Розділ 15. Теореми про нерухомі точки та їх застосування

Нехай на множині X задано відображення $f\colon X \to X$. Елемент $x \in X$ називається нерухомою точкою відображення f, якщо $f(x) = x$.

До задачі пошуку нерухомих точок можна звести багато дуже несхожих на перший погляд задач з різних галузей математики. Тому кожна з теорем про існування нерухомих точок, що викладається в цьому розділі, має численні і часто дуже витончені застосування.

15.1. Кілька класичних теорем

15.1.1. Відображення стиску

Нехай X — метричний простір. Функція $f\colon X \to X$ називається *відображенням стиску* або *стискальним відображенням,* якщо існує така стала $C \in [0, 1)$, що для будь-яких $x_1, x_2 \in X$

$$\rho\left(f(x_1), f(x_2)\right) \leqslant C\rho\left(x_1, x_2\right) . \tag{1}$$

Теорема (С. Банах). *Нехай X — повний метричний простір, $f\colon X \to X$ — відображення стиску. Тоді у відображення f існує єдина нерухома точка $x_0 \in X$. Більше того, для будь-якого $y_0 \in X$ послідовність ітерацій (y_n), що задається рекурентною формулою $y_n = f(y_{n-1})$, збігається до x_0.*

Доведення. Почнемо з єдиності. Нехай $x_0, x_1 \in X$ — нерухомі точки відображення f. Тоді

$$\rho\left(x_0, x_1\right) = \rho\left(f(x_0), f(x_1)\right) \leqslant C\rho\left(x_0, x_1\right),$$

де $C < 1$ — стала з означення стискального відображення. Нерівність $\rho\left(x_0, x_1\right) \leqslant C\rho\left(x_0, x_1\right)$ може виконуватись, тільки якщо $\rho\left(x_0, x_1\right) = 0$.

Перейдемо до властивостей послідовності y_n. Введемо позначення $d = \rho\left(y_0, y_1\right)$. Послідовно підставляючи в оцінку

$$\rho\left(y_n, y_{n+1}\right) = \rho\left(f(y_{n-1}), f(y_n)\right) \leqslant C\rho\left(y_{n-1}, y_n\right)$$

значення $n = 1, 2, \ldots$, отримаємо, що $\rho\left(y_1, y_2\right) \leqslant Cd$, $\rho\left(y_2, y_3\right) \leqslant C^2 d$, $\ldots$, $\rho\left(y_n, y_{n+1}\right) \leqslant C^n d$. Отже, для будь-яких $n < m$ маємо:

$$\rho\left(y_n, y_m\right) \leqslant \rho\left(y_n, y_{n+1}\right) + \rho\left(y_{n+1}, y_{n+2}\right) + \ldots + \rho\left(y_{m-1}, y_m\right) \leqslant$$

Наведений учбовий текст є витягом з підручнику
Кадець В.М. Курс функціонального аналізу та теорії міри. – Львів: Видавець І.Е. Чижиков, 2012. – 590 с. – (Серія “Університетська бібліотека”) ISBN 978-966-2645-03-3
Усі посилання на теореми, вправи, означення, такі що не увійшли до цього тексту – це посилання на підручник.

$$\leqslant \left(C^n + C^{n+1} + \ldots\right) d = \frac{C^n d}{1-C} \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0.$$

З огляду на повноту простору це означає, що послідовність (y_n) збігається. Позначимо границю цієї послідовності через x_0. Залишилось довести, що x_0 — нерухома точка відображення f. Справді,

$$\rho\left(x_0, f(x_0)\right) \leqslant \rho\left(x_0, f(y_n)\right) + \rho\left(f(y_n), f(x_0)\right) \leqslant$$

$$\leqslant \rho\left(x_0, y_{n+1}\right) + C\rho\left(y_n, x_0\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

тобто $\rho\left(x_0, f(x_0)\right) = 0$, і $x_0 = f(x_0)$. □

Вправи

1. Будь-яке стискальне відображення неперервне.

2. Нехай X — нормований простір. Для того, щоб лінійний оператор $T\colon X \to X$ здійснював відображення стиску, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова $\|T\| < 1$. Що буде в цьому випадку з нерухомою точкою?

3. Теорема Банаха дає не тільки існування нерухомої точки, але і спосіб її наближеного обчислення. Доведіть таку оцінку швидкості наближення y_n до нерухомої точки x_0: $\rho(y_n, x_0) \leqslant \frac{C^n d}{1-C}$, де C — константа з (1), а $d = \rho\left(y_0, y_1\right)$. Наведіть приклад стискального відображення на прямій, для якого ця оцінка не покращується.

4. Наведіть приклад відображення $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, яке не має нерухомих точок і задовольняє такий послаблений варіант умови (1): для будь-яких $x_1, x_2 \in X$, відмінних між собою, $\rho\left(f(x_1), f(x_2)\right) < \rho\left(x_1, x_2\right)$.

5. Властивість бути відображенням стиску в нормованому просторі може порушуватись при заміні вихідної норми на еквівалентну. Наведіть приклад.

6. Опишіть відображення $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, які є стискальними у всіх нормах на $\mathbb{R}^2$.

7. Нехай X — повний метричний простір, K — компакт і неперервна функція $F\colon K \times X \to X$ є рівномірно стискальною за другою змінною: існує така стала $C \in [0,1)$, що для будь-яких $x_1, x_2 \in X$ і будь-якого $t \in K$ виконується нерівність $\rho\left(F(t,x_1), F(t,x_2)\right) \leqslant C\rho\left(x_1, x_2\right)$. Тоді для будь-якого $t \in K$ існує єдиний розв'язок x рівняння $F(t,x) = x$ причому цей розв'язок $x(t)$ неперервно залежить від t.

8. Доведіть таку теорему про неявну функцію: нехай функція $\Phi(t,x)$ визначена і неперервна у смузі $\Pi = \{(t,x) : t \in [a,b], x \in \mathbb{R}\}$, причому Φ неперервно диференційовна за другою змінною і Φ'_x задовольняє у всій смузі нерівність $m \leqslant \Phi'_x \leqslant M$, де $m, M \in (0, +\infty)$. Тоді для будь-якого $t \in [a,b]$ існує єдиний розв'язок рівняння $\Phi(t,x) = 0$, причому цей розв'язок неперервно залежить від t.

9. Нагадаємо, що оборотність оператора $U \in L(X)$ можна трактувати як існування і єдиність розв'язку рівняння $Ux = b$ при будь-якій правій частині $x \in X$. Виведіть теорему про мале збурення одиничного оператора (якщо $T \in L(X)$ і $\|T\| < 1$, то оператор $I - T$ оборотний) з теореми про відображення стиску.

15.1.2. Властивість нерухомої точки. Теорема Брауера

Означення 1. Топологічний простір X має *властивість нерухомої точки*, якщо будь-яка неперервна функція $f\colon X \to X$ має принаймні одну нерухому точку.

Приклад 1. Відрізок $[0,1]$ має властивість нерухомої точки. Справді, нехай $f\colon [0,1] \to [0,1]$ — неперервна функція. Розглянемо дві множини: $A = \{\, t \in [0,1] : f(t) \leqslant t\}$ і $B = \{\, t \in [0,1] : f(t) \geqslant t\}$. Ці множини замкнені і в об'єднанні дають весь відрізок. Отже, з огляду на зв'язність відрізка множини A і B перетинаються. Будь-яка точка множини $A \cap B$ є шуканою нерухомою точкою.

Приклад 2. Коло на площині не має властивості нерухомої точки. За відображення без нерухомих точок можна взяти, скажімо, центральну симетрію кола.

Найважливіший клас прикладів надає така теорема Брауера.

Теорема 1. *Кожний опуклий компакт у скінченновимірному нормованому просторі має властивість нерухомої точки.*

Відносно елементарне доведення цієї теореми в термінах комбінаторних властивостей симплексів, яке не спирається на складні топологічні поняття, можна прочитати у підручнику Куратовського [Kur, т. 1, § 28.1][1].

Наведемо приклад застосування теореми Брауера.

Теорема 2. *Нехай $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — лінійний оператор, що задається матрицею, всі елементи $a_{i,j}$ якої невід'ємні. Тоді A має власний вектор з невід'ємними координатами.*

Доведення. Позначимо

$$\mathbb{R}^n_+ = \{x = (x_1, ..., x_n) : x_k \geqslant 0,\ k = 1, \ldots, n\}.$$

За умовою, $A\left(\mathbb{R}^n_+\right) \subset \mathbb{R}^n_+$. Якщо в $\mathbb{R}^n_+$ існує ненульовий вектор x з $Ax = 0$, то це і є потрібний власний вектор (з власним числом 0). Тому ми можемо вважати, що $Ax \neq 0$ для всіх $x \in \mathbb{R}^n_+ \backslash \{0\}$. Розглянемо функціонал $s(x) = \sum_{k=1}^n x_k$ — сума координат і компакт $K = \left\{ x \in \mathbb{R}^n_+ : s(x) = 1 \right\}$. Згідно з теоремою Брауера, відображення $f\colon K \to K$, яке діє за правилом $f(x) = \frac{Ax}{s(Ax)}$, повинно мати нерухому точку $x_0 \in K$. Для цієї точки $\frac{Ax_0}{s(Ax_0)} = x_0$, тобто x_0 — це власний вектор з власним числом $s(Ax_0)$. □

Вправи

1. Якщо топологічний простір X незв'язний (тобто його можна розбити в об'єднання двох неперетинних замкнених множин), то X не має властивості нерухомої точки.

2. Якщо X гомеоморфний простору з властивістю нерухомої точки, то X сам має цю властивість.

У теорії топологічних просторів аналогом поняття доповнюваного підпростору є поняття ретракта. Підпростір Y топологічного простору X називається *ретрактом*, якщо існує таке неперервне відображення $P\colon X \to Y$ (яке називається *ретракцією*), що $Py = y$ для всіх $y \in Y$.

3. Кожен ретракт топологічного простору з властивістю нерухомої точки сам має властивість нерухомої точки.

4. Спираючись на попередню вправу, наведіть приклад компакта в $\mathbb{R}^2$, що має властивість нерухомої точки, але не гомеоморфний опуклому компакту.

5. Одинична сфера скінченновимірного нормованого простору не є ретрактом замкненої одиничної кулі.

6. Побудуйте ретракцію замкненої одиничної кулі простору l_2 на одиничну сферу цього простору.

7. Замкнена одинична куля простору l_2 не має властивості нерухомої точки.

---

[1]Згадане доведення запропонували Б. Кнастер, С. Мазуркевич і К. Куратовський, отже, виклад [Kur] належить одному з авторів міркування. Ми вважаємо, що початківцю корисно звертатись до підручників, написаних не лише педагогами, які знають і вміють добре викласти матеріал, а людьми, які здійснили істотний внесок у створення і розробку відповідних розділів науки. Таким чином читач має шанс ознайомитись не тільки з результатами, але й, що ще важливіше, із способами мислення людей, які довели продуктивність свого підходу до математики.

15.1.3. Розбиття одиниці і апроксимація неперервних відображень скінченновимірними

Означення 1. Нехай K — непорожня підмножина метричного простору X, U_j, $j = 1, 2, ..., n$ — відкриті множини, і $\bigcup_{j=1}^n U_j \supset K$. Набір функцій $\varphi_j \colon K \to \mathbb{R}$, $j = 1, 2, ..., n$ називається *розбиттям одиниці на K, що підпорядковане покриттю* $\{U_j\}_1^n$, якщо $\sum_{j=1}^n \varphi_j \equiv 1$, $\varphi_j \geqslant 0$ і $\operatorname{supp} \varphi_j \subset U_j$ при всіх j.

Теорема 1. *В описаних вище умовах існує розбиття одиниці на K, що підпорядковане покриттю* $\{U_j\}_1^n$.

Доведення. Множини $U_j^c = X \backslash U_j$ замкнені. Якщо хоча б одна з U_j^c порожня, то $U_j = X \supset K$ і задача розв'язується тривіальним способом: для цього індексу j візьмемо $\varphi_j \equiv 1$, а для $k \neq j$ покладемо $\varphi_k \equiv 0$. Отже, можна припускати непорожність всіх U_j^c. Розглянемо на K функції $g_j(x) = \rho(x, U_j^c)$. Ці функції невід'ємні, неперервні (п. 1.3.2) і мають таку властивість: $x \in U_j$ тоді і тільки тоді, коли $g_j(x) \neq 0$. Оскільки кожна точка $x \in K$ лежить принаймні в одній з U_j, функція $g = \sum_{j=1}^n g_j$ ніде на K не перетворюється на нуль. За шукані φ_j можна взяти функції $\varphi_j = \frac{g_j}{g}$. Ці функції неперервні (знаменник не перетворюється в нуль), невід'ємні, $\operatorname{supp} \varphi_j = \operatorname{supp} g_j = U_j$ і $\sum_{j=1}^n \varphi_j = \frac{1}{g} \sum_{j=1}^n g_j = 1$. □

Наступне означення узагальнює на нелінійний випадок поняття скінченновимірного оператора.

Означення 2. Відображення g множини X у лінійний простір Y називається *скінченновимірним*, якщо $\dim \operatorname{Lin} g(X) < \infty$.

Теорема 2. *Нехай K — передкомпакт у нормованому просторі Y. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує неперервне скінченновимірне відображення $g_\varepsilon \colon K \to Y$ з $g_\varepsilon(K) \subset \operatorname{conv} K$, що рівномірно наближає на K одиничний оператор з точністю до ε:* $\sup_{x \in K} \|g_\varepsilon(x) - x\| \leqslant \varepsilon$.

Доведення. Виберемо в K скінченну ε-сітку $y_1, y_2, ..., y_n$. Тоді відкриті кулі $U_k = B(y_k, \varepsilon)$ утворюють покриття множини K. Нехай $\varphi_j \colon K \to \mathbb{R}$, $j = 1, 2, ..., n$, — розбиття одиниці на K, яке підпорядковане покриттю $\{U_j\}_1^n$. Покладемо $g_\varepsilon(x) = \sum_{j=1}^n \varphi_j(x) y_j$. Неперервність так визначеного відображення випливає з неперервності всіх ϕ_j. Далі, $g_\varepsilon(K) \subset \operatorname{conv} K$, оскільки суми $\sum_{j=1}^n \varphi_j(x) y_j$ — це опуклі комбінації точок $y_j \in K$. Залишилось перевірити, що $\sup_{x \in K} \|g_\varepsilon(x) - x\| \leqslant \varepsilon$. Нехай $x \in K$ — довільний елемент. Позначимо через N множину індексів $1 \leqslant j \leqslant n$, для яких $\varphi_j(x) \neq 0$. За означенням розбиття одиниці, для $j \in N$ правильне включення $x \in B(y_k, \varepsilon)$, тобто $\|x - y_j\| < \varepsilon$. Відповідно,

$$\|g_\varepsilon(x) - x\| = \left\| \sum_{j=1}^n \varphi_j(x) y_j - \sum_{j=1}^n \varphi_j(x) \cdot x \right\| = \left\| \sum_{j=1}^n \varphi_j(x)(y_j - x) \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j \in N} \varphi_j(x) \, \|(y_j - x)\| < \varepsilon. \qquad \square$$

Теорема 3. *Нехай K — опуклий компакт в нормованому просторі Y. Тоді будь-яке неперервне відображення $f \colon K \to K$ може бути з будь-якою точністю рівномірно наближене скінченновимірними неперервними відображеннями множини K в себе.*

Доведення. Нехай g_ε — функція з теореми 2. На підставі опуклості маємо $g_\varepsilon(K) \subset K$. Неважко зауважити, що композиція $g_\varepsilon \circ f \colon K \to K$ — це скінченновимірне неперервне

відображення, що наближає f з точністю до ε :

$$\sup_{x\in K}\|g_\varepsilon(f(x))-f(x)\|\leqslant\sup_{y\in K}\|g_\varepsilon(y)-y\|\leqslant\varepsilon. \qquad \square$$

Вправи

Хоча в умовах теореми 2 йде мова про наближення одиничного (відповідно, лінійного) оператора, відображення g_ε не завжди можна вибрати лінійним оператором (точніше, обмеженням на K лінійного оператора).

1. Якщо в умовах теореми 2 простір Y має властивість поточкової апроксимації (п. 11.2.2), то за функцію g_ε можна взяти обмеження на K деякого лінійного оператора.

2. Якщо для будь-якого передкомпакта $K\subset Y$ за функцію g_ε з теореми 2 можна взяти лінійний скінченновимірний оператор, то для такого Y виконується теорема 2 п. 11.3.2: для будь-якого нормованого простору X і будь-якого компактного оператора $T\in L(X,Y)$ існує послідовність скінченновимірних операторів $T_n\in L(X,Y)$, збіжна за нормою до оператора T.

15.1.4. Принцип Шаудера

У цьому пункті теорема Брауера про нерухому точку буде поширена зі скінченновимірного випадку на нескінченновимірний.

Означення 1. Нехай X — метричний простір. Елемент $x\in X$ називається *ε-нерухомою точкою* відображення $f\colon X\to X$, якщо $\rho(f(x),x)<\varepsilon$.

Лема 1. *Нехай X — компактний метричний простір. Тоді для існування у неперервного відображення $f\colon X\to X$ нерухомої точки достатньо, щоб f мало ε-нерухому точку для кожного $\varepsilon>0$.*

Доведення. Скориставшись для $\varepsilon=\frac{1}{n}$, $n\in\mathbb{N}$ існуванням ε-нерухомої точки, одержимо послідовність $x_n\in X$ з $\rho(f(x_n),x_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$. Не зменшуючи загальності, можемо припустити, що у послідовності (x_n) існує границя (інакше замінимо (x_n) збіжною підпослідовністю). Позначимо $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ через x. Тоді $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$ і

$$\rho(f(x),x)=\lim_{n\to\infty}\rho(f(x_n),x_n)=0.$$

Тобто $f(x)=x$, і x — це шукана нерухома точка. $\square$

Лема 2. *Нехай Y — нормований простір, $K\subset Y$ — опуклий компакт і $f\colon K\to K$ — неперервне скінченновимірне відображення. Тоді f має нерухому точку.*

Доведення. Введемо позначення $X=\operatorname{Lin}f(K)$, $\tilde K=X\cap K$. Тоді X — скінченновимірний нормований простір, $\tilde K\subset X$ — опуклий компакт і $f(\tilde K)\subset f(K)\subset X\cap K=\tilde K$. За теоремою Брауера, відображення f має нерухому точку в $\tilde K$. Ця нерухома точка буде лежати і в K. $\square$

Теорема 1 (принцип Шаудера). *Кожний опуклий компакт в нормованому просторі має властивість нерухомої точки.*

Доведення. Нехай Y — нормований простір, $K\subset Y$ — опуклий компакт і $f\colon K\to K$ — неперервне відображення. За з лемою 1, достатньо довести, що для будь-якого $\varepsilon>0$ у f є ε-нерухома точка. Скориставшись теоремою 3 п. 15.1.3, знайдемо таке скінченновимірне неперервне відображення $f_\varepsilon\colon K\to K$, що $\rho(f(x),f_\varepsilon(x))<\varepsilon$ для всіх $x\in K$. За

лемою 2 у відображення f_ε є нерухома точка. Ця нерухома точка x_ε відображення f_ε для вихідного відображення f є ε-нерухомою точкою:

$$\rho\left(x_\varepsilon, f(x_\varepsilon)\right) = \rho\left(f_\varepsilon(x_\varepsilon), f(x_\varepsilon)\right) < \varepsilon. \qquad \square$$

Подамо ще одне зручне в застосуваннях переформулювання принципу Шаудера.

Теорема 2. *Нехай V — опукла замкнена, обмежена підмножина банахового простору, $F\colon V \to V$ — неперервне відображення і $F(V)$ — передкомпакт. Тоді у відображення F є нерухома точка.*

Доведення. Позначимо через K замикання опуклої оболонки множини $F(V)$. За умовою, K — опуклий компакт, $F(K) \subset F(V) \subset K$, тобто F можна розглядати як відображення компакта K в себе. Залишається застосувати теорему 1. $\square$

Зазначимо, що принцип Шаудера (1927 р.) справджується для опуклих компактів не тільки в банахових, але й у локально опуклих топологічних векторних просторах (Лере, Шаудер, 1946 р.). Він узагальнюється на многозначні відображення (Kakutani, 1941 р., див. підручник Л. Канторовича й Г. Акілова [К-А, глава 16, § 5], де наведено також застосування до математичної економіки).

Вправи

Множина V в лінійному просторі X називається *конусом*, якщо вона стійка щодо додавання елементів і множення на додатний скаляр. Нехай $F\colon X \to \mathbb{R}$ — такий лінійний функціонал, що $F(v) > 0$ для будь-якого $v \in V\backslash\{0\}$. Тоді множина $V_F = \{\, v \in V : F(v) = 1\}$ називається *базою конуса* V.

1. Конус і база конуса — це опуклі множини.

2. (Абстрактний варіант теореми 2 п. 15.1.2). Нехай V — конус у банаховому просторі X, що має компактну базу, $T \in L(X)$ і $T(V) \subset V$. Тоді в оператора T є власний вектор, який лежить у V.

3. Нехай V — замкнений конус в банаховому просторі X, $T\colon X \to X$ — компактний оператор, $T(V) \subset V$. Нехай, далі, $F \in X^*$ — такий функціонал, що $F(v) > 0$ для будь-якого $v \in V\backslash\{0\}$. Тоді, якщо база V_F обмежена й $\inf\{\, x^*(Tv) : v \in V_F\} > 0$, то в оператора T є власний вектор, що лежить в V.

4. Чи існує обмежена замкнена база у конуса всіх невід'ємних функцій в $L_1[0,1]$? Чи існує у цього конуса компактна база?

5. Ті самі запитання для конуса всіх невід'ємних функцій в $L_2[0,1]$.

6. Розгляньте інтегральний оператор $T\colon L_1[0,1] \to L_1[0,1]$, $(Tf)(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, у якого немає власних функцій (див. приклад 1 п. 11.1.5). Чи не суперечить цей приклад вправі 3, якщо за V взяти конус усіх невід'ємних функцій, а за F — функціонал інтегрування по відрізку: $F(f) = \int_0^1 f(t)\,dt$?

15.2. Застосування до диференціальних рівнянь і теорії операторів

15.2.1. Теореми Пікара і Пеано про існування розв'язку задачі Коші диференціального рівняння

Нагадаємо, що задачею Коші диференціального рівняння $y' = f(t,y)$ називається задача пошуку неперервно диференційовної функції $y(t)$, визначеної в околі точки t_0, яка

задовольняє як саме рівняння, так і задану початкову умову $y(t_0) = y_0$. У випадку неперервної функції $f(t, y)$ задача Коші еквівалентна такому інтегральному рівнянню:

$$y(t) = y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds. \tag{1}$$

Теорема Пікара. *Нехай функція $f\colon [t_0, T] \times [y_0 - \theta, y_0 + \theta] \to [-M, M]$ вимірна і задовольняє умову Ліпшиця за другою змінною зі сталою $\gamma > 0$, не залежною від першої змінної. Тоді існує таке $\tau > 0$, що на відрізку $t \in [t_0, t_0 + \tau]$ рівняння (1) має розв'язок і цей розв'язок єдиний. За τ можна взяти будь-яке число, строго менше за $\tau_0 = \min\left\{\frac{\theta}{M}, \frac{1}{\gamma}, T - t_0\right\}$.*

Доведення. У банаховому просторі $C[t_0, t_0 + \tau]$ розглянемо підмножину U всіх функцій $y(t)$, які задовольняють на $[t_0, t_0 + \tau]$ умову $|y(t) - y_0| \leqslant \theta$. Задамо таке відображення $F\colon U \to C[t_0, t_0 + \tau]$:

$$(F(y))(t) = y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds.$$

Розв'язок рівняння (1) — це нерухомі точки відображення F.

Перевіримо, що F здійснює відображення стиску множини U в себе. По-перше, для будь-якого $y \in U$ маємо

$$|(F(y))(t) - y_0| = \left|\int\limits_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds\right| \leqslant M\tau \leqslant \theta,$$

тобто $F(y) \in U$. Отже, $F(U) \subset U$. Далі, для будь-яких $y_1, y_2 \in U$

$$\|F(y_1) - F(y_2)\| = \max_{t \in [t_0, t_0+\tau]} \left|\int\limits_{t_0}^{t} f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))ds\right| \leqslant \gamma\tau \|y_1 - y_2\|,$$

а за побудовою $\gamma\tau < 1$. Тобто F — стискальне відображення. Нарешті, множина U замкнена в $C[t_0, t_0 + \tau]$, відповідно, U — повний метричний простір у рівномірній метриці, яку ми розглядаємо. Отже, можна застосувати теорему Банаха про відображення стиску, яка дає нам існування і єдиність нерухомої точки. □

Теорема Пеано. *Нехай функція $f\colon [t_0, T] \times [y_0 - \theta, y_0 + \theta] \to [-M, M]$ вимірна і рівномірно відносно першої змінної неперервна за другою змінною. Іншими словами, для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що для будь-якого $t \in [t_0, T]$ і будь-яких $y_1, y_2 \in [y_0 - \theta, y_0 + \theta]$, якщо $|y_1 - y_2| \leqslant \delta$, то $|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leqslant \varepsilon$.*

Тоді в рівняння (1) існує розв'язок на відрізку $t \in [t_0, t_0 + \tau]$, де за τ можна взяти $\min\left\{\frac{\theta}{M}, T - t_0\right\}$.

Доведення. Розглянемо таку саму множину U і таке саме відображення F, як і в попередньому доведенні. Тільки на відміну від теореми 1 існування нерухомої точки буде випливати не з теореми про відображення стиску, а з принципу Шаудера у формулюванні з теореми 2 п. 15.1.4. Зокрема, тому в теоремі стверджується існування, але не стверджується єдиність розв'язку.

Перевіримо виконання умов теореми 2 п. 15.1.4 у нашому випадку. Множина U — це замкнена куля простору $C[t_0, t_0 + \tau]$ радіуса θ з центром у функції, що тотожно дорівнює

y_0. Тому U — опукла замкнена, обмежена підмножина простору $C[t_0, t_0+\tau]$. Доведення включення $F(U) \subset U$ з теореми Пікара зберігає свою силу. Перевіримо неперервність відображення F. Для будь-якого $\varepsilon > 0$ візьмемо $\delta(\varepsilon)$ з умови рівномірної неперервності за y функції $f(t, y)$. Тоді для будь-яких функцій $y_1, y_2 \in U$ з $\|y_1 - y_2\| < \delta(\varepsilon/\tau)$ маємо $|f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))| \leqslant \varepsilon/\tau$ і, отже,

$$\|F(y_1) - F(y_2)\| = \max_{t\in[t_0,t_0+\tau]} \left| \int_{t_0}^{t} f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))ds \right| \leqslant \varepsilon.$$

Нарешті, перевіримо, що $F(U)$ — це передкомпакт. Оскільки $F(U) \subset U$, а U — це куля, $F(U)$ — обмежена множина. Згідно з теоремою Арцела, нам треба довести одностайну неперервність сім'ї функцій $F(U)$. Для будь-якої функції $g \in F(U)$ існує функція $y \in U$ з $F(y) = g$. Відповідно, для будь-яких $t_1, t_2 \in [t_0, t_0+\tau]$ маємо:

$$|g(t_1) - g(t_2)| = |(F(y))(t_1) - (F(y))(t_1)| = \left| \int_{t_1}^{t_2} f(s, y(s))ds \right| \leqslant M\,|t_1 - t_2|\,.$$

Тобто сім'я $F(U)$ не просто одностайно неперервна, а задовольняє умову Ліпшиця із загальною сталою M.

Отже, всі умови теореми 2 п. 15.1.4 перевірено, чим доведено існування шуканої нерухомої точки. □

Вправи

1. На прикладі задачі Коші $y' = 2\sqrt{|y|}$, $y(0) = 0$ переконайтесь, що умови теореми Пеано справді не гарантують єдиності розв'язку.

2. Спираючись на вправу 7 п. 15.1.1, доведіть, що в теоремі Пікара розв'язок задачі Коші неперервно залежить від початкової умови y_0.

3. Придумайте які-небудь умови розв'язності в $C[a, b]$ інтегрального рівняння $y(t) = \int_a^b f(s, t, y(s))ds$ за схемою: якщо ядро f «маленьке і добре», то у рівняння є розв'язок у заданій кулі з центром в нулі.

15.2.2. Теорема Ломоносова про інваріантний підпростір

Нагадаємо, що замкнений підпростір Y простору X називається *інваріантним підпростором* для оператора $A \in L(X)$, якщо $A(Y) \subset Y$. Підпростір $Y \subset X$ назвемо *нетривіальним*, якщо він не збігається ні з нулем, ні з усім простором X. Знання інваріантних підпросторів допомагає зрозуміти структуру оператора. Так, наприклад, в лінійній алгебрі для побудови жорданової форми виділяють кореневі підпростори; розклад простору в пряму суму інваріантних підпросторів дозволяє зводити розв'язок рівняння $Ax = b$ до рівнянь у відповідних підпросторах. Мабуть, найважливіша на сьогодні нерозв'язана задача теорії операторів — це проблема інваріантного підпростору: чи у будь-якого обмеженого оператора в гільбертовому просторі існує нетривіальний інваріантний підпростір?

Проблемі інваріантного підпростору присвячено багато наукових робіт (див., наприклад, монографію [Bea] або огляди [AAB] і [Nik]). У різних банахових просторах (наприклад, в l_1) відомі приклади неперервних операторів без нетривіальних інваріантних підпросторів. Відомі також позитивні результати, серед яких першим була теорема фон Неймана: у будь-якого компактного оператора в гільбертовому просторі існує

нетривіальний інваріантний підпростір. Теорему фон Неймана було доведено в 30-х роках XX століття, але опубліковано вперше через 20 років Ароншайном і Смітом, які поширили результат на випадок банахового простору. Нижче ми доведемо теорему існування інваріантного підпростору, яка належить колишньому харків'янину Віктору Ломоносову [Lom]. Теорема Ломоносова вирізняється своєю загальністю й елегантністю як формулювання, так і доведенням.

Зауваження

(i) Нехай G — підмножина в X, для якої $A(G) \subset G$. Тоді $A(\operatorname{Lin} G) \subset \operatorname{Lin} G$.

(ii) Нехай E — лінійний підпростір простору X, $A(E) \subset E$. Тоді замикання підпростору E також буде інваріантним для A.

(iii) Ядро оператора і замикання образу — це інваріантні підпростори.

(iv) Для будь-якого елемента $x \in X \setminus \{0\}$ множина $G = \{A^n x\}_{n=1}^{\infty}$ задовольняє умову зауваження (i). Отже, замикання лінійної оболонки множини G утворює інваріантний підпростір оператора A.

(v) Загальніший приклад. Нехай M — підалгебра алгебри $L(X)$ (тобто підпростір, який містить разом з будь-якими двома своїми елементами і їхній добуток), $x \in X \setminus \{0\}$. Означимо *орбіту елемента* x як множину $M(x) = \{Tx : T \in M\}$. Тоді замикання орбіти — це інваріантний підпростір для будь-якого оператора з підалгебри M.

N.B. Перевірте! Ми будемо використовувати цей приклад.

Теорема Ломоносова. *Нехай $A \in L(X) \setminus \{0\}$ — цілком неперервний оператор у нескінченновимірному банаховому просторі. Тоді у всіх операторів, які комутують з A, існує спільний нетривіальний інваріантний підпростір.*

Доведення. Будемо міркувати методом від супротивного, тобто припустимо, що немає такого спільного інваріантного підпростору. Зафіксуємо відкриту кулю U в просторі X так, щоб компакт K, утворений замиканням множини $A(U)$, не містив нуля. Нехай M — підалгебра алгебри $L(X)$, що складається з усіх операторів, які комутують з A. Зазначимо, що орбіта $M(x)$ будь-якого ненульового елемента щільна в X, інакше, згідно із зауваженням (v), замикання орбіти було б спільним нетривіальним інваріантним підпростором для операторів з M. Тому для будь-якої точки $s \in K$ можна знайти такий оператор $T_s \in M$, що $T_s(s) \in U$. Тоді оператор T_s також переводить в U і деякий окіл V_s елемента s. Оскільки околи V_s при s, що пробігає множину K, утворюють покриття цієї множини, ми можемо вибрати скінченне підпокриття. Іншими словами, існує така скінченна підмножина $J \subset K$, що $\bigcup_{s \in J} V_s \supset K$.

Нехай функції $\varphi_s \in C(K)$, $s \in J$ утворюють розклад одиниці, що підпорядковуються покриттю $\bigcup_{s \in J} V_s$ множини K.[2] Введемо в розгляд таке відображення $F\colon K \to X$:

$$F(x) = A\left(\sum_{s \in J} \varphi_s(x) \cdot T_s(x)\right).$$

Для будь-якої точки $x \in K$ ненульовими в останній сумі будуть тільки ті доданки, де $\varphi_s(x) \neq 0$, тобто ті, для яких V_s містить елемент x. Якщо $x \in V_s$, то, за побудовою, $T_s(x) \in U$ і, отже, $F(x) \in K$. Отож $F(K) \subset K$, і ми перебуваємо в умовах принципу

[2] Тобто $\varphi_s \geqslant 0$, $\sum_{s \in J} \varphi_s \equiv 1$ і носій функції φ лежить у відповідному V_s.

Шаудера. Позначимо через x_0 нерухому точку відображення F. Тоді x_0 буде нерухомою точкою і для такого компактного оператора $T \in M$:

$$T = A\left(\sum_{s\in J} \varphi_s\left(x_0\right) T_s\right).$$

Розглянемо власний підпростір $Y = \operatorname{Ker}(T - I)$. Згідно з теоремою п. 11.1.5, підпростір Y буде інваріантним для оператора A. На підставі компактності оператора T підпростір Y скінченновимірний. Оскільки будь-який оператор у скінченновимірному просторі має власні числа, деяке власне число μ є і в обмеження оператора A на підпростір Y. Позначимо через E власний підпростір оператора A, відповідний власному числу μ.

Згідно з тією ж теоремою п. 11.1.5, підпростір E буде інваріантним для всіх операторів, які комутують з оператором A. □

Наслідок. *Якщо оператор T комутує хоча б з одним цілком неперервним оператором, то в оператора T є нетривіальні інваріантні підпростори.*

Вправи

1. Нехай $A \in L(X)$; Y — інваріантний підпростір оператора A. Введемо в розгляд оператори $A_1 \in L(Y)$ і $A_2 \in L(X/Y)$ — обмеження і факторизація оператора: $A_1(y) = A(y)$; $A_1([x]) = [Ax]$. Чи можна відновити оператор A за операторами A_1 і A_2? Чи пов'язані якось спектри цих операторів? Чи залежить відповідь від вимірностей трьох просторів, що входять в умову?

Перевірте, що:

2. Оператор зсуву $U(a_1, a_2, ...) = (0, a_1, a_2, ..)$ в l_2 не комутує з жодним цілком неперервним оператором, водночас нетривіальні інваріантні підпростори в нього є.

3. Підмножина M алгебри $L(X)$, означена в доведені теореми Ломоносова, справді утворює підалгебру в $L(X)$.

4. Ця підмножина замкнена в сенсі поточкової збіжності операторів. Чи буде вона замкнена за нормою?

Відновіть опущені деталі в доведенні теореми Ломоносова:

5. Чому можливий потрібний вибір кулі U?

6. Чи буде F лінійним оператором?

7. Чому застосовний принцип Шаудера?

8. Де використовувалась нескінченновимірність простору? (У скінченновимірних просторах теорема неправильна. Контрприклад: $A = I$.)

15.3. Спільні нерухомі точки сім'ї відображень

15.3.1. Теорема Какутані

Нагадаємо, що діаметром множини V в метричному просторі X називається величина $\operatorname{diam}(V) = \sup\{\rho(x, y) : x, y \in V\}$.

Означення 1. *Радіусом множини V в точці $x \in V$* називається найменший радіус $r_x(V)$ замкненої кулі з центром в x, що містить всю множину V. Еквівалентне означення: $r_x(V) = \sup\{\rho(x, y) : y \in V\}$. Очевидно,

$$\operatorname{diam}(V) = \sup_{x\in V} r_x(V). \qquad (*)$$

Точка $x \in V$ називається *діаметральним елементом* множини V, якщо $r_x(V) = \operatorname{diam}(V)$.

Лема 1. *Нехай V — опуклий компакт у нормованому просторі X, що складається більше ніж з однієї точки. Тоді у V існує недіаметральний елемент, тобто існує $x \in V$, для якого $r_x(V) < diam(V)$.*

Доведення. Зафіксуємо додатне $\varepsilon < \mathrm{diam}(V)$ і виберемо у множині V ε-сітку $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Шуканий недіаметральний елемент x виберемо як середнє арифметичне елементів ε-сітки: $x = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$. Розглянемо довільний $y \in V$. Тоді

$$\|x - y\| = \frac{1}{n}\left\|\sum_{k=1}^{n}(x_k - y)\right\| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\|x_k - y\|.$$

Принаймні один з доданків в останній сумі не перевищує ε, а решта оцінюються зверху числом $\mathrm{diam}(V)$. Отже, $\|x - y\| \leqslant \frac{n-1}{n}\mathrm{diam}(V) + \frac{1}{n}\varepsilon$. Переходячи до супремума за $y \in V$, одержуємо

$$r_x(V) \leqslant \frac{n-1}{n}\mathrm{diam}(V) + \frac{1}{n}\varepsilon < \mathrm{diam}(V). \qquad \square$$

Лема 2. *Нехай V — опуклий компакт у нормованому просторі X, що складається більше ніж з однієї точки. Тоді існує непорожній опуклий компакт $V_0 \subset V$, $V_0 \neq V$, інваріантний відносно всіх бієктивних ізометрій компакта V в себе.*

Доведення. Скориставшись лемою 1, виберемо $x_0 \in V$ з $r_{x_0}(V) < \mathrm{diam}(V)$. Введемо позначення $r_0 = r_{x_0}(V)$ і за шукане V_0 візьмемо множину всіх $x \in V$, для яких $r_x(V) \leqslant r_0$. За побудовою $x_0 \in V_0$, тобто V_0 непорожня. Далі, згідно $(*)$, у V існують точки з $r_x(V) > r_0$ (насправді, на підставі компактності, навіть з $r_x(V) = \mathrm{diam}\, V$). Отже, $V_0 \neq V$.

Зазначимо, що точка $x \in V$ потрапляє в V_0 тоді і тільки тоді, коли відстані від x до всіх $y \in V$ не перевищують r_0. Тобто V_0 можна записати у вигляді перетину $V_0 = V \cap \left(\bigcap_{y \in V} \bar{B}(y, r_0)\right)$ опуклих замкнених множин, тому V_0 сама — опукла замкнена множина. Залишилось перевірити інваріантність відносно всіх бієктивних ізометрій $T\colon V \to V$. Нехай $x \in V$, нам потрібно довести, що $T(x) \in V$. Тобто потрібно довести, що $\|T(x) - y\| \leqslant r_0$ для будь-якого $y \in V$. Справді, з огляду на бієктивність точка y має вигляд $y = T(z)$, $z \in V$. Відповідно,

$$\|T(x) - y\| = \|T(x) - T(z)\| = \|x - y\| \leqslant r_0. \qquad \square$$

Теорема Какутані. *Нехай K — непорожній опуклий компакт в нормованому просторі X. Тоді у всіх бієктивних ізометрій компакта K в себе існує спільна нерухома точка.*

Доведення. Розглянемо сім'ю W всіх непорожніх опуклих замкнених підмножин V компакта K, які мають ту властивість, що

$$T(V) \subset V \text{ для будь-якої бієктивної ізометрії } T\colon K \to K. \qquad (**)$$

Упорядкуємо сім'ю W за спаданням множин. Пропонуємо читачеві самостійно перевірити, що перетин будь-якого ланцюжка елементів сім'ї W — це знову елемент сім'ї W, тобто сім'я W індуктивно впорядкована (непорожність перетину елементів ланцюга гарантується компактністю множини K). За лемою Цорна, у W існує мінімальний за включенням елемент V. З леми 2 випливає, що цей мінімальний елемент не може містити більше однієї точки. Отже, V складається з одного елемента $x_0 \in K$, а умова $(**)$ означає, що x_0 — нерухома точка для всіх бієктивних ізометрій $T\colon K \to K$. $\square$

Вправи

1. Нехай V — деяка куля нормованого простору. Тоді (a) центр кулі V — спільна нерухома точка всіх бієктивних ізометрій $T\colon V \to V$; (b) інших спільних нерухомих точок всіх бієктивних ізометрій $T\colon V \to V$ немає.

2. Наведіть приклад кулі в метричному просторі, де не виконується пункт (a) попередньої вправи. Те ж для п. (b). Наведіть приклад, де не виконується ні п. (a), ні п. (b).

За означенням, банахів простір X має *нормальну структуру*, якщо у будь-якої опуклої замкненої обмеженої підмножини $V \subset X$, що складається більше ніж з однієї точки, існує недіаметральний елемент.

3. Будь-який скінченновимірний банахів простір має нормальну структуру.

4. Гільбертів простір має нормальну структуру.

5. Простір l_1 не має нормальної структури. Множиною, у якої всі точки діаметральні, буде

$$V = \left\{ x = (x_1, x_2, ...) \in l_1 : \sum_{k=1}^{\infty} x_k = 1, x_k \geqslant 0 \ \ \forall k \in \mathbb{N} \right\}.$$

6. Простори c_0 не мають нормальної структури. Розгляньте множину

$$V = \{x = (x_1, x_2, ...) \in c_0 : 1 \geqslant x_1 \geqslant x_2 \geqslant ...\}.$$

7. Простір $C[0,1]$, $L_\infty[0,1]$ і $L_1[0,1]$ не має нормальної структури.

15.3.2. Топологічні групи

Означення 1. Група G із заданою на ній відокремлюваною за Гаусдорфом топологією τ називається *топологічною групою*, якщо топологія узгоджена з груповою структурою в такому розумінні:

1) операція $(x, y) \mapsto x \cdot y$ добутку елементів неперервна за сукупністю змінних;
2) неперервна операція $x \mapsto x^{-1}$ переходу до оберненого елемента.

Прикладами топологічних груп є нормований простір з операцією додавання, одиничне коло в $\mathbb{C}$ з операцією множення, множина всіх унітарних матриць порядку n з операцією множення матриць, наділена метрикою із простору операторів, група оборотних елементів будь-якої банахової алгебри і багато інших груп, що виникають природним способом в задачах аналізу.

Для груп прийнято операції над підмножинами, аналогічні введеним в п. 5.1.4 для лінійних просторів: $A_1A_2 = \{a_1a_2 : a_1 \in A_1, a_2 \in A_2\}$; $A^{-1} = \{\, a^{-1} : a \in A\}$. Позначимо через e одиничний елемент топологічної групи G, а через $\mathfrak{O}_e$ — систему всіх околів елемента e. Пропонуємо читачеві самостійно перевірити такі властивості топологічних груп. Доведення дуже подібних результатів будуть наведені нижче в темі «Топологічні векторні простори».

(i) Для будь-якого $x \in G$ множини вигляду xU, $U \in \mathfrak{O}_e$, утворюють базу околів елемента x.

(ii) Таку ж властивість має система множин $U \cdot x$, $U \in \mathfrak{O}_e$.

(iii) Для будь-якого околу $W \in \mathfrak{O}_e$ існує такий окіл $U \in \mathfrak{O}_e$, що

$$U \cdot U \subset W.$$

(iv) Для будь-якого околу $W \in \mathfrak{O}_e$ існує такий окіл $U \in \mathfrak{O}_e$, що

$$U^{-1} \subset W.$$

(v) Для будь-якого околу $W \in \mathfrak{O}_e$ існує такий окіл $U \in \mathfrak{O}_e$, що одночасно

$$U \cdot U^{-1} \subset W,\ U^{-1}U \subset W \text{ і } U \cdot U \subset W.$$

Властивості (i) і (ii) означають, що ступінь близькості елементів групи можна «вимірювати» за допомогою околів одиничного елемента. Якщо $U \in \mathfrak{O}_e$, умову $x^{-1}y \in U$ потрібно трактувати як «x наближає y з точністю U».

Означення 2. Нехай G — топологічна група, Z — метричний простір. Відображення $f\colon G \to Z$ називається *рівномірно неперервним*, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує такий окіл $U \in \mathfrak{O}_e$, що образи будь-яких U-близьких $x, y \in G$ близькі з точністю до ε: $x^{-1}y \in U \Rightarrow \rho\,(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Теорема 1. *Нехай G — компактна топологічна група, Z — метричний простір. Тоді будь-яке неперервне відображення $f\colon G \to Z$ є рівномірно неперервним.*

Доведення. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$. Скориставшись неперервністю відображення f, для кожного $x \in G$ виберемо такий окіл $W_x \in \mathfrak{O}_e$, що для будь-якого $y \in G$, якщо $y \in xW_x$, то $\rho\,(f(x), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Далі, за властивістю (iii) топологічних груп, для кожного $x \in G$ можна вибрати відкритий окіл $U_x \in \mathfrak{O}_e$ так, що $U_xU_x \subset W_x$. Оскільки множини xU_x, $x \in G$ утворюють відкрите покриття компакта G, можна вибрати скінченне підпокриття. Тобто існує така скінченна підмножина $A \subset X$, що $\bigcup_{x\in A} xU_x \supset G$. Покладемо $U = \bigcap_{x\in A} U_x$. Перевіримо, що U — це шуканий окіл з означення рівномірної неперервності. Нехай $x, y \in G$ і $x^{-1}y \in U$. Виберемо таке $x_0 \in A$, що $x \in x_0U_{x_0}$. Зокрема, $x \in x_0W_{x_0}$, тобто $\rho\,(f(x), f(x_0)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Далі,

$$y \in xU \subset x_0U_{x_0}U_{x_0} \subset x_0W_{x_0},$$

тобто $\rho\,(f(y), f(x_0)) < \frac{\varepsilon}{2}$ і, за нерівністю трикутника, $\rho\,(f(y), f(x_0)) < \varepsilon$. □

Пропонуємо читачеві самостійно довести такий аналог теореми Арцела (п. 1.3.1).

Теорема 2. *Нехай G — компактна топологічна група. Для того, щоб сім'я F неперервних скалярнозначних функцій на G була передкомпактом в $C(G)$, необхідно і достатньо, щоб вона (a) була рівномірно обмеженою і (b) задовольняла таку умову одностайної неперервності: для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує такий окіл $U \in \mathfrak{O}_e$, що для будь-якої функції $f \in F$ і будь-яких $x, y \in G$, якщо $x^{-1}y \in U$, то $\rho\,(f(x), f(y)) < \varepsilon$.*

15.3.3. Міра Гаара

Означення 1. *Мірою Гаара* на топологічній групі G називається ненульова регулярна борелева міра μ на G, інваріантна щодо зсувів і симетрії:

$$\mu(sA) = \mu(As) = \mu(A^{-1}) = \mu(A)$$

для будь-якої борелевої підмножини $A \subset G$ і будь-якого $s \in G$.

Ненульова регулярна борелева міра на G, інваріантна відносно лівих зсувів, називається *лівою мірою Гаара*, а інваріантна щодо правих зсувів називається *правою мірою Гаара*.

Починаючи з цього місця і до кінця пункту G буде компактною топологічною групою. Основна мета пункту — довести існування на такій групі міри Гаара. Доведення спиратиметься на теорему Какутані.

Для будь-якого $s \in G$ означимо оператори $L_s, R_s \colon C(G) \to C(G)$ лівого і правого зсувів:

$$(L_s f)(x) = f(sx), \quad (R_s f)(x) = f(xs).$$

Означимо також оператор симетрії $\Psi \colon C(G) \to C(G)$ формулою $(\Psi f)(x) = f(x^{-1})$.

Лема 1. *Оператори зсуву мають такі властивості:*

I. $L_e = I$, $L_s L_t = L_{ts}$, *зокрема,* $(L_s)^{-1} = L_{s^{-1}}$.

II. $R_e = I$, $R_s R_t = R_{st}$, *зокрема,* $(R_s)^{-1} = R_{s^{-1}}$.

III. $L_s R_t = R_t L_s$.

IV. Оператори L_s, R_s *і* Ψ *— бієктивні ізометрії простору* $C(G)$.

V. $L_{s^{-1}} \Psi = \Psi R_s$.

Далі, для будь-якої функції $f \in C(G)$ означимо множини $c_L(f)$ і $c_R(f)$ як замикання опуклих оболонок множин всіх лівих і всіх правих зсувів функції f відповідно:

$$c_L(f) = \overline{\operatorname{conv}} \{L_s f : s \in G\}, \quad c_R(f) = \overline{\operatorname{conv}} \{R_s f : s \in G\}.$$

Приймемо ще одне позначення: символом $\mathbb{1}$ позначимо функцію $\mathbb{1}_G$, що тотожно дорівнює одиниці на G.

Лема 2. *Нехай* G *— компактна топологічна група. Тоді:*

A. Для будь-якої функції $f \in C(G)$ *множина* $c_L(f)$ *компактна в* $C(G)$.

B. Множина $c_L(f)$ *інваріантна щодо всіх операторів лівого зсуву, причому ці оператори діють бієктивно на* $c_L(f)$.

C. Якщо $g \in c_L(f)$, *то* $c_L(g) \subset c_L(f)$.

D. Для будь-якої функції $f \in C(G)$ *існує такий скаляр* a, *що* $a \cdot \mathbb{1} \in c_L(f)$.

Аналогічні властивості мають і множини $c_R(f)$:

A′. Для будь-якої функції $f \in C(G)$ *множина* $c_R(f)$ *компактна в* $C(G)$.

B′. Множина $c_R(f)$ *інваріантна щодо всіх операторів правого зсуву, причому оператори правого зсуву діють бієктивно на* $c_R(f)$.

C′. Якщо $g \in c_R(f)$, *то* $c_R(g) \subset c_R(f)$.

D′. Для будь-якої функції $f \in C(G)$ *існує такий скаляр* b, *що* $b \cdot \mathbb{1} \in c_R(f)$.

Доведення. A. Введемо позначення $r = \|f\|$. На підставі того, що зсуви — це ізометрії, всі елементи вигляду $L_s f$, $s \in G$ лежать в $r\bar{B}_{C(G)}$. А оскільки $r\bar{B}_{C(G)}$ — опукла замкнена множина, то операції опуклої оболонки і замикання не виводять за межі цієї множини. Отже, $c_L(f) \subset r\bar{B}_{C(G)}$, чим доведено обмеженість множини $c_L(f)$. Множина $c_L(f)$ замкнена, отже для доведення компактності залишилось перевірити (теорема 2 попереднього пункту) одностайну неперервність. Скористаємось рівномірною неперервністю функції f (теорема 1 попереднього пункту) і для даного $\varepsilon > 0$ виберемо такий

окіл $U \in \mathbb{1}_e$, що для будь-яких $x, y \in G$ з $x^{-1}y \in U$ має місце оцінка $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$. Оскільки для будь-якого $s \in G$ елементи sx і sy також близькі:

$$(sx)^{-1}(sy) = x^{-1}s^{-1}sy = x^{-1}y \in U,$$

така сама оцінка виконуватиметься і для функції $L_s f$:

$$|(L_s f)(x) - (L_s f)(y)| = |f(sx) - f(sy)| \leqslant \varepsilon.$$

Відповідно, ця сама оцінка збережеться для будь-якої опуклої комбінації $g = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k L_{s_k} f$ лівих зсувів:

$$|g(x) - g(y)| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \left|(L_{s_k} f)(x) - (L_{s_k} f)(y)\right| \leqslant \varepsilon.$$

Перехід до границі не змінить цієї оцінки, тобто імплікація $x^{-1}y \in U \Rightarrow \quad |h(x) - h(y)| \leqslant \varepsilon$ справджується для будь-якої функції $h \in c_L(f)$. Одностайна неперервність, а з нею і компактність множини $c_L(f)$ доведені.

B. Сім'я $H = \{L_s f : s \in G\}$ інваріантна щодо оператора L_t лівого зсуву:

$$L_t H = \{L_t L_s f : s \in G\} = \{L_{st} f : s \in G\} \subset H.$$

На підставі лінійності і неперервності оператора L_t опукла оболонка і замикання зберігають інваріантність. Бієктивність оператора L_t на $c_L(f)$ випливає з існування оберненого $L_{t^{-1}}$, відносно якого $c_L(f)$ також інваріантне.

C. Якщо $g \in c_L(f)$, то, згідно B, $L_s g \in c_L(f)$ для будь-якого $s \in G$. Тобто $\{L_s g : s \in G\} \subset c_L(f)$. Залишається скористатись опуклістю і замкненістю множини $c_L(f)$.

D. Застосувавши теорему Какутані п. 15.3.1 до опуклого компакта $c_L(f)$, одержимо існування елемента $g \in c_L(f)$, нерухомого щодо всіх ізометрій компакта $c_L(f)$. Зокрема, g — нерухома точка всіх операторів лівого зсуву. Введемо позначення $a = g(e)$ і доведемо, що $a \cdot \mathbb{1} = g$, тобто g і є шукана тотожна стала, що лежить в $c_L(f)$. Справді, для будь-якої точки $s \in G$ маємо

$$g(s) = (L_s g)(e) = g(e) = a.$$

Властивості A'–D' множин $c_R(f)$ можна або доводити аналогічно, або звести до доведених властивостей A–D за допомогою формули $c_R(f) = \Psi\left(c_L(\Psi f)\right)$. □

Посилимо твердження D і D' попередньої леми.

Лема 3. *Для будь-якої функції $f \in C(G)$ є тільки один скаляр a з $a \cdot \mathbb{1} \in c_L(f)$ і тільки один скаляр b з $b \cdot \mathbb{1} \in c_R(f)$, причому $a = b$.*

Доведення. Позначимо множину тих скалярів a, для яких $a \cdot \mathbb{1} \in c_L(f)$, через A_f, а тих b, для яких $b \cdot \mathbb{1} \in c_R(f)$, через B_f. Доведемо, що $a = b$ для будь-якого $a \in A_f$ і будь-якого $b \in B_f$. Цим буде доведено, що $A_f = B_f$ і що обидві ці множини складаються з однієї точки. Для цього зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$ і виберемо опуклі комбінації зсувів функції f, що наближають $a \cdot \mathbb{1}$ і $b \cdot \mathbb{1}$ з точністю до ε:

$$\left\| a \cdot \mathbb{1} - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k L_{s_k} f \right\| < \varepsilon; \tag{1}$$

$$\left\| b \cdot \mathbb{1} - \sum_{j=1}^{m} \mu_j R_{t_j} f \right\| < \varepsilon. \tag{2}$$

Діючи на $a \cdot \mathbb{1} - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k L_{s_k} f$ оператором $\mu_j R_{t_j}$, підсумовуючи за j і враховуючи, що $R_{t_j}\mathbb{1} = \mathbb{1}$, $\mu_j \geqslant 0$ і $\sum\limits_{j=1}^{m} \mu_j = 1$, з (1) одержуємо, що

$$\left\| a \cdot \mathbb{1} - \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \lambda_k \mu_j R_{t_j} L_{s_k} f \right\| < \varepsilon.$$

Аналогічно з (2) виводимо, що

$$\left\| b \cdot \mathbb{1} - \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \lambda_k \mu_j R_{t_j} L_{s_k} f \right\| < \varepsilon$$

(не забуваймо про комутовність операторів лівого і правого зсувів). Отже, $\|a \cdot \mathbb{1} - b\mathbb{1}\| < 2\varepsilon$, що з огляду на довільність ε дає потрібну рівність $a = b$. □

Теорема 1 (A. Haar 1933, J. von Neumann, 1934). *На будь-якій компактній топологічній групі G існує єдина ймовірнісна борелева міра μ, що є лівою мірою Гаара. Ця міра буде одночасно мірою Гаара на $C(G)$.*

Доведення. За теоремою про загальний вигляд елементарного інтеграла (п. 8.3.2), існує бієктивна відповідність між регулярними борелевими мірами на G і елементарними інтегралами.

Переформулюємо задачу пошуку лівої міри Гаара в термінах елементарного інтеграла. Потрібно знайти такий лінійний функціонал $\mathcal{I}$ на $C(G)$, який називається *лівоінваріантним середнім*, що:

(i) якщо $f \geqslant 0$, то $\mathcal{I}(f) \geqslant 0$;

(ii) $\mathcal{I}(\mathbb{1}) = 1$;

(iii) $\mathcal{I}(L_s f) = \mathcal{I}(f)$ для будь-якого $s \in G$ і будь-якої функції $f \in C(G)$.

Такий функціонал ми вже розглядали в п. 5.5.1, де було доведено його існування для комутативної (пів)групи G, причому функціонал був визначений не тільки на $C(G)$, а навіть на $l_\infty(G)$. Зараз цей старий результат нас не влаштовує: група може бути некомутативною, і, більше того, нам потрібно не тільки існування, але і єдиність.

Почнемо з єдиності. Припустимо, що такий функціонал $\mathcal{I}$ існує. Тоді для будь-якої функції $f \in C(G)$ і будь-якого $g \in c_L(f)$ маємо з огляду на (iii) $\mathcal{I}(g) = \mathcal{I}(f)$. Отже, $\mathcal{I}(f)$ дорівнює тій сталій a, для якої $a \cdot \mathbb{1} \in c_L(f)$. Це міркування не тільки доводить єдиність, але і вказує шлях побудови функціонала $\mathcal{I}$.

Доведемо існування потрібного функціонала. Для будь-якого $f \in C(G)$ виберемо число $\mathcal{I}(f)$ так, що $\mathcal{I}(f) \cdot \mathbb{1} \in c_L(f)$. За попередніми двома лемами такий вибір можливий і однозначний. Нехай $f \geqslant 0$. Тоді $c_L(f)$ складається тільки з невід'ємних функцій. Зокрема, $\mathcal{I}(f) \cdot \mathbb{1} \geqslant 0$, тобто $\mathcal{I}(f) \geqslant 0$. Цим перевірено аксіому (i) лівоінваріантного середнього. Далі, $\mathbb{1} \in c_L(\mathbb{1})$, тобто $\mathcal{I}(\mathbb{1}) = 1$, чим доведено умову (ii). Нарешті, з п. C леми 2 і однозначності вибору $\mathcal{I}(f)$ випливає, що $\mathcal{I}(g) = \mathcal{I}(f)$ для будь-якого $g \in c_L(f)$. Звідси випливає, зокрема, аксіома (iii) лівоінваріантного середнього.

Доведемо лінійність функціонала $\mathcal{I}$. Однорідність очевидна, перевіримо адитивність. Нехай $f,\ g \in C(G)$. За побудовою, існує опукла комбінація лівих зсувів функції f, що наближає $\mathcal{I}(f) \cdot \mathbb{1}$ з точністю до ε:

$$\left\| \mathcal{I}(f) \cdot \mathbb{1} - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k L_{s_k} f \right\| < \varepsilon. \tag{3}$$

Розглянемо допоміжну функцію $\tilde{g} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k L_{s_k} g$. Оскільки $\tilde{g} \in c_L(g)$, то $\mathcal{I}(\tilde{g}) = \mathcal{I}(g)$. Отже, існує функція вигляду $\sum_{j=1}^{m} \mu_j L_{t_j} \tilde{g}$ — опукла комбінація лівих зсувів функції $\tilde{g}$, яка наближає $\mathcal{I}(g) \cdot \mathbb{1}$:

$$\left\| \mathcal{I}(g) \cdot \mathbb{1} - \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \lambda_k \mu_j L_{t_j} L_{s_k} g \right\| < \varepsilon. \tag{4}$$

Але з (3) аналогічно тому, як це робилося вище в доведенні леми 3, легко вивести, що

$$\left\| \mathcal{I}(f) \cdot \mathbb{1} - \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \lambda_k \mu_j L_{t_j} L_{s_k} f \right\| < \varepsilon. \tag{5}$$

Додамо (4) і (5):

$$\left\| (\mathcal{I}(f) + \mathcal{I}(g)) \cdot \mathbb{1} - \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \lambda_k \mu_j L_{t_j s_k} (f+g) \right\| < 2\varepsilon.$$

Оскільки $\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \lambda_k \mu_j L_{t_j s_k} (f+g)$ — це опукла комбінація зсувів функції $f+g$, і з огляду на довільність ε остання умова означає, що $(\mathcal{I}(f) + \mathcal{I}(g)) \cdot \mathbb{1} \in c_L(f+g)$, тобто $\mathcal{I}(f+g) = \mathcal{I}(f) + \mathcal{I}(g)$.

Отже, ми довели існування і єдиність лівоінваріантного середнього, а з ним і лівої міри Гаара. Тепер зазначимо, що, за лемою 3, для будь-якого $f \in C(G)$ функція $\mathcal{I}(f) \cdot \mathbb{1}$ лежить не тільки в $c_L(f)$, але і в $c_R(f)$. Відповідно, $\mathcal{I}(R_t f) \cdot \mathbb{1} \in c_R(R_t f) \subset c_R(f)$. З тої самої леми 3 в $c_R(f)$ є тільки одна функція вигляду $a \cdot \mathbb{1}$. Отже, $\mathcal{I}(R_t f) = \mathcal{I}(f)$. Цим доведено правоінваріантність середнього $\mathcal{I}$ і породженої ним міри. Нарешті, функціонал $\tilde{\mathcal{I}}(f) = \mathcal{I}(\Psi f)$ також буде лівоінваріантним середнім, отже, з огляду на єдиність лівоінваріантного середнього $\mathcal{I}(f) = \mathcal{I}(\Psi f)$. Звідси випливає інваріантність міри Гаара відносно симетрії $s \mapsto s^{-1}$. □

Зауваження. Ліва і права міри Гаара існують не тільки на компактних, але і на локально компактних групах (див. [H-R, гл. 4]), проте в цьому випадку права і ліва міри Гаара можуть не збігатися, вже не будуть скінченними мірами, і доведення існування тут складніше, ніж в компактному випадку.

Вправи

1. У доведенні останньої теореми ми використовували як очевидний такий факт: нехай $u\colon G \to G$ гомеоморфізм компакту G, $U\colon C(G) \to C(G)$ — оператор, який діє за правилом $(Uf)(s) = f(u(s))$. Нехай елементарний інтеграл $\mathcal{I}$ інваріантний відносно U, тобто $\mathcal{I}(Uf) = \mathcal{I}(f)$ для всіх $f \in C(G)$. Тоді мера $\mu_{\mathcal{I}}$, породжена інтегралом $\mathcal{I}$, буде u-інваріантною: $\mu_{\mathcal{I}}(u(\Delta)) = \mu_{\mathcal{I}}(\Delta)$ для будь-якої борелевої $\Delta \subset G$. Доведіть цей факт, спираючись на правило заміни змінної в інтегралі Лебега (вправа 9 п. 7.2.7) і бієктивність відповідності $\mathcal{I} \mapsto \mu_{\mathcal{I}}$ між множиною всіх елементарних інтегралів і множиною всіх регулярних борелевих мір на компакті G.

2. Нехай G — скінченна група. Що є її мірою Гаара?

3. Нехай G — одиничне коло в $\mathbb{C}$ з операцією множення комплексних чисел. Чому дорівнює міра Гаара в цьому випадку?

4. Нехай K — метричний компакт. Тоді будь-яка ізометрія $u\colon K \to K$ бієктивна.

5. Нехай K — метричний компакт. Через $\Theta(K)$ позначимо множину всіх ізометрій $u\colon K \to K$, наділену операцією композиції. Доведіть, що в рівномірній метриці $\Theta(K)$ — компактна топологічна група.

6. Нехай K — метричний компакт, який має таку властивість: для будь-яких $x, y \in K$ існує ізометрія $u\colon K \to K$, яка переводить x в y. Тоді на K існує єдина регулярна борелева міра ν, інваріантна відносно всіх ізометрій компакта K. Для будь-якої точки $x_0 \in K$ ця міра пов'язана з мірою Гаара μ на $\Theta(K)$ співвідношенням $\nu(A) = \mu\{u \in \Theta(K) : u(x_0) \in A\}$.

7. Нехай S^2 — одинична сфера в тривимірному евклідовому просторі, λ — стандартна міра Лебега на S^2, A — вимірна множина з $\lambda(A) < \frac{1}{n}\lambda(S^2)$. Тоді для будь-якого набору $x_1, \ldots, x_n \in S^2$ з n точок можна знайти таку ізометрію $u\colon S^2 \to S^2$, щоб жодна з точок $x_1, \ldots, x_n$ не потрапила в $u(A)$.

Коментарі до вправ

15.1.1

Вправа 7. Існування і єдиність розв'язку випливає з теореми Банаха. Неперервність можна вивести з тієї ж теореми за допомогою такого прийому. Розглянемо простір $C(K, X)$ неперервних X-значних функцій на K з рівномірною метрикою. Означте стискальне відображення $G\colon C(K, X) \to C(K, X)$ формулою $[G(f)](t) = F(t, f(t))$. Нерухома точка f цього відображення буде неперервною функцією, яка задовольняє умову $F(t, f(t)) = f(t)$.

Вправа 8. Зведіть до попередньої вправи, взявши $K = [a, b]$, $X = \mathbb{R}$ і $F(t, x) = x - \frac{2}{m+M}\Phi(t, x)$.

15.1.2

Вправи 5 і 7. Нехай $P\colon \bar{B}_X \to S_X$ — ретракції. Тоді відображення $Q = -P$ не має нерухомих точок.

15.1.4

Вправи 4, 5. Функціонал F з вправи 6 породжує обмежену замкнену базу у випадку $L_1[0, 1]$. У випадку $L_2[0, 1]$ обмеженої замкненої бази у цього конуса немає. Відсутність компактної бази непрямо випливає із вправ 2 і 6.