3. Интеграл Лебега.

В теории меры и интеграла изучаются в первую очередь вещественнозначные функции. Чтобы избежать ненужных повторений, договоримся, если не оговорено противное, термин "функция" использовать для функций, принимающих вещественные значения. Скажем, если мы говорим "функция f на Ω", подразумеваться будет функция f, действующая из Ω в $\mathbb{R}$. Для функций же, область значений которых не лежит в $\mathbb{R}$, будем использовать термин "отображение".

Операции над функциями будут пониматься в поточечном смысле. Скажем, $f_1 + f_2$ – это функция, задаваемая на Ω равенством $(f_1 + f_2)(t) = f_1(t) + f_2(t)$, функция $\max\{f, g\}$ определяется как $\max\{f, g\}(t) = \max\{f(t), g(t)\}$, и т.д. Предел последовательности функций, сумма ряда также понимаются в поточечном смысле.

В этой главе (Ω, Σ) будет множеством с заданной на нём σ-алгеброй. Все функции будут, если не оговорено противное, считаться определёнными на Ω; элементы σ-алгебры Σ будут называться измеримыми подмножествами.

3.1. *Измеримые функции.*

Определение 1. Пусть (Ω_1, Σ_1) и (Ω_2, Σ_2) – множества с заданными на них σ-алгебрами подмножеств. Отображение $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ называется измеримым, если $f^{-1}(A) \in \Sigma_1$ для любого $A \in \Sigma_2$.

Как видно из определения, измеримые отображения играют такую же роль в теории меры, как непрерывные – в теории метрических пространств. Частный случай измеримого отображения – это измеримая функция:

Определение 2. Функция f на Ω называется *измеримой* (более подробно: *измеримой по отношению к σ-алгебре* Σ), если для любого борелевского подмножества A в $\mathbb{R}$ множество $f^{-1}(A)$ измеримо.

Теорема 1. Пусть (Ω_1, Σ_1) и (Ω_2, Σ_2) – множества с заданными на них σ-алгебрами подмножеств, Λ – семейство подмножеств в Ω_2, порождающее σ-алгебру Σ_2. Для того, чтобы отображение $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ было измеримым, необходимо и достаточно, чтобы для любого множества $A \in \Lambda$ его полный прообраз $f^{-1}(A)$ принадлежал σ-алгебре Σ_1.

Доказательство. Если отображение f измеримо, то прообраз любого $A \in \Sigma_2$ лежит в Σ_1. В частности, в Σ_1 лежат прообразы всех $A \in \Lambda$.

Обратно, пусть Σ_1 содержит все множества вида $f^{-1}(A)$ для $A \in \Lambda$. Нам нужно показать, что прообразы всех элементов системы Σ_2 лежат в Σ_1. Для этого определим следующее семейство Λ_1 подмножеств множества Ω_2: множество A служит элементом семейства Λ_1, если $f^{-1}(A) \in \Sigma_1$. Легко видеть, что Λ_1 образует σ-алгебру множеств и содержит все элементы семейства Λ. Поскольку Σ_2 – это наименьшая σ-алгебра множеств, содержащая Λ, отсюда следует, что $\Sigma_2 \subset \Lambda_1$, что и требовалось доказать. □

Пусть $f:\Omega\to\mathbb{R}$ – некоторая функция, $a\in\mathbb{R}$. Обозначим $f^{-1}((a,+\infty))$ через $f_{>a}$. то есть, $f_{>a}$ – это множество тех $t\in\Omega$, где $f(t)>a$. Поскольку (см. п. 2.2) множества вида $(a,+\infty)$, $a\in\mathbb{R}$ в совокупности порождают σ-алгебру $\mathfrak{B}$ борелевских множеств на оси, получаем следующий удобный критерий измеримости:

Следствие 1. Функция $f:\Omega\to\mathbb{R}$ измерима в том и только том случае, если все множества $f_{>a}$, $a\in\mathbb{R}$, измеримы. □

Следствие 2. Пусть (Ω,Σ), (Ω_1,Σ_1) и (Ω_2,Σ_2) – множества с заданными на них σ-алгебрами подмножеств. Наделим, как обычно, декартово произведение $\Omega_1\times\Omega_2$ σ-алгеброй $\Sigma_1\otimes\Sigma_2$ (см. п. 2.3). Тогда для любых измеримых отображений $f_1:\Omega\to\Omega_2$ и $f_2:\Omega\to\Omega_2$ отображение $f:\Omega\to\Omega_1\times\Omega_2$, действующее по правилу $f(t)=(f_1(t),f_2(t))$, также измеримо.

Доказательство. По определению, σ-алгебра $\Sigma_1\otimes\Sigma_2$ порождена множествами вида $A_1\times A_2$, где $A_1\in\Sigma_1$, $A_2\in\Sigma_2$. Имеем $f^{-1}(A_1\times A_2)=f_1^{-1}(A_1)\bigcap f_2^{-1}(A_2)\in\Sigma$. □

Взяв в качестве Ω метрическое пространство, а в качестве Σ – σ-алгебру $\mathfrak{B}$ борелевских множеств на Ω, получаем частный случай измеримости – измеримость по Борелю:

Определение 3. Функция f на метрическом пространстве Ω называется *измеримой по Борелю*, если прообраз $f^{-1}(A)$ любого борелевского множества A вещественной оси снова является борелевским множеством.

В качестве примера измеримой по Борелю функции можно взять любую непрерывную функцию. Действительно, для непрерывной функции f все множества $f_{>a}$ открыты, а значит, принадлежат σ-алгебре $\mathfrak{B}$ борелевских множеств, то есть, выполнен вышеприведенный критерий измеримости.

Для произвольного множества $A\in\Sigma$ можно рассмотреть σ-алгебру Σ_A всех измеримых подмножеств множества A. Если ограничение функции f на подмножество A измеримо по отношению к σ-алгебре Σ_A, то функцию называют *измеримой на подмножестве* A.

Упражнения.

1. Если функция f измерима, то для любого $a\in\mathbb{R}$ измеримы множества $f_{\neq a}=\{t\in\Omega: f(t)\neq a\}$, $f_{=a}=\{t\in\Omega: f(t)=a\}$, $f_{\le a}=\{t\in\Omega: f(t)\le a\}$, $f_{<a}=\{t\in\Omega: f(t)<a\}$ и $f_{\ge a}=\{t\in\Omega: f(t)\ge a\}$.
2. Пусть f – измеримая по Борелю функции на отрезке $[a,b]$. Тогда множество точек максимума функции f – борелевское множество.
3. Множество точек локального максимума борелевской функции на оси – борелевское множество.
4. Пусть (Ω_1,Σ_1) и (Ω_2,Σ_2) – множества с заданными на них σ-алгебрами подмножеств, и $\Omega_1\times\Omega_2$ наделено σ-алгеброй $\Sigma_1\otimes\Sigma_2$. Докажите измеримость коор-

динатных проекторов P_1 и P_2, ставящих элементу $(t_1, t_2) \in \Omega_1 \times \Omega_2$ координаты t_1 и t_2 соответственно.

5. Докажите утверждение, обратное к следствию 2: если отображение $f : \Omega \to \Omega_1 \times \Omega_2$, $f(t) = \left(f_1(t), f_2(t)\right)$ измеримо, то отображения f_1 и f_2 также измеримы.
6. Приведите пример разрывной измеримой по Борелю функции на $\mathbb{R}$.
7. Любая монотонная функция на оси измерима по Борелю.
8. Пусть f – измеримая функция на Ω. Докажите, что $|f|$, $sign\, f$, f^+ и f^- – измеримые функции.
9. Если функция f измерима, то λf измерима для любого $\lambda \in \mathbb{R}$.
10. Пусть f – измеримая функция на Ω. Тогда f измерима на каждом подмножестве $A \in \Sigma$.
11. Пусть Ω представлено в виде объединения своих измеримых подмножеств A и B; функция $f : \Omega \to \mathbb{R}$ измерима как на A, так и на B. Тогда f измерима на Ω.
12. Приведите пример биективного измеримого отображения $f : \Omega_1 \to \Omega_2$, обратное к которому неизмеримо.
13. Пусть $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция, A – открытое множество в $\mathbb{R}$. Тогда $g(A)$ – борелевское множество. Более того, $g(A)$ – множество класса F_σ.

3.2. Элементарные свойства измеримых функций.

Теорема 1. Пусть (Ω_1, Σ_1), (Ω_2, Σ_2) и (Ω_3, Σ_3) – множества с заданными на них σ-алгебрами подмножеств, отображения $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ и $g : \Omega_2 \to \Omega_3$ измеримы. Тогда композиция $g \circ f : \Omega_1 \to \Omega_3$ также будет измеримым отображением.

Доказательство. Пусть $A \in \Sigma_3$. Тогда $g^{-1}(A) \in \Sigma_2$, и, следовательно, $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}\left(g^{-1}(A)\right) \in \Sigma_1$. □

Следствия.

1. Пусть функция $f : \Omega \to \mathbb{R}$ измерима, а $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ измерима по Борелю. Тогда композиция $g \circ f$ этих функций также измерима.
2. В частности, если $f : \Omega \to \mathbb{R}$ измерима, а $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна, то $g \circ f$ измерима.
3. Пусть функции $f_1, f_2 : \Omega \to \mathbb{R}$ измеримы, а функция двух переменных $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ непрерывна. Тогда функция $f(t) = g(f_1(t), f_2(t))$ измерима.

Доказательство. В доказательстве нуждается только третий пункт. Рассмотрим плоскость $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, наделённую σ-алгеброй борелевских множеств, или, что то же самое, произведением σ-алгебр борелевских множеств на оси. Согласно следствию 2 предыдущего параграфа, отображение $F : \Omega \to \mathbb{R}^2$, действующее по правилу $F(t) = \left(f_1(t), f_2(t)\right)$, измеримо. Остаётся заметить, что $f = g \circ F$ и применить последнюю теорему. □

Теорема 2. Класс измеримых функций на (Ω, Σ) обладает следующими свойствами: если функции f и g измеримы, то измеримы функции $f + g$, fg, $\max\{f, g\}$ и $\min\{f, g\}$. Также будут измеримы функции $|f|$, $\operatorname{sign} f$, $f^+ = \max\{f, 0\}$,

$f^{-}=(-f)^{+}$ и λf при любом $\lambda\in\mathbb{R}$. Если f нигде не обращается в ноль, то измерима функция $\frac{1}{f}$.

Доказательство. Функции двух переменных $g_1(x,y)=x+y$, $g_2(x,y)=xy$ непрерывны, равно как и функции $\max\{x,y\}$ и $\min\{x,y\}$. Согласно пункту 3 только что доказанного следствия, это даёт измеримость функций $f+g$, fg, $\max\{f,g\}$ и $\min\{f,g\}$. Непрерывность функций $|t|$, t^{+}, t^{-} и λt в совокупности с п. 2 предыдущего следствия обеспечивают измеримость $|f|$, f^{+}, f^{-} и λf. Измеримость функции $\operatorname{sign} f$ следует из п. 1 того же следствия и измеримости по Борелю функции $\operatorname{sign} t$. Наконец, если f нигде не обращается в ноль, то $\frac{1}{f}$ представима как композиция измеримой функции $f:\Omega\to\mathbb{R}\setminus\{0\}$ (где $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ наделено σ-алгеброй борелевских множеств) и непрерывной, а, следовательно, и измеримой по Борелю функции $\frac{1}{t}:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$. □

Теорема 3. Пусть последовательность f_n измеримых функций сходится поточечно к функции f, то есть $\forall t\in\Omega$ $f_n(t)\xrightarrow[n\to\infty]{}f(t)$. Тогда f – измеримая функция.

Доказательство. Зафиксируем число $a\in\mathbb{R}$. Значение функции f в точке $t\in\Omega$ будет больше чем a в том и только том случае, если существуют такое рациональное число $r\in\mathbb{Q}$ и такой номер $n\in\mathbb{N}$, что для любого $m>n$ выполнено неравенство $f_m(t)>a+r$. Переведя это утверждение на язык теории множеств, получаем, что $f_{>a}=\bigcup_{r\in\mathbb{Q}}\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n+1}^{\infty}(f_m)_{>a+r}\in\Sigma$. □

Применив последнюю теорему к последовательности частных сумм ряда, получаем

Следствие. Если ряд из измеримых функций сходится поточечно, то его сумма – измеримая функция. □

Упражнения.

1. Докажите напрямую, что если функции f и g измеримы, то при любом $a\in\mathbb{R}$ множество $(f+g)_{>a}$ принадлежит Σ. Согласно критерию из предыдущего параграфа, этим будет дано другое доказательство измеримости суммы двух измеримых функций.
2. Запишите выражения для множеств $(\max\{f,g\})_{>a}$ и $(\min\{f,g\})_{>a}$ через аналогичные множества для функций f и g.
3. Если функции f и g измеримы, то измеримы множества тех $t\in\Omega$, где $f=g$, $f\neq g$, $f>g$ и $f<g$.

4. Пусть f_n – поточечно ограниченная последовательность измеримых функций. Тогда измеримы также функции $f = \sup\limits_n f_n$ и $g = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} f_n$.

5. Отождествим поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел стандартным образом с плоскостью $\mathbb{R}^2$ и наделим $\mathbb{C}$ σ-алгеброй $\mathfrak{B}^2$ борелевских подмножеств плоскости. Измеримое отображение $f:\Omega\to\mathbb{C}$ будем называть *измеримой комплекснозначной функцией*. Докажите, что отображение $f:\Omega\to\mathbb{C}$ измеримо в том и только том случае, если измеримы вещественнозначные функции $\operatorname{Re} f$ и $\operatorname{Im} f$.

6. Докажите следующие свойства комплекснозначных измеримых функций:
   (1) если функции f и g измеримы, то функция $f+g$ также измерима;
   (2) λf измерима для любого $\lambda\in\mathbb{C}$;
   (3) если функции f и g измеримы, то и их произведение fg измеримо;
   (4) если функция f измерима, то $|f|$ – это измеримая вещественнозначная функция.

3.3. Характеристическая функция множества.

Пусть A – подмножество выделенного множества Ω. *Характеристической функцией* множества A называется функция $\mathbf{1}_A$ на Ω, равная 1 на A и нулю вне множества A. Другие принятые в литературе обозначения для характеристической функции множества A – это χ_A и I_A. Последнее обозначение чаще всего используется в теории вероятностей, где характеристическая функция множества называется *индикатором* множества, а термин " характеристическая функция " используется для совсем другого объекта. Конечно, было бы разумным в обозначении для характеристической функции как-то учитывать не только множество A, но и Ω. Скажем, одно и то же множество A вещественных чисел в одной ситуации может рассматриваться как подмножество отрезка, а в другой – оси. В первом случае $\mathbf{1}_A$ будет определена на отрезке, во втором – на оси, а символ для обозначения используется один и тот же. Это небольшое несогласование обычно не вызывает неудобств: здесь, как и во многих других случаях, функцию, определённую на подмножестве, по умолчанию доопределяют на более широкое множество нулём.

Перечисленными в нижеприведенных упражнениях 1 - 5 свойствами мы будем пользоваться. Поэтому настоятельно рекомендуем читателю обратить на эти упражнения внимание.

Упражнения.

1. Пусть (Ω,Σ) – множество с заданной на нём σ-алгеброй, $A\subset\Omega$. Функция $\mathbf{1}_A$ будет измеримой в том и только том случае, если измеримо множество A.
2. $\mathbf{1}_{A\cup B} = \max\{\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B\}$.
3. $\mathbf{1}_{A\cap B} = \min\{\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B\} = \mathbf{1}_A\cdot\mathbf{1}_B$.
4. Если множества A и B не пересекаются, то $\mathbf{1}_{A\cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B$.
5. Пусть $A = \coprod\limits_1^\infty A_n$. Тогда $\mathbf{1}_A = \sum\limits_1^\infty \mathbf{1}_{A_n}$.

6. Пусть A_n – некоторая последовательность множеств. Тогда $\overline{\lim_{n\to\infty}} \mathbf{1}_{A_n}$ – это характеристическая функция некоторого множества A, называемого *верхним пределом последовательности множеств* A_n. Найдите выражение множества A через A_n с помощью обычных операций объединения и пересечения множеств.

3.4. Простые функции. Лебеговская аппроксимация измеримой функции простыми.

Пусть (Ω, Σ) – множество с заданной на нём σ-алгеброй. Функция f на Ω называется *простой функцией*, если она представима в виде $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathbf{1}_{A_n}$, где $A_n \in \Sigma$ – дизъюнктная последовательность множеств, а a_n – числа. Ввиду дизъюнктности множеств A_n, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathbf{1}_{A_n}$ не просто сходится поточечно, а, более того, для любого $t \in \Omega$ все слагаемые указанного ряда равны нулю, за исключением быть может одного (с тем номером n, для которого $t \in A_n$). На каждом из множеств A_n функция f равна константе a_n, и $f(t) = 0$ за пределами объединения всех A_n. Простые функции ещё называют *счётнозначными функциями*, или, более подробно, *счётнозначными измеримыми функциями*. Обоснованием этого термина служит следующее утверждение:

Теорема 1. Функция f будет простой функцией в том и только том случае, если f измерима, и множество всех её значений не более чем счётно.

Доказательство. Измеримость простой функции $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathbf{1}_{A_n}$ можно проверить непосредственно (прообраз любого множества будет конечным или счётным объединением каких-то из A_n), а можно сослаться на измеримость суммы ряда измеримых функций. Далее, $f(\Omega) \subset \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \cup \{0\}$, откуда вытекает не более чем счётность множества всех значений функции. Обратно, пусть f измерима, и множество M всех её значений не более чем счётно. Тогда для любого $t \in M$ множество $f^{-1}(t)$ измеримо, и $f = \sum_{t \in M} t \mathbf{1}_{f^{-1}(t)}$. □

Если множество значений простой функции конечно, функция называется *конечнозначной функцией.*

Теорема 2. Классы конечнозначных и счётнозначных функций устойчивы по отношению к операциям суммы, произведения, взятия максимума и минимума двух функций.

Доказательство. То, что эти операции сохраняют измеримость, нам уже известно. Теперь пусть f и g – две функции на Ω, M и N – их множества значений. Если M и N конечны, то множества $M + N = \{t + r : t \in M, r \in N\}$ и $M \cdot N = \{t \cdot r : t \in M, r \in N\}$ конечны, если счётны – то счётны. Утверждение теоремы следует из того, что образы функций $f + g$, fg, $\max\{f, g\}$ и $\min\{f, g\}$ лежат в $M + N$, $M \cdot N$, $M \cup N$ и $M \cup N$ соответственно. □

Измеримые функции могут быть устроены довольно сложно. Поэтому для облегчения исследования их структуры используют приближение измеримой функции простыми.

Теорема 3. Пусть f – измеримая функция на Ω. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует простая функция $f_\varepsilon \le f$, во всех точках отличающаяся от f не больше чем на ε. При этом, если $f \ge 0$, то f_ε может быть также выбрана неотрицательной, а если f ограничена, то в качестве f_ε может быть выбрана конечнозначная функция.

Доказательство. Для любого целого n определим числа $t_n = n\varepsilon$ и отрезки $\Delta_n = [t_n, t_{n+1})$. Через A_n обозначим $f^{-1}(\Delta_n)$. Какие-то из A_n могут быть и пустыми. В частности, если $f \ge 0$, то пустыми будут все A_n с номерами, меньшими нуля. Если же f ограничена по модулю некой константой C, то все A_n с $|n| > \dfrac{C}{\varepsilon} + 1$ будут пустыми. Множества A_n попарно не пересекаются, в объединении дают всё множество Ω, и на A_n значения функции f подчиняются неравенству $t_n \le f(t) < t_{n+1}$. Функцию f_ε определим так, чтобы на A_n она равнялась соответствующему t_n: $f_\varepsilon = \sum\limits_{n=1}^{\infty} t_n \mathbf{1}_{A_n}$.

Такая функция будет подчиняться всем условиям теоремы. Так, на каждом из A_n выполнена оценка $t_n = f_\varepsilon(t) \le f(t) < t_{n+1}$, то есть $f(t) - \varepsilon < f_\varepsilon(t) \le f(t)$ в каждой точке $t \in \Omega$. Если $f \ge 0$, то функция f_ε не будет принимать отрицательных значений t_n: множества A_n, соответствующие отрицательным t_n, будут пустыми. Если же f ограничена, то пустыми будут все A_n, за исключением конечного числа, и f_ε будет конечнозначной. □

Следствие 1. Для любой измеримой функции f существует неубывающая последовательность $f_1 \le f_2 \le ...$ простых функций, равномерно сходящаяся к f. При этом, если f неотрицательна (ограничена), то f_n могут быть выбраны неотрицательными (конечнозначными).

Доказательство. Воспользуемся предыдущей теоремой и выберем простую функцию f_1 так, чтобы она подчинялась условию $0 \le f - f_1 \le 1$. Функция $f - f_1$ будет измеримой неотрицательной функцией, и по предыдущей теореме существует неотрицательная простая функция g_1, удовлетворяющая неравенствам $0 \le f - f_1 - g_1 \le \dfrac{1}{2}$. Положим $f_2 = f_1 + g_1$. Имеем $f_1 \le f_2$ и $0 \le f - f_2 \le \dfrac{1}{2}$. Функция $f - f_2$ снова будет измеримой неотрицательной функцией, и снова её можно приблизить некоторой простой функцией g_2: $0 \le f - f_2 - g_2 \le \dfrac{1}{3}$. Функцию f_3 определим как $f_2 + g_2$. Продолжив этот процесс, получим возрастающую последовательность простых функций с условием $0 \le f - f_n \le \frac{1}{n}$, обеспечивающим равномерную сходимость. Удовлетворить дополнительные требования неотрицательности или конечнозначности, указанные в формулировке следствия, также не представляет труда. □

Упражнения.

1. Функция f_ε из формулировки теоремы 3 может быть выбрана так, что $f_\varepsilon(\Omega) \subset f(\Omega)$.
2. Пусть X – метрическое пространство, наделённое σ-алгеброй борелевских множеств, $f : \Omega \to X$ – измеримое отображение. Тогда следующие условия эквивалентны:
   - для любого $\varepsilon > 0$ существует счётнозначное измеримое отображение $f_\varepsilon : \Omega \to X$ с $\rho(f(t), f_\varepsilon(t)) \le \varepsilon$ во всех $t \in \Omega$;
   - множество $f(\Omega)$ сепарабельно.
3. В условиях предыдущего упражнения эквивалентны следующие условия:
   - для любого $\varepsilon > 0$ существует конечнозначное измеримое отображение $f_\varepsilon : \Omega \to X$ с $\rho(f(t), f_\varepsilon(t)) \le \varepsilon$ во всех $t \in \Omega$;
   - множество $f(\Omega)$ – предкомпакт.
4. Отображение f_ε в предыдущих двух упражнениях может быть выбрано удовлетворяющим условию $f_\varepsilon(\Omega) \subset f(\Omega)$.

3.5. Определение интеграла Лебега для счётнозначных функций.

Начиная с этого места и до конца главы (Ω, Σ, μ) будет неким фиксированным пространством с конечной мерой, функции f, f_n и все остальные функции, если не оговорено противное, будут по умолчанию считаться определенными на Ω, измеримыми и принимающими вещественные значения. Рассматриваемые подмножества множества Ω будут по умолчанию считаться элементами σ-алгебры Σ.

Пусть $A \in \Sigma$, f – счётнозначная измеримая функция, M – множество всех значений функции. Тогда, как мы знаем, f можно записать в виде $f = \sum_{t \in M} t \mathbf{1}_{f^{-1}(t)}$. Такая функция f называется *интегрируемой (по Лебегу) на* A, если $\sum_{t \in M} |t| \mu\left(f^{-1}(t) \cap A\right) < \infty$. В этом случае *интегралом (Лебега) функции* f *по множеству* A называется величина $\int_A f d\mu = \sum_{t \in M} t \mu\left(f^{-1}(t) \cap A\right)$.

Пример 1. Пусть f – счётнозначная функция, и $f \equiv a$ на A. В этом случае $f^{-1}(t) \cap A \ne \varnothing$ только при $t = a$, и суммы в вышеприведенных определениях вырождаются в одно слагаемое:

$$\sum_{t \in M} |t| \mu\left(f^{-1}(t) \cap A\right) = |a| \mu(A), \quad \int_A f d\mu = \sum_{t \in M} t \mu\left(f^{-1}(t) \cap A\right) = a \mu(A).$$

Из этого примера получаем *правило интегрирования постоянной*: $\int\limits_A a d\mu = a\mu(A)$.

Во всех приводимых ниже доказательствах через M обозначается множество значений функции f.

Теорема 1. Если счётнозначная функция f интегрируема на A, то она интегрируема и на любом подмножестве $B \subset A$.

Доказательство. $\sum\limits_{t\in M} |t| \mu\left(f^{-1}(t) \cap B\right) \le \sum\limits_{t\in M} |t| \mu\left(f^{-1}(t) \cap A\right) < \infty$. □

Теорема 2 (счётная аддитивность интеграла как функции множества). Пусть $\{A_k\}_1^\infty$ – разбиение множества $A \in \Sigma$ на измеримые подмножества, f – счётнозначная функция, интегрируемая на A. Тогда $\int\limits_A f d\mu = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_{A_k} f d\mu$, причём ряд в правой части сходится абсолютно.

Доказательство. Имеем $\int\limits_A f d\mu = \sum\limits_{t\in M} t\mu\left(f^{-1}(t) \cap A\right) = \sum\limits_{t\in M} t \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu\left(f^{-1}(t) \cap A_k\right)$. Так как последний двойной ряд сходится абсолютно: $\sum\limits_{t\in M} |t| \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu\left(f^{-1}(t) \cap A_k\right) \le \sum\limits_{t\in M} |t| \mu\left(f^{-1}(t) \cap A\right) < \infty$, его слагаемые можно перегруппировать: $\int\limits_A f d\mu = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \sum\limits_{t\in M} t\mu\left(f^{-1}(t) \cap A_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_{A_k} f d\mu$, причём последний ряд также будет абсолютно сходящимся. □

Следующая теорема даёт более гибкое эквивалентное определение интеграла счётнозначной функции.

Теорема 3. Пусть $\{A_k\}_1^\infty$ – разбиение множества $A \in \Sigma$ на измеримые подмножества, а счётнозначная функция f равна $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \mathbf{1}_{A_n}$ на множестве A. Тогда для интегрируемости на A функции f необходимо и достаточно выполнения условия $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| \mu(A_n) < \infty$, причём $\int\limits_A f d\mu = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \mu(A_n)$.

Доказательство. Если f интегрируема, то по теореме 2 $\int\limits_A f d\mu = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_{A_k} f d\mu = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \mu(A_n)$, причём ряд в правой части сходится абсолютно. Обратно, если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| \mu(A_n) < \infty$, то мы, обозначив $M_t = \{n \in \mathbb{N} : a_n = t\}$, можем сгруппировать в последней сумме слагаемые с одинаковыми a_n:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\mu(A_n)=\sum_{t\in M}\sum_{n\in M_t}|a_n|\mu(A_n)=\sum_{t\in M}|t|\sum_{n\in M_t}\mu(A_n)=\sum_{t\in M}|t|\mu\left(f^{-1}(t)\cap A\right).$$

Интегрируемость функции доказана. □

Следствие 1. Если $\mu(A)=0$, то любая счётнозначная функция f интегрируема на A, и $\int\limits_A fd\mu=0$. □

Теорема 4 (линейность интеграла). Если счётнозначные функции f и g интегрируемы на A, то для любых $a,b\in\mathbb{R}$ интегрируема функция $af+bg$, и $\int\limits_A(af+bg)d\mu=a\int\limits_A fd\mu+b\int\limits_A gd\mu$.

Доказательство. Пусть $\{A_k\}_1^{\infty}$ – такое разбиение множества A, что обе функции f и g на каждом из A_k постоянны. Тогда рассматриваемые функции можно записать в виде $f=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\mathbf{1}_{A_n}$, $g=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\mathbf{1}_{A_n}$, $af+bg=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(aa_n+bb_n)\mathbf{1}_{A_n}$. Для завершения доказательства остаётся применить предыдущую теорему. □

Теорема 5. Пусть $\{A_k\}_1^{\infty}$ – разбиение множества $A\in\Sigma$ на измеримые подмножества, $f=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\mathbf{1}_{A_n}$ – счётнозначная функция. Тогда функция $|f|$ интегрируема на A в том и только том случае, если исходная функция f интегрируема на A.

Доказательство. Ввиду равенства $|f|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|\mathbf{1}_{A_n}$ данное утверждение – это простое следствие теоремы 3. □

Теорема 6. Пусть $\{A_k\}_1^{\infty}$ – разбиение множества $A\in\Sigma$ на измеримые подмножества, f – счётнозначная функция, интегрируемая на каждом из A_k, и $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\int\limits_{A_k}|f|d\mu<\infty$. Тогда f интегрируема на A.

Доказательство. Пусть множества $B_{k,j}$, $j\in\mathbb{N}$ дают разбиение A_k на участки постоянства функции f. Тогда f записывается в виде $f=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty}b_{k,j}\mathbf{1}_{B_{k,j}}$. Воспользуемся критерием интегрируемости из теоремы 3: $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty}|b_{k,j}|\mu\left(B_{k,j}\right)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\int\limits_{A_k}|f|d\mu<\infty$. □

Теорема 7 (оценки интеграла).

– Если интегрируемая счётнозначная функция f больше или равна нуля на множестве A, то $\int_A f d\mu \geq 0$.

– Если $f \geq g$ на множестве A, счётнозначные функции f и g интегрируемы на A, то $\int_A f d\mu \geq \int_A g d\mu$.

– Пусть $f : A \to \mathbb{R}$ – интегрируемая функция, $a \in \mathbb{R}$ и $f \leq a$ на A. Тогда $\int_A f d\mu \leq a\mu(A)$. Аналогично, если $f \geq b$, то $\int_A f d\mu \geq b\mu(A)$.

Доказательство. Первое свойство сразу следует из определения (или из теоремы 3). Докажем второе свойство. Если $f \geq g$, то $f - g \geq 0$, поэтому $\int_A (f-g) d\mu \geq 0$, следовательно $\int_A f d\mu - \int_A g d\mu \geq 0$. Последнее свойство вытекает из второго и формулы для интеграла от постоянной. □

3.6. Определение интеграла Лебега в общем случае.

Измеримая функция $f : A \to \mathbb{R}$ называется *интегрируемой по Лебегу,* если существует последовательность счётнозначных интегрируемых на A функций, равномерно сходящаяся на A к f. Другими словами, функция f интегрируема, если для любого $\varepsilon > 0$ существует счётнозначная интегрируемая функция g, приближающая f с точностью до ε во всех точках множества A.

Теорема 1. Пусть $f : A \to \mathbb{R}$ – интегрируемая функция. Тогда для любой последовательности f_n счётнозначных интегрируемых на A функций, равномерно сходящейся на A к f, существует $\lim\limits_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu$, причём этот предел не зависит от выбора последовательности f_n.

Доказательство. Ввиду равномерной сходимости существует такая последовательность $a_n > 0$, $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, что $|f(t) - f_n(t)| < a_n$ при всех $t \in A$. Тогда всюду на A имеем $|f_m(t) - f_n(t)| \leq |f_m(t) - f(t)| + |f(t) - f_n(t)| < a_m + a_n$. Соответственно, $\left| \int_A f_m d\mu - \int_A f_n d\mu \right| = \left| \int_A (f_m - f_n) d\mu \right| < a_m + a_n \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$, то есть интегралы функций f_n образуют последовательность Коши и, следовательно, сходятся к какому-то числу. Теперь, если бы существовала какая-то последовательность счётнозначных интегрируемых функций g_n, равномерно сходящейся на A к f, для которой $\lim\limits_{n\to\infty} \int_A g_n d\mu = b \neq a$, то последовательность функций $f_1, g_1, f_2, g_2, \ldots$ по-прежнему равномерно сходилась бы к f, но интегралы этих функций, вопреки доказанному, не имели бы предела. □

Предел, существование которого доказано в предыдущей теореме, называется *интегралом Лебега* функции f и обозначается $\int\limits_A f d\mu$.

Перейдём к перенесению на общий случай свойств интеграла Лебега, доказанных в предыдущем параграфе для счётнозначных функций.

Теорема 2. Если функция f интегрируема на A, то она интегрируема и на любом подмножестве $B \subset A$.

Доказательство. Если f_n из определения интегрируемости равномерно сходятся к f на A, то они тем более равномерно сходятся к f на B. □

Теорема 3. Если функции f и g интегрируемы на A, то для любых $a, b \in \mathbb{R}$ интегрируема функция $af + bg$, и $\int\limits_A (af + bg) d\mu = a \int\limits_A f d\mu + b \int\limits_A g d\mu$.

Доказательство. Пусть последовательности f_n, g_n счётнозначных интегрируемых на A функций, равномерно сходятся на A к f и g соответственно. Тогда $af_n + bg_n$ равномерно сходится к $af + bg$ и по определению интеграла

$$\int\limits_A (af + bg) d\mu = \lim_{n \to \infty} \int\limits_A (af_n + bg_n) d\mu = a \int\limits_A f d\mu + b \int\limits_A g d\mu. \ \square$$

Теорема 4. Пусть $f : A \to \mathbb{R}$ – интегрируемая функция. Тогда $|f|$ также интегрируем.

Доказательство. Если f_n из определения интегрируемости равномерно сходятся к f на A, то $|f_n|$ равномерно сходятся к $|f|$. □

Следствие 1. Пусть $f : A \to \mathbb{R}$ – интегрируемая функция. Тогда функции f^+ и f^- также интегрируемы.

Доказательство. Напомним, что, по определению, $f^+(t)$ совпадает с $f(t)$ для тех t, где $f(t) > 0$; для тех же t, где $f(t) \le 0$, $f^+(t) = 0$. Аналогично, $f^-(t) = |f(t)|$ в точках, где $f(t) \le 0$, в остальных же точках $f^-(t) = 0$. Ввиду равенств $f^+ = \frac{1}{2}\left(f + |f|\right)$ и $f^- = \frac{1}{2}\left(|f| - f\right)$ требуемое утверждение следует из предыдущей теоремы и уже отмеченных свойств интеграла. □

Следствие 2. Пусть f и g – две интегрируемые функции. Тогда функции $\max\{f, g\}$ и $\min\{f, g\}$ тоже интегрируемы.

Доказательство. Непосредственно вытекает из формул $\max\{f, g\} = \frac{1}{2}\left(f + g + |f - g|\right)$ и $\min\{f, g\} = \frac{1}{2}\left(f + g - |f - g|\right)$. □

Теорема 5 (оценки интеграла).

1. Если $f \ge 0$ на множестве A и функция f интегрируема, то $\int\limits_A f d\mu \ge 0$.

2. Если $f \geq g$ на множестве A, f и g интегрируемы на A, то $\int\limits_A f d\mu \geq \int\limits_A g d\mu$.

3. Для любой интегрируемой функции $\left| \int\limits_A f d\mu \right| \leq \int\limits_A |f| d\mu$.

Доказательство. 1. Пусть последовательность f_n счётнозначных интегрируемых на A функций, равномерно сходится на A к f, то есть существует такая последовательность $a_n > 0$, $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, что $|f(t) - f_n(t)| < a_n$ на A. Тогда $a_n + f_n > f \geq 0$, причём $a_n + f_n$ по-прежнему сходятся к f. Но интегралы от $a_n + f_n$ неотрицательны, следовательно и их предел $\int\limits_A f d\mu$ также неотрицателен.

Пункт 2. выводится из 1. так же, как в теореме 7 предыдущего параграфа. Перейдём к оценке 3: $-|f(t)| \leq f(t) \leq |f(t)|$. Проинтегрировав это неравенство по множеству A, получим, что $-\int\limits_A |f| d\mu \leq \int\limits_A f d\mu \leq \int\limits_A |f| d\mu$. □

Следующая простая оценка оказывается весьма полезной при работе с интегралом Лебега.

Теорема 6 (неравенство Чебышева). Пусть $a > 0$ – некоторая константа, g – интегрируемая функция на A, $g \geq 0$, $B \subset A$ – такое измеримое подмножество, что $g(t) \geq a$ для любого $t \in B$. Тогда $\mu(B) \leq \frac{1}{a}\int\limits_A g d\mu$.

Доказательство. $\int\limits_A g d\mu \geq \int\limits_B g d\mu \geq \int\limits_B a d\mu = a\mu(B)$.□

Теорема 7. Если $\mu(A) = 0$, то любая измеримая функция f интегрируема на A, и $\int\limits_A f d\mu = 0$.

Доказательство. По теореме об аппроксимации (следствие 1 п. 3.4), существует последовательность f_n простых функций, равномерно сходящаяся к f. По следствию 1 п. 3.5, все f_n будут интегрируемы на A и будут иметь нулевые интегралы. □

Упражнения.

1. Пусть Σ – σ-алгебра измеримых по Лебегу подмножеств отрезка $[a,b]$, λ – мера Лебега на отрезке, $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция. Докажите, что функция f будет интегрируема по Лебегу на $[a,b]$, и $\int\limits_{[a,b]} f d\lambda$ совпадает с интегралом Римана.
2. Пусть $A \subset [a,b]$ – плотное на отрезке множество лебеговской меры ноль. Докажите, что функция $\mathbf{1}_A$ не интегрируема по Риману, но интегрируема по Лебегу на $[a,b]$. Чему равен $\int\limits_{[a,b]} \mathbf{1}_A d\lambda$?

3. Докажите, что функция $f(x)=\dfrac{1}{x}$ неинтегрируема по мере Лебега на отрезке $(0,1]$.
4. Пусть $\int\limits_A |f| d\mu = 0$. Тогда на множестве A функция f почти всюду равна нулю (воспользоваться неравенством Чебышева).
5. Пусть μ – мера на $\mathbb{N}$, описанная в упражнении 5 п. 2.4. Тогда функция $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ интегрируема на $\mathbb{N}$ по мере μ в том и только том случае, если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)b_n$ абсолютно сходится. В этом случае $\int\limits_{\mathbb{N}} f d\mu = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)b_n$.

3.7. Интеграл как функция множества.

Теорема 1. Пусть функция f принимает на A только неотрицательные значения, $\{A_k\}_1^{\infty}$ – некоторое разбиение множества A на измеримые подмножества. Пусть, далее, на каждом из A_k функция f интегрируема и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\int\limits_{A_k} f d\mu$ сходится. Тогда f интегрируема на всём множестве A и $\int\limits_A f d\mu = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\int\limits_{A_k} f d\mu$.

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon>0$, воспользуемся интегрируемостью функции f на A_k и выберем такие счётнозначные интегрируемые функции g_k на соответствующих A_k, $k=1,2,3,...$, что $|f(t)-g_k(t)|<\varepsilon$ на A_k. Определим счётнозначную функцию g таким образом, чтобы на каждом из A_k функция равнялась g_k. Так как $\int\limits_{A_k}|g|d\mu = \int\limits_{A_k}|g_k|d\mu \le \int\limits_{A_k} f d\mu + \varepsilon\mu(A_k)$, то $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\int\limits_{A_k}|g|d\mu<\infty$ и по теореме 6 п. 3.5 функция g интегрируема. Мы получили, что для любого $\varepsilon>0$ существует счётнозначная интегрируемая функция g, приближающая f с точностью до ε. Этим доказана интегрируемость функции f. Далее, учитывая, что $\int\limits_A g d\mu = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\int\limits_{A_k} g d\mu$ (снова теорема 6 п. 3.5), имеем

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{A_k} f d\mu - \int\limits_A f d\mu\right| \le \sum_{k=1}^{\infty}\left|\int\limits_{A_k}(f-g)d\mu\right| + \left|\int\limits_A (f-g)d\mu\right| < \sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon\mu(A_k)+\varepsilon\mu(A) = 2\varepsilon\mu(A).$$

Устремляя ε к нулю, получаем требуемое утверждение. □

Следствие 1. Пусть $\{A_k\}_1^N$ – некоторое разбиение множества A на измеримые подмножества. Пусть, далее, функция $f \geq 0$ на A и интегрируема на каждом из A_k. Тогда f интегрируема на всём множестве A и $\int\limits_A f d\mu = \sum\limits_{k=1}^{N} \int\limits_{A_k} f d\mu$.

Доказательство. Достаточно применить теорему 1, взяв в качестве A_k при $k > N$ пустые множества. □

Следствие 2. Пусть функция $f \geq 0$ на A интегрируема на A, $\{A_k\}_1^\infty$ – некоторое разбиение множества A на измеримые подмножества. Тогда $\int\limits_A f d\mu = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_{A_k} f d\mu$.

Доказательство. Ввиду следствия 1 для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем $\sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{A_k} f d\mu = \int\limits_{\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k} f d\mu \leq \int\limits_A f d\mu$. Следовательно, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_{A_k} f d\mu \leq \int\limits_A f d\mu < \infty$, и остаётся применить теорему 1. □

Теперь мы готовы доказать основной результат параграфа:

Теорема 2. Пусть $\{B_k\}_1^\infty$ – последовательность попарно непересекающихся измеримых множеств, и $A = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k$. Тогда функция f будет интегрируемой на A в том и только том случае, если f интегрируема на каждом из B_k и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_{B_k} |f| d\mu$ сходится. При этом $\int\limits_B f d\mu = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_{B_k} f d\mu$.

Доказательство. В случае $f \geq 0$ результат вытекает из теоремы 1 и следствия 2. Поэтому утверждение верно для функций f^+ и f^-. Для завершения доказательства остаётся применить формулы $|f| = f^+ + f^-$ и $f = f^+ - f^-$.□

Пример 1. Пусть $\{A_k\}_1^\infty$ – последовательность попарно непересекающихся подмножеств ненулевой меры отрезка $[0,1]$, $\bigcup\limits_1^\infty A_k = [0,1]$. Рассмотрим счётнозначную измеримую функцию $f = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\mu(A_k)} \mathbf{1}_{A_k}$. По следствию 3, функция f не интегрируема на $[0,1]$ по мере Лебега. Положим $B_n = A_{2n-1} \cup A_{2n}$. Тогда $\{B_n\}_1^\infty$ – снова последовательность попарно непересекающихся подмножеств ненулевой меры отрезка $[0,1]$, $\bigcup\limits_1^\infty B_n = [0,1]$. Отметим, что на каждом из B_n функция f интегрируема и

$\int\limits_{B_n} f d\lambda = 0$. Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{B_n} f d\lambda$ абсолютно сходится. Итак, сходимость (и даже абсолютная сходимость) ряда из интегралов на подмножествах не влечёт, вообще говоря, интегрируемости функции на объединении этих множеств.

Замечание 1. Пусть функция f определена почти всюду на множестве A, то есть, существует такое множество $B \subset A$ меры ноль, что f определена на $A \setminus B$. Как легко следует из теоремы 7 п. 3.6, следующие условия эквивалентны:

(a) функция f интегрируема на $A \setminus B$,

(b) функцию f можно так продолжить на всё A, чтобы она стала интегрируемой на A,

(c) при любом продолжении на всё A до измеримой функции, функция f интегрируема на A.

Также очевидно, что значение интеграла не изменится, если значения функции изменить на каком-то пренебрежимом подмножестве. Поэтому в рамках теории интеграла можно рассматривать функции, определённые почти всюду. Это оказывается весьма удобным при рассмотрении функций типа $\frac{1}{\sqrt{x}}$, $\frac{x}{|x|}$ и т.д.: мы можем не заботиться о том, как доопределить функцию в точке разрыва.

Упражнения.

1. Не противоречит ли утверждение теоремы 2 примеру 1?
2. Пусть $A \in \Sigma$. Обозначим через Σ_A семейство всех элементов σ-алгебры Σ, являющихся подмножествами множества A, $\mu_1 : \Sigma_A \to \mathbb{R}$ – ограничение меры μ на Σ_A (т.е. $\mu_1(B) = \mu(B)$ для любого $B \in \Sigma_A$). Проверьте, что (A, Σ_A, μ_1) – снова пространство с мерой.

3.8. Условие интегрируемости измеримой функции.

Теорема 1 (теорема о равномерном пределе). Пусть последовательность функций f_n равномерно сходится на множестве A к функции f. Тогда, если все функций f_n интегрируемы на A, то и f интегрируема на A, и $\int\limits_A f d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_A f_n d\mu$.

Доказательство. Пусть ε – произвольное положительное число. Ввиду равномерной сходимости последовательности f_n к f, существует такой номер m, что $|f(t) - f_n(t)| < \varepsilon/2$ на A. Воспользуемся интегрируемостью функции f на A_k и выберем такую счётнозначные интегрируемую функцию g, что $|g(t) - f_n(t)| < \varepsilon/2$ на A. Тогда $|f(t) - g(t)| < \varepsilon$. Мы показали, что функцию f можно с любой степенью точности приблизить счётнозначными интегрируемыми функциями, то есть, доказали интегрируемость функции f. Далее,

$$\left| \int\limits_A f d\mu - \int\limits_A f_n d\mu \right| \le \int\limits_A |f - f_n| d\mu \le \sup_{t \in A} |f(t) - f_n(t)| \mu(A) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \square$$

Теорема 2. Если для измеримой функции f существует интегрируемая мажоранта, то и сама функция f интегрируема. Более подробная формулировка: Пусть на множестве A функция f измерима, $|f| \le g$ и функция g интегрируема на A. Тогда функция f также интегрируема на A.

Доказательство. Вначале разберём частный случай, когда f – счётнозначная функция; то есть, функция f имеет вид $f = \sum_1^\infty a_k \mathbf{1}_{A_k}$, где A_k – последовательность попарно непересекающихся измеримых множеств. Неравенство $|f| \le g$ означает, что $|a_k| \le g(t)$ при $t \in A_k$. Следовательно, ряд $\sum_1^\infty a_k \mu(A_k)$ сходится абсолютно: $\sum_1^\infty |a_k| \mu(A_k) \le \sum_1^\infty \int_{A_k} g d\mu \le \int_A g d\mu < \infty$. Согласно теореме 3 п. 3.5 функция f интегрируема.

Общий случай мы выведем из двух уже известных результатов: теоремы о приближении измеримой функции счётнозначными и теоремы о равномерном пределе. Итак, пусть f измерима, $|f| \le g$ и g интегрируема. Построим такую последовательность f_n измеримых счётнозначных функций, что $\sup_A |f_n(t) - f(t)| < \frac{1}{n}$. Тогда $|f_n| \le g + \frac{1}{n}$, и по уже доказанному частному случаю настоящей теоремы, f_n интегрируемы. Итак, мы смогли представить функцию f как предел равномерно сходящейся последовательности интегрируемых функций. Этим доказана интегрируемость функции f. □

Доказанное условие интегрируемости измеримой функции бывает полезным во многих ситуациях. Дело в том, что измеримость сохраняется при всех обычных операциях над функциями: сумме, произведении, предельном переходе и т.д. Поэтому проверка измеримости какой-либо конкретной функции обычно не составляет большого труда. Найти же интегрируемую мажоранту проще, чем проверять интегрируемость, исходя из определения.

Упражнения.

1. Пусть f – измеримая функция и $|f|$ интегрируем. Тогда f интегрируема.
2. Каждая ограниченная измеримая функция интегрируема.
3. Произведение ограниченной измеримой функции на интегрируемую снова интегрируемо.
4. Опишите те пространства с мерой, на которых каждая измеримая функция интегрируема.

3.9. Сходимость почти всюду.

На протяжении этого раздела (Ω, Σ, μ) будет неким фиксированным пространством с конечной мерой, функции f, f_n и все остальные функции, если не оговорено противное, будут по умолчанию считаться определенными на Ω, измеримыми и принимающими вещественные значения.

Последовательность функций f_n называется *почти всюду сходящейся* к функции f (обозначение: $f_n \xrightarrow{п.в.} f$), если множество тех $t \in \Omega$, где $f_n(t)$ не стремится к $f(t)$, пренебрежимо. Отметим простейшие свойства сходимости почти всюду, проверку которых оставим читателю в качестве упражнения.

A. Если $f_n \xrightarrow{п.в.} f$ и $f_n \xrightarrow{п.в.} g$, то $f \overset{п.в.}{=} g$.

B. Если $f_n \xrightarrow{п.в.} f$ и $f_n \overset{п.в.}{=} g_n$, то $g_n \xrightarrow{п.в.} f$.

C. Если $f_n \xrightarrow{п.в.} f$, $g_n \xrightarrow{п.в.} g$ и $f_n \overset{п.в.}{\le} g_n$, то $f \overset{п.в.}{\le} g$.

D. Если $G:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция, $f_n \xrightarrow{п.в.} f$, $g_n \xrightarrow{п.в.} g$, то $G(f_n, g_n) \xrightarrow{п.в.} G(f, g)$. Отсюда вытекают, в частности, теоремы о пределе суммы и произведения.

Сходимость почти всюду играет важную роль в теории интеграла Лебега. При относительно необременительных дополнительных предположениях (см. раздел 3.11) интеграл предельной функции можно вычислять как предел интегралов. При этом сходимость почти всюду гораздо удобнее во многих отношениях обычной поточечной сходимости. Во-первых, это более общий вид сходимости, поэтому такую сходимость легче проверять. Далее, здесь, как и вообще при работе со свойствами, выполняющимися почти всюду, можно не обращать внимания на поведение функций на пренебрежимых множествах. Скажем, для кусочно-непрерывной или для монотонной функции можно вообще не определять значения в точках разрыва – на сходимости почти всюду это никак не скажется! Однако у сходимости почти всюду есть один существенный недостаток: эта сходимость не порождается никакой метрикой, и поэтому нет естественного способа определить "скорость сходимости".

Упражнения.

1. Пусть f и g – две измеримые функции, заданные на измеримом множестве A и совпадающие почти всюду. Тогда, если f интегрируема, то g также интегрируема и $\int\limits_A g d\mu = \int\limits_A f d\mu$.
2. Пусть функции f и g интегрируемы на A и $f \le g$ почти всюду. Тогда $\int\limits_A f d\mu \le \int\limits_A g d\mu$.

3.10. Теорема Егорова.

Функции $g_n(x) = x^n$ на отрезке $[0,1]$ представляют собой типичный пример последовательности, сходящейся в каждой точке, но не сходящейся равномерно. В то же время сходимость можно улучшить, убрав сколь угодно малую окрестность точки 1: на оставшемся отрезке $[0,1-\varepsilon]$ сходимость уже будет равномерной. Аналогичная ситуация возникает в теории степенных рядов: ряд сходится к своей сумме равномерно не во всём круге сходимости, но в любом круге чуть меньшего радиуса. Эти эффекты служат частными случаями следующего весьма общего результата.

Теорема Егорова. Пусть $f_n \to f$ почти всюду на Ω. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует множество $A = A_\varepsilon \in \Sigma$ с $\mu(A) < \varepsilon$, на дополнении к которому последовательность f_n равномерно сходится к f.

Доказательство. Зафиксируем $a_n, \varepsilon_n > 0$, $a_n \to 0$, $\sum_1^\infty \varepsilon_n < \varepsilon$. Рассмотрим множества $A_{m,n} = |f_m - f|_{>a_n}$ и $B_{m,n} = \bigcup_{k=m}^{\infty} A_{k,n}$. При фиксированном n множества $B_{m,n}$ образуют убывающую по m цепочку множеств, и $\mu\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} B_{m,n}\right) = 0$ (поскольку $\bigcap_{m=1}^{\infty} B_{m,n}$ содержится в пренебрежимом множестве – множестве D всех точек, где f_n не стремится к f). Следовательно, $\mu(B_{m,n}) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$. Для каждого n выберем такой индекс m_n, что $\mu(B_{m_n,n}) < \varepsilon_n$. Докажем, что $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_{m_n,n}$ и будет требуемым множеством. Во-первых, $\mu(A) \le \sum_1^\infty \varepsilon_n < \varepsilon$. Далее, $\Omega \setminus A \subset \Omega \setminus B_{m_n,n}$, то есть для любого $k > m_n$ множество $A_{k,n} = |f_k - f|_{>a_n}$ не содержит точек множества $\Omega \setminus A$. Следовательно, $\sup_{t\in\Omega\setminus A} |f_k(t) - f(t)| \le a_n$ при $k > m_n$. Это и означает требуемую равномерную сходимость на $\Omega \setminus A$. □

Упражнения.

1. Можно ли в формулировке теоремы Егорова условие $\mu(A) < \varepsilon$ заменить условием $\mu(A) = 0$?
2. Где в доказательстве теоремы Егорова сыграла свою роль измеримость участвующих в формулировке функций?

3.11. Теоремы о предельном переходе под знаком интеграла.

Мы познакомились с определением интеграла Лебега и увидели, что, интеграл Лебега сохраняет все удобные свойства интеграла, знакомые нам из курса анализа. Теперь же мы переходим к изучению преимуществ интеграла Лебега перед интегралом Римана. Мы убедимся, что для интеграла Лебега выполнена не только теорема о равномерном пределе, но и гораздо более общие и удобные в применениях теоремы о предельном переходе под знаком интеграла.

3.11.1. Лемма Фату

Теорема. (Лемма Фату**)** Пусть на множестве A задана последовательность f_n неотрицательных интегрируемых функций; последовательность f_n сходится почти всюду к некоторой функции f, и интегралы функций f_n ограничены в совокупности: $\int_A f_n d\mu \le C < \infty$. Тогда f интегрируема и $\int_A f d\mu \le \varliminf_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu$.

Доказательство. Воспользуемся теоремой Егорова (п.3.10). Выделим в A измеримое подмножество A_1 с $\mu(A \setminus A_1) \le \frac{1}{2}$, на котором f_n равномерно сходятся к f. Обозначим $A \setminus A_1$ через B_1. Снова воспользовавшись теоремой Егорова, выделим в B_1 измеримое подмножество A_2 с $\mu(B_1 \setminus A_2) \le \frac{1}{4}$, на котором f_n также равномерно сходятся к f. Обозначим $B_1 \setminus A_2$ через B_2. Продолжив этот процесс, получим последовательность A_n попарно непересекающихся измеримых множеств и убывающую последовательность множеств B_n, $A_{n+1} \subset B_n$, $B_{n+1} = B_n \setminus A_{n+1}$, $\mu(B_n) \le \frac{1}{2^n}$, обладающие тем свойством, что на каждом из A_j последовательность f_n равномерно сходится к f.

По теореме о равномерном пределе, на каждом из A_j функция f интегрируема. Далее, для любого $N \in \mathbb{N}$ выполнена оценка

$$\sum_{k=1}^{N} \int_{A_k} f d\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \int_{A_k} f_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{\bigcup_{k=1}^{N} A_k} f_n d\mu \le \varliminf_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu,$$

следовательно $\sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} f d\mu \le \varliminf_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu$. По теореме 1 п. 3.7 функция f интегрируема на $D = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ и $\int_D f d\mu \le \varliminf_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu$. Остаётся заметить, что по построению дополнение в A к D имеет меру ноль: $\mu\left(A \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = 0$. Следовательно, f интегрируема на всём множестве A и $\int_A f d\mu \le \varliminf_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu$. □

Замечание. Условие неотрицательности функций f_n в формулировке леммы Фату можно несколько ослабить: достаточно потребовать, чтобы все f_n были больше или равны некоторой интегрируемой функции g. Действительно, в этом случае функции $f_n - g$ неотрицательны, и к ним можно применить лемму Фату в первоначальной формулировке. То есть, функция $f - g$ интегрируема (а, следовательно, интегрируема и $f = g + (f - g)$) и $\int_A (f - g) d\mu \le \varliminf_{n\to\infty} \int_A (f_n - g) d\mu$. Осталось прибавить к обеим частям последнего неравенства $\int_A g d\mu$, чтобы получить требуемую оценку $\int_A f d\mu \le \varliminf_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu$. □

Упражнения.

1. Если измеримая функция f положительна и интегралы всех меньших интегрируемых функций ограничены в совокупности, то f интегрируема.

2. На примере ступенчатых функций $f_n = n\mathbf{1}_{(0,\frac{1}{n})}$, заданных на $A=[0,1]$, покажите, что в условиях леммы Фату $\int\limits_A f d\mu$ может не равняться $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \int\limits_A f_n d\mu$.

3. Приведите пример, показывающий, что в условиях леммы Фату может не существовать $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_A f_n d\mu$.

4. Докажите, что условие неотрицательности функций f_n в формулировке леммы Фату можно заменить условием $f_n \ge 0$ почти всюду.

5. Пусть $\{A_k\}_1^\infty$ – последовательность попарно непересекающихся подмножеств ненулевой меры отрезка $[0,1]$. Рассмотрим последовательность интегрируемых функций $f_n = \sum\limits_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{\mu(A_k)} \mathbf{1}_{A_k}$. Проверьте, что интегралы этих функций равны 0 (и, следовательно, ограничены в совокупности), сходятся в каждой точке к $f = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\mu(A_k)} \mathbf{1}_{A_k}$, но предельная функция f не интегрируема. Какое из условий леммы Фату здесь не выполнено?

3.11.2. Теорема Лебега о мажорированной сходимости.

Теорема. Пусть на множестве A задана последовательность f_n интегрируемых функций, сходящаяся почти всюду к некоторой функции f. Пусть, далее, у последовательности f_n есть интегрируемая мажоранта g (то есть, $|f_n| \le g$ при всех n). Тогда предельная функция f интегрируема и $\int\limits_A f d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_A f_n d\mu$.

Доказательство. Все функции f_n ограничены снизу интегрируемой функцией $-g$, и интегралы функций f_n ограничены в совокупности: $\int\limits_A f_n d\mu \le \int\limits_A g d\mu < \infty$. Согласно замечанию, приведенному после доказательства леммы Фату, отсюда следует, что функция f интегрируема и $\int\limits_A f d\mu \le \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \int\limits_A f_n d\mu$. Применив то же самое рассуждение к функциям $-f_n$, получим, что $\int\limits_A (-f) d\mu \le \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \int\limits_A (-f_n) d\mu = -\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \int\limits_A f_n d\mu$, то есть, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \int\limits_A f_n d\mu \le \int\limits_A f d\mu \le \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \int\limits_A f_n d\mu$. Но в каком случае верхний предел последовательности может оцениваться сверху нижним пределом этой же последовательности? Только если у последовательности есть настоящий предел. Таким образом, из двустороннего неравенства $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \int\limits_A f_n d\mu \le \int\limits_A f d\mu \le \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \int\limits_A f_n d\mu$ следует, что существует $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_A f_n d\mu$, и $\int\limits_A f d\mu$ равен этому пределу. □

Упражнения.

1. Опираясь на теорему Лебега и упражнение 14 п. 4.2.3 докажите следующую *теорему о мажорированной сходимости для рядов*. Пусть задана бесконечная матрица $\{a_{n,m}\}_{n,m=1}^{\infty}$, каждый столбец которой сходится к соответствующему числу a_m: $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n,m} = a_m$. Пусть, далее, существует суммируемая последовательность b_m положительных чисел, $\sum\limits_{1}^{\infty} b_m < \infty$, мажорирующая все строки матрицы: $|a_{n,m}| \le b_m$ при всех $n,m \in \mathbb{N}$. Тогда ряд $\sum\limits_{1}^{\infty} a_m$ абсолютно сходится и $\sum\limits_{1}^{\infty} a_m = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{1}^{\infty} a_{n,m}$.
2. Сформулируйте и докажите аналог леммы Фату для рядов.
3. Докажите, что условие $|f_n| \le g$ в формулировке теоремы Лебега о мажорированной сходимости можно заменить условием $|f_n| \le g$ почти всюду.

3.11.3. Теоремы Ле́ви о последовательностях и рядах.

Теорема Ле́ви о монотонных последовательностях. Пусть $f_1 \le f_2 \le f_3 \le \ldots$ – неубывающая последовательность интегрируемых функций на A, и интегралы функций f_n ограничены в совокупности некоторой константой $C < \infty$. Тогда последовательность f_n стремится почти всюду к некоторой интегрируемой функции f, и $\int\limits_A f d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_A f_n d\mu$.

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что все $f_n \ge 0$ (общий случай сводится к этому частному случаю введением вспомогательных функций $f_n - f_1$). Ввиду монотонности, в каждой точке $t \in A$ последовательность $f_n(t)$ стремится либо к конечному пределу, либо к $+\infty$. Обозначим через B множество тех $t \in A$, где $f_n(t) \to +\infty$. Докажем, что B – множество нулевой меры. Для любых $n,m \in \mathbb{N}$ положим $B_{n,m} = \{t \in A : f_n(t) > m\}$, $B_m = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_{n,m}$. Другими словами, B_m – это множество тех точек $t \in A$, где все f_n, начиная с некоторого, больше числа m. Соответственно, $B = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} B_m$. По неравенству Чебышева (теорема 6 п. 3.6), $\mu(B_{n,m}) \le \frac{1}{m} \int\limits_A f_n d\mu \le \frac{C}{m}$. Поскольку при фиксированном m множества $B_{n,m}$ возрастают с ростом n, $\mu(B_m) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(B_{n,m}) \le \frac{C}{m}$. В свою очередь, множества B_m убывают с ростом m, то есть, $\mu(B) = \lim\limits_{m\to\infty} \mu(B_m) \le \lim\limits_{m\to\infty} \frac{C}{m} = 0$.

Теперь определим функцию f на B произвольным образом (скажем, положим $f = 0$ на B), а на $A \setminus B$, где, по построению, в каждой точке существует конечный предел $f_n(t)$, положим $f(t) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(t)$. При таком определении последовательность f_n сходится почти всюду к f, и по лемме Фату функция f интегрируема.

Далее, f служит интегрируемой мажорантой для всех f_n, и для завершения доказательства нам остаётся применить теорему Лебега о мажорированной сходимости. □

Теорема Ле́ви о рядах. Пусть на множестве A задана последовательность f_n неотрицательных интегрируемых функций, и $\sum_{n=1}^{\infty}\int_A f_n d\mu < \infty$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ сходится почти всюду к некоторой интегрируемой функции f, и $\int_A f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\int_A f_n d\mu$.

Доказательство. Достаточно заметить, что последовательность частных сумм ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ подчиняется условиям теоремы Ле́ви о монотонных последовательностях. □

Упражнения.

1. Докажите, что условие $f_n \le f_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ в формулировке теоремы Ле́ви о монотонных последовательностях можно заменить условием "при всех $n \in \mathbb{N}$ $f_n \le f_{n+1}$ почти всюду".
2. Запишите подробнее доказательство теоремы Ле́ви о рядах.
3. Используя представление функции в виде разности её положительной и отрицательной частей, докажите следующее усиление теоремы Ле́ви о рядах: Пусть функции f_n интегрируемы на множестве A, и $\sum_{n=1}^{\infty}\int_A | f_n | d\mu < \infty$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ сходится почти всюду к некоторой интегрируемой функции f, и $\int_A f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\int_A f_n d\mu$.

3.12. Интеграл Лебега на отрезке и на оси.

3.12.1. Интеграл Лебега и интеграл Римана на отрезке.

Теорема 1. Каждая интегрируемая по Риману функция $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ интегрируема $[a,b]$ по мере Лебега λ, и её интеграл Лебега $\int_{[a,b]} f d\lambda$ совпадает с интегралом Римана $\int_a^b f(t)dt$.

Доказательство. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим разбиение отрезка $[a,b]$ на 2^n отрезков равной длины $\Delta_{n,k}$, $k = 1,\ldots,2^n$. Определим функции $h_n = \sum_{k=1}^{2^n} \sup\{f(t) : t \in \Delta_{n,k}\} \mathbb{1}_{\Delta_{n,k}}$, $g_n = \sum_{k=1}^{2^n} \inf\{f(t) : t \in \Delta_{n,k}\} \mathbb{1}_{\Delta_{n,k}}$. Эти функции подчиняются условиям $g_n \le f \le h_n$, причём последовательность g_n возрастает, а h_n убывает с ростом n. Пределы интегралов от g_n и от h_n совпадает с интегралом Римана функции f. По теореме Ле́ви g_n стремятся к некоторой интегрируемой по Лебегу функции g, h_n стремятся к некоторой интегрируемой по Лебегу функции, $\int\limits_{[a,b]} g d\lambda = \int\limits_{[a,b]} h d\lambda = \int\limits_a^b f(t)dt$. Поскольку $h \le g$ последнее равенство может выполняться только, если $h = g = f$ почти всюду. Но мы знаем, что g и h интегрируемы по Лебегу, значит f также интегрируема по Лебегу. □

3.12.2. Интеграл Лебега и несобственный интеграл на отрезке.

Как уже было отмечено, каждая интегрируемая по Риману функция $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ интегрируема и по Лебегу. Более того, интегрируемыми по Лебегу будут все ограниченные измеримые функции на отрезке.

Если функция интегрируема по Риману, то она должна быть ограниченной. Поэтому в курсе математического анализа подробно изучался несобственный интеграл, как способ определения интеграла для некоторых неограниченных на отрезке функций. Чтобы лучше почувствовать природу интеграла Лебега, ниже мы разберём связь между несобственным интегралом и интегралом Лебега.

Теорема 1. Пусть функция $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ непрерывна всюду кроме точки a и интегрируема по Лебегу на $[a,b]$. Тогда у f существует несобственный интеграл, и этот несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(t)dt$ равен соответствующему интегралу Лебега $\int\limits_{[a,b]} f d\lambda$.

Доказательство. Пусть $a_n \in [a,b]$, $a_n \to a$. Введём в рассмотрение вспомогательные функции $f_n = f \cdot \mathbf{1}_{[a_n,b]}$. Функции f_n образуют почти всюду сходящуюся к f последовательность интегрируемых (как по Риману, так и по Лебегу) функций, причём $|f|$ служит интегрируемой мажорантой для всех f_n. Согласно теореме Лебега, $\int\limits_{[a,b]} f_n d\lambda = \int\limits_{[a_n,b]} f d\lambda$ стремится к $\int\limits_{[a,b]} f d\lambda$. Но по определению несобственного интеграла, это и означает, что у f существует несобственный интеграл, равный $\int\limits_{[a,b]} f d\lambda$.

□

Теорема 2. Пусть функция $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ непрерывна всюду кроме точки a и неотрицательна. Тогда, если у f существует несобственный интеграл, то f интегрируема по Лебегу на $[a,b]$.

Доказательство. Пусть a_n и f_n – те же, что и в доказательстве предыдущей теоремы. Последовательность f_n неубывает и стремится почти всюду к функции f. Далее, по определению несобственного интеграла, $\int\limits_{[a,b]} f_n d\lambda = \int\limits_{[a_n,b]} f d\lambda$ стремится к $\int\limits_a^b f(t)dt$. Остаётся применить теорему Лéви о монотонных последовательностях. □

Из курса математического анализа читателю хорошо известны примеры функций, для которых существует несобственный интеграл, но модуль которых не интегрируем даже в несобственном смысле. Такие функции будут неинтегрируемыми по Лебегу, поскольку у интегрируемой по Лебегу функции модуль также должен быть интегрируем по Лебегу.

В дальнейшем, если функция интегрируема по Лебегу на отрезке, то для интеграла Лебега мы будем использовать как обозначение $\int\limits_{[a,b]} f(t)d\lambda$, так и более привычное по курсу анализа $\int\limits_a^b f(t)dt$.

Упражнения. Какие из нижеперечисленных функций f интегрируемы по Лебегу на отрезке $[a,b]$?

1. $f(t)=t^2$, $[a,b]=[0,1]$.
2. $f(t)=t^{-2}$, $[a,b]=[0,1]$.
3. $f(t)=t^{-2}$, $[a,b]=[1,2]$.
4. $f(t)=\sin t^{-2}$, $[a,b]=[0,1]$.
5. $f(t)=\sin^{-2} t$, $[a,b]=[0,1]$.
6. $f(t)=t^{-\frac{1}{2}}$, $[a,b]=[0,1]$.
7. $f(t)=\frac{1}{t}$, $[a,b]=[-1,1]$.

Какие из нижеперечисленных функций на квадрате $[0,1]\times[0,1]$ интегрируемы, а какие – нет по отношению к плоской мере Лебега?

8. $f(x,y)=x+y$,
9. $f(x,y)=\dfrac{1}{x+y}$,
10. $f(x,y)=x-y$,
11. $f(x,y)=\dfrac{1}{x-y}$,
12. $f(x,y)=\sin\left(\dfrac{1}{x-y}\right)$.
13. При каких значениях параметра α функция $f(x,y)=\dfrac{1}{\left(x^2+y^2\right)^\alpha}$ интегрируема на $[0,1]\times[0,1]$?

3.12.3. Интеграл по σ-конечной мере.

В предыдущих разделах мы изучали теорию интеграла Лебега на пространстве (Ω,Σ,μ) с конечной мерой. Чтобы успешно определить интеграл Лебега на оси, или, скажем, на неограниченном подмножестве плоскости, нам нужно рассмотреть и случай счётно-аддитивных мер, принимающих на каких-то элементах σ-алгебры Σ значение $+\infty$. Такие меры будем называть бесконечными.

Итак, пусть (Ω, Σ, μ) – пространство с бесконечной мерой. Подмножество $A \in \Sigma$ называется *множеством* σ*-конечной меры* (другой термин – мера μ σ-конечна на A), если A можно представить в виде объединения счётного числа множеств конечной меры. σ-конечные меры уже упоминались нами в п. 2.12. Если мера μ σ-конечна на A, то A можно записать в виде $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, $0 < \mu(A_n) < \infty$, таким образом, чтобы A_j попарно не пересекались. Отметим также, что счётное объединение множеств σ-конечной меры снова будет множеством σ-конечной меры.

На множестве A σ-конечной меры, также можно рассмотреть счётнозначные интегрируемые функции и определить интеграл Лебега точно таким же образом, как мы это делали выше для множеств конечной меры. Читатель может самостоятельно проверить, что доказательства основных свойств интеграла сохраняют свою силу и в этом случае. Единственным затруднением, которое приходится преодолевать при распространении свойств интеграла со случая конечной на случай σ-конечной меры – это неинтегрируемость постоянной на A функции. Мы настоятельно советуем читателю пройтись ещё раз по всей вышеизложенной схеме построения интеграла Лебега с тем, чтобы самостоятельно построить по уже имеющемуся образцу теорию интеграла на множестве σ-конечной меры. В настоящем же параграфе будет предложен обходной путь, позволяющий с помощью некоторого искусственного приёма свести интегрирование по σ-конечной мере к уже разобранному случаю интеграла по конечной мере. Это позволит свести свойства интеграла по σ-конечной мере к уже известным нам результатам.

Пусть A – множество σ-конечной меры. Зафиксируем некоторое представление множества A в виде $A = \coprod_{n=1}^{\infty} A_n$, где $A_n \in \Sigma$ и $0 < \mu(A_n) < \infty$. Понятие интеграла на каждом множестве конечной меры, в частности на каждом из A_n, нам уже знакомо. Отталкиваясь от этого, можно ввести следующее определение:

Определение 1. Назовём функцию f интегрируемой на A по σ-конечной мере μ, если f μ-интегрируема на каждом из A_k, и $\sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} |f| \, d\mu < \infty$. Положим, по определению, $\int_A f d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} f d\mu$.

Введём обозначение $a_n = 2^n \mu(A_n)$. Определим на семействе Σ_A всех измеримых подмножеств множества A новую меру μ_1 формулой $\mu_1(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(B \cap A_n)}{a_n}$. При таком определении тройка (A, Σ_A, μ_1) будет пространством с конечной мерой. Зададим на A функцию $g = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathbf{1}_{A_n}$.

Лемма 1. Пусть $B \in \Sigma_A$ и $\mu(B) < \infty$. Тогда функция $h : B \to \mathbb{R}$ будет интегрируемой на B по мере μ в том и только том случае, если функция $f \cdot g$ интегрируема на B по мере μ_1. При этом $\int\limits_B h d\mu = \int\limits_B hg d\mu_1$.

Доказательство. На подмножествах множества A_n имеем $\mu_1 = \dfrac{1}{a_n}\mu$, а функция g на A_n равна постоянной a_n. Поэтому для $B \subset A_n$ утверждение очевидно: $\int\limits_B h d\mu = \int\limits_B a_n h\, d\left(\dfrac{1}{a_n}\mu\right) = \int\limits_B hg d\mu_1$. Произвольное же множество B можно представить в виде $B = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(B \cap A_n)$, где множества $B \cap A_n$ дизъюнктны, и каждое из них содержится в своём A_n. Так как на B по условию не только μ_1, но и μ конечна, мы можем применить теорему 2 п. 3.7 о счётной аддитивности интеграла как функции множества к интегралу на B как по μ_1, так и по μ, и составить наше утверждение из уже доказанных утверждений на подмножествах $B \cap A_n$. □

Лемма 2. Функция f интегрируема на A по мере μ в том и только том случае, если функция $f \cdot g$ интегрируема на A по мере μ_1. При этом $\int\limits_A f d\mu = \int\limits_A fg d\mu_1$.

Доказательство. Нужно применить лемму 1 к каждому из множеств A_k, воспользоваться определением 1 и применить теорему 2 п. 3.7 к мере μ_1. □

Ввиду леммы 2 линейность интеграла, возможность интегрирования неравенств, критерий интегрируемости измеримой функции, лемма Фату, теорема Лебега о мажорированной сходимости, теоремы Леви, – все эти свойства для интеграла по мере μ с очевидностью вытекают из соответствующих свойств для интеграла по мере μ_1.

Следующее свойство интеграла по σ-конечной мере означает, что интеграл не зависит от выбора представления множества A в виде $A = \coprod\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ (этот вопрос наверняка возник у Читателя по прочтении определения 1).

Теорема 1. Пусть A – множество σ-конечной меры, $A = \coprod\limits_{n=1}^{\infty} B_n$, где $B_n \in \Sigma$ и $\mu(B_n) < \infty$. Тогда $\int\limits_A f d\mu$ существует в том и только том случае, если f интегрируема на каждом из B_n, и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_{B_k} |f| d\mu < \infty$. При этом $\int\limits_A f d\mu = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_{B_k} f d\mu$.

Доказательство. Пусть μ_1 – конечная мера из лемм 1 и 2. Воспользовавшись леммой 2 и применив теорему 2 п. 3.7 к конечной мере μ_1, получаем, что функция f интегрируема на A по мере μ тогда и только тогда, когда функция $f \cdot g$ интегрируема на каждом из B_n по μ_1, и сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\int\limits_{B_k}|f|gd\mu_1$. При этом

$\int\limits_A fd\mu = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\int\limits_{B_k} fgd\mu_1$. Для завершения доказательства остаётся применить лемму 1 на множествах B_k, что возможно ввиду конечности меры μ на каждом из этих множеств. □

Упражнения.

Всюду в нижеприведенных упражнениях A_n и μ_1 взяты из определения 1 и леммы 1.

1. Докажите, что для множества $B \subset A$ условия $\mu(B)=0$ и $\mu_1(B)=0$ эквивалентны.
2. Для последовательности функций f_n на A следующие условия эквивалентны: $f_n \to f$ почти всюду в смысле меры μ; $f_n \to f$ почти всюду в смысле меры μ_1; $f_n g \to fg$ почти всюду в смысле меры μ_1.
3. Пусть λ – мера Лебега на оси. Измеримая функция f на оси интегрируема по λ в том и только том случае, если $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\int\limits_{[k,k+1)}|f|d\lambda < \infty$, и

$$\int\limits_{\mathbb{R}} fd\lambda = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\int\limits_{[k,k+1)} fd\lambda = \lim_{n\to\infty}\int\limits_{[-n,n)} fd\lambda .$$

4. Опираясь на уже доказанные теоремы о предельном переходе под знаком интеграла для интеграла по конечной мере, докажите лемму Фату, теорему Лебега о мажорированной сходимости, теоремы Леви о последовательностях и рядах для случая σ-конечной меры.
5. (**Внимание!**) Теорема о равномерном пределе для интеграла по σ-конечной мере **не выполняется**. Покажите это на следующем примере: последовательность $f_n = \dfrac{1}{2n}\mathbf{1}_{[-n,n]}$ интегрируемых на оси функций стремится равномерно к нулю, но интегралы этих функций все равны единице.
6. Докажите теорему 1 без дополнительного предположения $\mu(B_n) < \infty$.
7. Можно определить интеграл на множествах, не являющихся множествами σ-конечной меры, но это определение не расширяет существенно наших представлений об интеграле. Напомним, что носителем функции $f : A \to \mathbb{R}$ называется множество $\operatorname{supp} f = \{t \in A : f(t) \neq 0\}$. Назовём функцию f *интегрируемой на* A, если $\operatorname{supp} f$ является множеством σ-конечной меры и f интегрируема на $\operatorname{supp} f$. По определению, $\int\limits_A fd\mu = \int\limits_{\operatorname{supp} f} fd\mu$. Проверьте, что основные свойства интеграла по множеству σ-конечной меры распространяются и на этот более общий случай.
8. Докажите, что невозможно распространить понятие интеграла на функции, носители которых не являются множествами σ-конечной меры, с сохранением основных свойств интеграла, а именно, с сохранением свойств (а) если $f \geq g$ на множе-

стве A, f и g интегрируемы на A, то $\int\limits_A f d\mu \geq \int\limits_A g d\mu$ и (b) $\int\limits_A a d\mu = a\mu(A)$ для любой константы $a \in \mathbb{R}$ и любого измеримого множества A конечной меры.