслідок, η — це той заряд, існування якого ми повинні були довести. □

Зауваження. Звертаємо увагу читача, що міркування з теореми 1 дає пряме доведення рівності $\|\mathbf{F}_\eta\| = \|\eta\|$ і для дійсних зарядів.

Вправи

1. У доведенні теореми 1 сказано: «Продовжимо f до неперервної функції на всьому K зі збереженням умови $|f| \leqslant 1$». Чому таке продовження можливе?

2. Доведіть, історично перший варіант теореми про загальний вигляд лінійного функціонала в $C[0,1]$. **Теорема Ф. Ріса** — для будь-якого лінійного функціонала $F \in C[0,1]^*$ існує така функція обмеженої варіації $\tilde{F}$ на $[0,1]$ з $V_0^1(\tilde{F}) = \|F\|$, що функціонал F виражається інтегралом Стілтьєса по $d\tilde{F}$: $F(f) = \int_0^1 f d\tilde{F}$ для всіх $f \in C[0,1]$.

3. Чи визначається в наведеній вище теоремі Ф. Ріса функція $\tilde{F}$ функціоналом F однозначно?

4. Уточніть теорему Ф. Ріса у такий спосіб: функцію $\tilde{F}$ можна вибрати в класі неперервних справа на $(0,1]$ функцій, що дорівнюють 0 в нулі, і в цьому класі $\tilde{F}$ визначається по F однозначно.

5. Розв'яжіть комплексний варіант вправи 2 п. 8.4.2.

6. Розв'яжіть комплексний варіант вправи 5 п. 8.4.4.

Коментарі до вправ

8.4.2

Вправа 2. Для доведення потрібно вибрати міру $\mu = |\nu_1| + |\nu_2|$, яка мажорує обидва заряди, що входять у формулу; зобразити борелеву функцію g як границю μ-майже скрізь збіжної рівномірно обмеженої послідовності (g_n) неперервних функцій і застосувати теорему про мажоровану збіжність.

8.4.4

Вправа 5. Шуканий заряд ν, для якого $F = \mathbf{F}_\nu$, визначається так: $\nu(\Delta) = \int_\Delta g d\sigma$ (обґрунтування аналогічне коментарю до вправи 2 п. 7.1.6). Для доведення формули $\|\nu\| = \int_K |g|\, d\,|\sigma|$ потрібно виразити множини K_ν^+ і K_ν^- додатності і від'ємності заряду ν через множини K_σ^+ і K_σ^- додатності та від'ємності заряду σ: $K_\nu^+ = (K_\sigma^+ \cap g_{>0}) \cup (K_\sigma^- \cap g_{\leqslant 0})$, $K_\nu^- = (K_\sigma^+ \cap g_{\leqslant 0}) \cup (K_\sigma^- \cap g_{>0})$ і скористатись рівністю $|\nu|\,(K) = \nu(K_\nu^+) - \nu(K_\nu^-)$.

8.4.6

Вправи 1–3. Скористатись теоремою про загальний вигляд борелевого заряду на відрізку (п. 7.2.3): $\tilde{F}$ потрібно визначити нулем в нулі, а в решті точок відрізка $\tilde{F}$ визначити як функцію розподілу борелевого заряду, який породжує функціонал F.

Пряме доведення теореми Ф. Ріса див. у підручнику А. Колмогорова і С. Фоміна [K-F, гл. IV]. Там само можна знайти означення й основні властивості інтеграла Стілтьєса, а також обговорення питання єдиності функції $\tilde{F}$. Щоправда, термінологія у цьому виданні частково відрізняється від нашої (наприклад, функцію розподілу ми визначаємо дещо інакше).