Розділ 7. Абсолютна неперервність мір і функцій. Зв'язок похідної й інтеграла

7.1. Заряди. Теореми Гана і Радона-Никодима

Сім'я всіх скінчених мір на фіксованій σ-алгебрі не утворює лінійного простору: їх можна додавати, проте вже різниця двох мір може набувати від'ємні значення і, отже, не бути мірою. Це створює певні незручності, і, щоб їх уникнути, вводять узагальнення поняття міри, дозволяючи їй набувати не тільки додатні, але й від'ємні значення. Таку узагальнену міру називають зарядом.

У цьому розділі (Ω, Σ) — множина із заданою на ній σ-алгеброю. Усі функції вважатимемо, якщо не обумовлено інше, визначеними на Ω, а міри й заряди визначеними на Σ.

7.1.1. Теорема про обмеженість заряду

Відображення $\nu\colon \Sigma \to \mathbb{R}$ називається *зарядом*, якщо воно задовольняє умову зліченної адитивності: для будь-якої послідовності попарно неперетинних множин $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \Sigma$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \nu(A_k)$ збігається і $\nu\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \nu(A_k)$.

Відразу зазначимо, що з означення випливає збіжність ряду $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \nu(A_k)$ при всіх перестановках доданків, тобто абсолютна збіжність. Багато властивостей мір переносяться на заряди без зміни доведень. Так, заряд порожньої множини дорівнює нулю (взяти в означенні зліченної адитивності всі $A_n = \varnothing$); заряд скінченно-адитивний (покласти $A_n = \varnothing$ для всіх $n > N$). Зокрема, ми будемо користуватись такими твердженнями:

– якщо $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \Sigma$ — зростаючий ланцюжок множин, то $\nu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim\limits_{k\to\infty} \nu(A_k)$;

– якщо ж ланцюжок множин $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \Sigma$ спадає, то $\nu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{k\to\infty} \nu(A_k)$.

Наведений учбовий текст є витягом з підручнику
Кадець В.М. Курс функціонального аналізу та теорії міри. – Львів: Видавець І.Е. Чижиков, 2012. – 590 с. – (Серія "Університетська бібліотека") ISBN 978-966-2645-03-3
Усі посилання на теореми, вправи, означення, такі що не увійшли до цього тексту – це посилання на підручник.

Проте, працюючи із зарядами, потрібно бути обережним: скажімо, можливо, що $\nu(A) > \nu(B)$ для деяких множин $A \subset B \in \Sigma$ — ситуація, цілком неможлива для мір.

Для зарядів визначені природні операції додавання і множення на скаляр: $(a_1\nu_1 + a_2\nu_2)(A) = a_1\nu_1(A) + a_2\nu_2(A)$, а також нерівності: $\mu \geqslant \nu$, якщо $\mu(A) \geqslant \nu(A)$ для всіх $A \in \Sigma$.

Для $A \in \Sigma$ введемо позначення $\nu^+(A) = \sup\{\nu(B) : B \in \Sigma_A\}$. Оскільки за B можна взяти, зокрема, порожню множину, то $\nu^+(A) \geqslant 0$.

Лема 1. *Нехай $A = \coprod_{k=1}^{\infty} A_k$. Тоді $\nu^+(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu^+(A_k)$. Іншими словами, ν^+ задовольняє умову зліченної адитивності.*

Доведення. Будь-яку $B \in \Sigma_A$ можна зобразити у вигляді $B = \coprod_{n=1}^{\infty} B_n$ з $B_n \subset A_n$: досить покласти $B_n = B \cap A_n$. Маємо

$$\nu^+(A) = \sup\{\nu(B) : B \in \Sigma_A\} = \sup\Big\{\sum_{n=1}^{\infty} \nu(B_n) : B_n \in \Sigma_{A_n}, n \in \mathbb{N}\Big\} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sup\{\nu(B_n) : B_n \in \Sigma_{A_n}\} = \sum_{n=1}^{\infty} \nu^+(A_n).$$ □

Лема 2. *Нехай $\nu^+(A) = +\infty$. Тоді для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ існує вимірна множина $B \subset A$ з $\nu^+(B) = +\infty$ і $|\nu(B)| > n$.*

Доведення. Виберемо $B_1 \in \Sigma_A$ з $\nu(B_1) > n + |\nu(A)|$ і покладемо $B_2 = A \backslash B_1$. Тоді $|\nu(B_2)| \geqslant |\nu(B_2)| - |\nu(A)| > n$. Оскільки

$$\nu^+(B_1) + \nu^+(B_2) = \nu^+(A) = +\infty,$$

принаймні одна з величин $\nu^+(B_1)$ і $\nu^+(B_2)$ нескінченна. Відповідну B_i і візьмемо за шукану B. □

Теорема 1. *ν^+ — це скінченна зліченно-адитивна міра на Σ.*

Доведення. Зліченну адитивність вже доведено в лемі 1. Доведемо скінченність. Нехай існує $A \in \Sigma$ з $\nu^+(A) = +\infty$. За лемою 2, існує $A_1 \in \Sigma_A$ з $\nu^+(A_1) = +\infty$ і $|\nu(A_1)| > 1$. Застосуємо лему 2 ще раз до множини A_1 з $n = 2$ і отримаємо множину $A_2 \subset A_1$ з $\nu^+(A_2) = +\infty$ і $|\nu(A_2)| > 2$. Продовжуючи цей процес, отримуємо спадну послідовність множин $A_1, A_2, \ \ldots\ , A_n, \ \ldots \in \Sigma$ з $|\nu(A_n)| > n$, що суперечить умові $\nu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim\limits_{k\to\infty} \nu(A_k)$, зазначеній нами на початку пункту. □

Наслідок (обмеженість заряду). *Для будь-якого заряду ν існують такі сталі $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, що $C_1 \leqslant \nu(A) \leqslant C_2$ для будь-якого $A \in \Sigma$.*

Доведення. Достатньо взяти $C_2 = \nu^+(\Omega)$, $C_1 = -(-\nu)^+(\Omega)$. □

Означення. Міра ν^+ називається *додатною частиною* заряду ν; міра $\nu^- = (-\nu)^+$ називається *від'ємною частиною заряду* ν; міра $|\nu| = \nu^+ + \nu^-$ називається *варіацією заряду* ν.

Теорема 2. *Для будь-якого заряду ν справджується розклад Жордана (Jordan): $\nu = \nu^+ - \nu^-$. Отже, будь-який заряд зображується у вигляді різниці двох мір.*

Доведення. Для будь-якого $A \in \Sigma$ маємо

$$\nu^+(A) - \nu(A) = \sup\{\nu(B) - \nu(A) : B \in \Sigma_A\} = \sup\{-\nu(A\backslash B) : B \in \Sigma_A\}.$$

Зробимо заміну $A \backslash B = C$. Коли B пробігає Σ_A, C також пробігає всі Σ_A, тобто $\{A \setminus B : B \in \Sigma_A\} = \Sigma_A$. Відповідно,

$$\nu^+(A) - \nu(A) = \sup\{-\nu(C) : C \in \Sigma_A\} = (-\nu)^+(A) = \nu^-(A). \qquad \square$$

Вправи

1. Доведіть формули $-\nu^-(A) = \inf\{\nu(B) : B \in \Sigma_A\}$ і $\nu(A) = \sup\{\nu(B) : B \in \Sigma_A\} + \inf\{\nu(B) : B \in \Sigma_A\}$.
2. $|\nu(A)| \leqslant |\nu|(A)$ для будь-якого $A \in \Sigma$.
3. Нехай μ — міра, ν — заряд і $\mu \geqslant \nu$. Тоді $\mu \geqslant \nu^+$.
4. Нехай μ — міра, ν — заряд і $|\nu(A)| \leqslant \mu(A)$ для будь-якого $A \in \Sigma$. Тоді $|\nu| \leqslant \mu$.
5. Перевірте, що для зарядів і навіть для загальніших функцій множини залишається правильним твердження вправи 4 п. 2.1.4: нехай ν — скінченно-адитивна функція множини, задана на σ-алгебрі Σ, яка набуває значення в нормованому просторі X. Нехай для будь-яких $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in \Sigma$, які утворюють спадний ланцюжок множин із порожнім перетином, $\lim\limits_{k\to\infty} \nu(A_k) = 0$. Тоді ν — зліченно-адитивна функція множини.
6. Перевірте, що вираз $\|\nu\| = |\nu|(\Omega)$ задає норму в просторі $M(\Omega, \Sigma)$ всіх зарядів на Σ. Доведіть повноту нормованого простору $M(\Omega, \Sigma)$.

7.1.2. Теорема Гана про множини додатності і від'ємності

Лема. *Для будь-якого заряду ν на Σ існує множина $\Omega^+ \in \Sigma$ з $\nu^+(\Omega^+) = \nu^+(\Omega)$ і $\nu^-(\Omega^+) = 0$.*

Доведення. Зафіксуємо послідовність $\varepsilon_n > 0$ з $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \infty$. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ виберемо $A_n \in \Sigma$ з $\nu(A_n) > \nu^+(\Omega) - \varepsilon_n$. Тоді

$$\nu^+(A_n) > \nu^+(\Omega) - \varepsilon_n, \tag{1}$$
$$\nu^-(A_n) = \nu^+(A_n) - \nu(A_n) \leqslant \nu^+(\Omega) - \nu(A_n) \leqslant \varepsilon_n \tag{2}$$

Покладемо $\Omega^+ = \overline{\lim} A_n$. Згідно з пунктом (i) леми про верхню границю множин (лема 1 п. 3.2.3), застосованим до міри ν^+, з оцінки (1) випливає, що

$$\nu^+(\Omega^+) \geqslant \overline{\lim}\, \nu^+(A_n) = \nu^+(\Omega).$$

Пункт (ii) тієї ж леми, але застосований до ν^-, дає рівність $\nu^-(\Omega^+) = 0$: тут використовується оцінка (2). $\square$

Теорема Гана. *Для будь-якого заряду ν існує розклад множини Ω у диз'юнктне об'єднання вимірних множин Ω^+ і Ω^-, який має властивість, що для будь-якої підмножини в Ω^+ заряд більший або дорівнює нулю, а для будь-якої підмножини в Ω^- заряд менший або дорівнює нулю. Такий розклад єдиний з точністю до $|\nu|$-еквівалентності.*

Доведення. Візьмемо за Ω^+ відповідну множину з попередньої леми. Оскільки $\nu^-(\Omega^+) = 0$, заряд жодної підмножини в Ω^+ не може бути від'ємним. Покладемо $\Omega^- = \Omega \backslash \Omega^+$. Оскільки

$$\nu^+(\Omega^-) = \nu^+(\Omega) - \nu^+(\Omega^+) = 0,$$

заряд жодної підмножини в Ω^- не може бути додатним. Цим доведено існування розкладу. Перейдемо до питання єдиності. Нехай $\Omega_1^+ \coprod \Omega_1^-$ — інший розклад з такими самими властивостями. Тоді $\nu^-(\Omega_1^+) = 0$, $\nu^-(\Omega^+) = 0$ і, отже, $\nu^-(\Omega_1^+ \triangle \Omega^+) = 0$. Подібно,

$\nu^+(\Omega_1^- \triangle \Omega^-) = 0$. Але $\Omega_1^+ \triangle \Omega^+ = \Omega_1^- \triangle \Omega^-$ (симетрична різниця множин дорівнює симетричній різниці їх доповнень), тому також $\nu^+(\Omega_1^+ \triangle \Omega^+) = 0$ і $\nu^-(\Omega_1^- \triangle \Omega^-) = 0$. Отже, $|\nu|(\Omega_1^+ \triangle \Omega^+) = |\nu|(\Omega_1^- \triangle \Omega^-) = 0$. □

Множини Ω^+ і Ω^- називаються відповідно *множиною додатності і множиною від'ємності* заряду ν, а зображення $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^-$ — *розкладом Гана.*

Вправи

1. $\nu^+(A) = \nu(A \cap \Omega^+)$, $\nu^-(A) = -\nu(A \cap \Omega^-)$.

2. Розв'яжіть вправу 3 п. 7.1.1, базуючись на попередній вправі.

За аналогією з п. 2.1.6, *атомом* заряду ν назвемо таку підмножину $A \in \Sigma$, що $\nu(A) \neq 0$ і для будь-якого $B \in \Sigma_A$ або $\nu(B) = 0$, або $\nu(A \backslash B) = 0$. Якщо в заряду є атоми, заряд називається *атомарним*, якщо ж атомів немає, то *безатомним.* Заряд ν називається *суто атомарним*, якщо Ω можна зобразити у вигляді об'єднання скінченної або зліченної кількості неперетинних атомів заряду ν.

Доведіть, що:

3. Атоми заряду ν збігаються з атомами міри $|\nu|$. Заряд ν є безатомним тоді і тільки тоді, коли $|\nu|$ — безатомна міра.

4. Будь-який заряд однозначно зображується у вигляді суми суто атомарного і безатомного зарядів.

У нормованому просторі $M(\Omega, \Sigma)$ (див. вправу 6 п. 7.1.1) розглянемо підмножину $M_{at}(\Omega, \Sigma)$ суто атомарних зарядів і $M_{n-at}(\Omega, \Sigma)$ безатомних зарядів.

Доведіть, що:

5. $M_{at}(\Omega, \Sigma)$ і $M_{n-at}(\Omega, \Sigma)$ — це замкнені підпростори в просторі $M(\Omega, \Sigma)$ і $M(\Omega, \Sigma) = M_{at}(\Omega, \Sigma) \oplus M_{n-at}(\Omega, \Sigma)$.

6. Якщо $\nu_1 \in M_{at}(\Omega, \Sigma)$, $\nu_2 \in M_{n-at}(\Omega, \Sigma)$, то $\|\nu_1 + \nu_2\| = \|\nu_1\| + \|\nu_2\|$.

Так само, як і у випадку мір, означимо допустимі розбиття (такі, що $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sup\limits_{t \in \Delta_k} [|f(t)| \cdot |\nu|(\Delta_k)] < \infty$) й інтегральні суми функції f за зарядом ν : $S_A(f, D, T, \nu) = \sum_{k=1}^{\infty} f(t_k)\nu(\Delta_k)$. Інтегровність та інтеграл функції за зарядом також означимо як границю інтегральних сум.

7. Вимірна функція f є інтегровною відносно заряду ν на множині $A \in \Sigma$ тоді і тільки тоді, коли f інтегровна за ν як на $A \cap \Omega^+$, так і на $A \cap \Omega^-$.

8. Вимірна функція f інтегровна відносно заряду ν на множині $A \in \Sigma$ тоді і тільки тоді, коли f інтегровна на A як за мірою ν^+, так і за мірою ν^-. Далі, $\int_A f d\nu = \int_A f d\nu^+ - \int_A f d\nu^-$.

9. Вимірна функція f інтегровна відносно заряду ν на множині $A \in \Sigma$ тоді і тільки тоді, коли f інтегровна на A за мірою $|\nu|$.

10. Доведіть лінійність виразу $\int\limits_A f d\nu$ як за f, так і за ν, а також зліченну адитивність за A.

11. Доведіть нерівність $\left|\int\limits_A f d\nu\right| \leqslant \int\limits_A |f| \, d\,|\nu|$.

7.1.3. Абсолютно неперервні міри і заряди

Нехай ν — заряд, а μ — зліченно-адитивна міра на Σ. Заряд ν називається *абсолютно неперервним* щодо міри μ (позначення: $\nu \ll \mu$)[1], якщо для будь-якого $A \in \Sigma$ з $\mu(A) = 0$ також і $\nu(A) = 0$.

[1]Не плутати з нерівністю $\nu \leqslant \mu$!

Наведене означення абсолютної неперервності, на перший погляд, не викликає жодних асоціацій зі звичним поняттям неперервності. Але такі асоціації, безумовно, виникнуть після еквівалентного переформулювання означення:

Теорема. *Для заряду ν і міри μ такі умови еквівалентні:*

(1) $\nu \ll \mu$;

(2) $|\nu| \ll \mu$;

(3) для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що для будь-якого $A \in \Sigma$, якщо $\mu(A) < \delta$, то $|\nu|(A) < \varepsilon$.

Доведення. (1)$\Rightarrow$(2). Нехай $\mu(A) = 0$. Тоді $\mu(B) = 0$ для будь-якого $B \in \Sigma_A$. Отже, $\nu(B) = 0$ для всіх $B \in \Sigma_A$, тобто величини $\nu^+(A)$, $\nu^-(A)$ і $|\nu|(A)$ дорівнюють нулю.

(2)$\Rightarrow$(3). Припустимо, що умова (3) не виконується. Тоді існує таке $\varepsilon > 0$, що для будь-якого $\delta > 0$ існує $A \in \Sigma$ з $\mu(A) < \delta$ і $|\nu|(A) \geqslant \varepsilon$. Застосувавши цю умову з $\delta = 2^{-n}$, отримаємо існування множин $A_n \in \Sigma$ з $\mu(A_n) < 2^{-n}$ і $|\nu|(A_n) \geqslant \varepsilon$. Тоді для множини $B = \overline{\lim} A_n$ маємо $|\nu|(B) \geqslant \varepsilon$ і $\mu(B) = 0$, що суперечить умові $|\nu| \ll \mu$.

(3)$\Rightarrow$(1). Нехай $\mu(A) = 0$. Тоді $\mu(A) < \delta$ для будь-якого $\delta > 0$, відтак, $|\nu|(A) < \varepsilon$ для всіх $\varepsilon > 0$. Отже, $|\nu|(A) = 0$, і, відповідно, $\nu(A) = 0$. □

Вправи

1. Нехай $\nu \ll \mu$. Тоді $\nu^+ \ll \mu$ і $\nu^- \ll \mu$.

2. Через $M_{abs}(\Omega, \Sigma, \mu)$ позначимо підмножину в $M(\Omega, \Sigma)$, яка складається з абсолютно неперервних відносно μ зарядів. Доведіть, що $M_{abs}(\Omega, \Sigma, \mu)$ — замкнений підпростір в $M(\Omega, \Sigma)$.

3. Наділимо Σ псевдометрикою $\rho(A, B) = \mu(A \triangle B)$. Доведіть, що заряд ν здійснює неперервне відображення псевдометричного простору (Σ, ρ) в $\mathbb{R}$ тоді і тільки тоді, коли $\nu \ll \mu$.

4. Нехай μ — скінченна зліченно-адитивна міра, ν — скінченно-адитивна міра на Σ і для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що для будь-якого $A \in \Sigma$, якщо $\mu(A) < \delta$, то $\nu(A) < \varepsilon$. Тоді міра ν також зліченно-адитивна.

5. Поширте результати цього пункту на випадок σ-скінченної міри μ.

7.1.4. Заряд, породжений функцією

Нехай μ — фіксована міра. Для будь-якого $f \in L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ означимо заряд μ_f рівністю $\mu_f(A) = \int_A f d\mu$. Якщо $\mu(A) = 0$, то й $\int_A f d\mu = 0$; отже, $\mu_f \ll \mu$. Нижче в п. 7.1.6 ми побачимо, що μ_f — це типовий приклад абсолютно неперервного заряду.

Теорема 1. *Нехай $f \in L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що для будь-якого $A \in \Sigma$, якщо $\mu(A) < \delta$, то $\int\limits_A |f| d\mu < \varepsilon$.*

Доведення. Застосуємо до міри $\mu_{|f|}$ основну теорему п. 7.1.3. □

Теорема 2. *Для $f, g \in L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ такі умови еквівалентні:*

(1) $f \leqslant g$ майже скрізь за мірою μ;

(2) $\mu_f \leqslant \mu_g$.

Зокрема, $f = g$ майже скрізь за мірою μ тоді і тільки тоді, коли $\mu_f = \mu_g$.

Доведення. Імплікація (1)⇒(2) очевидна. Доведемо зворотну імплікацію. Позначимо через A множину тих $t \in \Omega$, де $f(t) > g(t)$. Тоді, з одного боку, $f - g > 0$ на A і, з іншого боку,

$$\int_A (f-g)d\mu = \mu_f(A) - \mu_g(A) \leqslant 0.$$

Тобто $\mu(A) = 0$. □

Зазначимо ще одне просте, проте корисне переформулювання теореми Леві.

Теорема 3. *Нехай $f_n \in L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ утворюють зростаючу послідовність, і $\mu_{f_n} \leqslant v$ для всіх n. Тоді послідовність (f_n) збігається μ-майже скрізь до деякої функції $f \in L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$, і $\mu_f \leqslant v$.*

Вправи

1. Знайдіть явні вирази для $(\mu_f)^+$, $(\mu_f)^-$ і $|\mu_f|$.
2. Перевірте, що відображення $f \mapsto \mu_f$ — це лінійне ізометричне вкладення простору $L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ в $M(\Omega, \Sigma)$.
3. Знайдіть Ω^+ і Ω^- для заряду μ_f.

Нагадаємо, що у вправах 7–11 п. 7.1.2 було введено означення інтеграла функції за зарядом.

4. Вимірна функція g на Ω інтегровна за зарядом μ_f тоді і тільки тоді, коли функція gf інтегровна за мірою μ. При цьому

$$\int_\Omega gf\,d\mu = \int_\Omega g d\mu_f.$$

Останню вправу записують у вигляді умовної рівності $d\mu_f = f\,d\mu$, яка означає, що під знаком інтеграла один з цих виразів можна замінити іншим.

7.1.5. Строга сингулярність

Нехай ν_1, ν_2 — заряди на Σ. Заряд ν_1 називається *строго сингулярним* щодо заряду ν_2 (позначення: $\nu_1 \perp \nu_2$), якщо існує таке розбиття множини Ω в об'єднання неперетинних множин $A_1, A_2 \in \Sigma$, що $|\nu_1|(A_2) = |\nu_2|(A_1) = 0$. Іншими словами, заряди ν_1 і ν_2 зосереджені на двох різних, неперетинних між собою множинах: ν_1 — на A_1, а ν_2 — на A_2.

Як видно з означення, відношення строгої сингулярності симетричне: $\nu_1 \perp \nu_2 \Leftrightarrow \nu_2 \perp \nu_1$. Приклад: $\nu^+ \perp \nu^-$ для будь-якого заряду ν. Для пари μ, ν мір на Σ введемо в розгляд сім'ю $F(\mu, \nu)$ μ-інтегровних невід'ємних вимірних функцій f, для яких $\mu_f \leqslant \nu$. Далі, введемо величину

$$m(\mu, \nu) = \sup\left\{\int_\Omega f d\mu : f \in F(\mu, \nu)\right\}.$$

Зазначимо ще одну очевидну властивість введених понять: якщо $0 \leqslant \nu_1 \leqslant \nu_2$, то $F(\mu, \nu_1) \subset F(\mu, \nu_2)$ і, відповідно, $m(\mu, \nu_1) \leqslant m(\mu, \nu_2)$.

Лема. *Такі умови для пари мір μ, ν еквівалентні:*

— $\mu \perp \nu$;

— $m(\mu, \nu) = 0$.

Доведення. Якщо $\mu \perp \nu$, то існує розбиття $\Omega = A_1 \cup A_2$, з $\mu(A_2) = \nu(A_1) = 0$. Нехай $f \in F(\mu, \nu)$. Тоді

$$\int_{A_1} f d\mu = \mu_f(A_1) \leqslant \nu(A_1) = 0$$

і, як наслідок,

$$\int_{\Omega} f d\mu = \int_{A_1} f d\mu + \int_{A_2} f d\mu = 0.$$

Тобто $m(\mu, \nu) = 0$.

Навпаки, нехай $m(\mu, \nu) = 0$. Розглянемо допоміжні заряди $\mu - n\nu$ і відповідні розклади Гана $\Omega = \Omega_n^+ \coprod \Omega_n^-$ для цих зарядів. Покладемо $A_1 = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Omega_n^+$, $A_2 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n^-$. Покажемо, що ці множини утворюють потрібне розбиття $\Omega = A_1 \coprod A_2$, з $\mu(A_2) = \nu(A_1) = 0$. Оскільки

$$\int_A \frac{1}{n} \mathbb{1}_{\Omega_n^-} d\mu = \frac{1}{n} \mu\left(A \cap \Omega_n^-\right) \leqslant \nu\left(A \cap \Omega_n^-\right) \leqslant \nu(A)$$

для будь-якого $A \in \Sigma$, робимо висновок, що $\frac{1}{n} \mathbb{1}_{\Omega_n^-} \in F(\mu, \nu)$. Отже, $\int_\Omega \frac{1}{n} \mathbb{1}_{\Omega_n^-} d\mu = 0$, тобто $\mu(\Omega_n^-) = 0$ при всіх n. Отож ми показали, що $\mu(A_2) = 0$. Далі, $A_1 \subset \Omega_n^+$, тобто $(\mu - n\nu)(A_1) \geqslant 0$ при всіх n. Отже, і $\nu(A_1) = 0$. □

Вправи

1. Якщо $\mu \perp \nu$ і $\tilde{\mu} \ll \mu$, то $\tilde{\mu} \perp \nu$.
2. Якщо $\mu \perp \nu$ і $\nu \ll \mu$, то $\nu = 0$.
3. Нехай ν_1, ν_2 — заряди на Σ і $\nu_1 \perp \nu_2$. Тоді $|\nu_1 + \nu_2| = |\nu_1| + |\nu_2|$. Чи правильне обернене твердження?
4. Нехай $|\nu_1 + \nu_2| = |\nu_1 - \nu_2| = |\nu_1| + |\nu_2|$. Тоді $\nu_1 \perp \nu_2$.
5. Через $M_{ss}(\Omega, \Sigma, \mu)$ позначимо підмножину в $M(\Omega, \Sigma)$, яка складається зі строго сингулярних щодо μ зарядів. Доведіть, що $M_{ss}(\Omega, \Sigma, \mu)$ — замкнений підпростір в $M(\Omega, \Sigma)$.
6. Нехай $\nu_1 \in M_{abs}(\Omega, \Sigma, \mu)$, $\nu_2 \in M_{ss}(\Omega, \Sigma, \mu)$. Тоді $\|\nu_1 + \nu_2\| = \|\nu_1\| + \|\nu_2\|$.
7. Нехай ν_1 — безатомний, а ν_2 — суто атомарний заряд. Тоді $\nu_1 \perp \nu_2$.
8. Доведіть, що величина $m(\mu, \nu)$ напівадитивна знизу за другою змінною, тобто $m(\mu, \nu_1 + \nu_2) \geqslant m(\mu, \nu_1) + m(\mu, \nu_2)$.
9. Якщо $\nu_1 \geqslant \nu_2 \geqslant 0$, то $m(\mu, \nu_1 - \nu_2) \leqslant m(\mu, \nu_1) - m(\mu, \nu_2)$.

7.1.6. Теорема Радона-Никодима

У цьому пункті μ — фіксована міра на Σ. Ми надалі будемо використовувати позначення $F(\mu, \nu)$ і $m(\mu, \nu)$, введені в попередньому пункті.

Теорема 1. *Для будь-якого заряду ν на Σ існує єдиний розклад $\nu = \eta_1 + \eta_2$ у вигляді суми абсолютно неперервного щодо μ заряду η_1 і заряду $\eta_2 \perp \mu$. При цьому заряд η_1 має вигляд μ_f з $f \in L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$.*

Доведення. Почнемо з єдиності зображення. Нехай, крім зображення $\nu = \eta_1 + \eta_2$, є аналогічне зображення $\nu = \tilde{\eta}_1 + \tilde{\eta}_2$. Тоді $\eta_1 - \tilde{\eta}_1 \ll \mu$ і $\eta_1 - \tilde{\eta}_1 = \tilde{\eta}_2 - \eta_2 \perp \mu$. Тобто (вправа 2 п. 7.1.5) $\eta_1 - \tilde{\eta}_1 = 0$, отже, $\tilde{\eta}_2 - \eta_2 = 0$.

Існування потрібного розкладу достатньо проводити для $\nu \geqslant 0$. Загальний випадок можна отримати, розглядаючи окремо задачі на множині додатності і множині від'ємності заряду ν. Ідея доведення полягає в так званому *методі вичерпання*: шукана функція f будується як сума ряду $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, кожен з доданків якого «забирає до себе» істотну частину величини $m(\mu, \nu)$, ще не забрану попереднім доданком. Візьмемо за f_1

такий елемент множини $F(\mu,\nu)$, що $\int\limits_\Omega f_1 d\mu \geqslant \frac{1}{2} m(\mu,\nu)$. Оскільки $f_1 \in F(\mu,\nu)$, маємо $\nu - \mu_{f_1} \geqslant 0$. Функцію $f_2 \in F(\mu, \nu - \mu_{f_1})$ виберемо так, що $\int_\Omega f_2 d\mu \geqslant \frac{1}{2} m(\mu, \nu - \mu_{f_1})$. Оскільки $f_2 \in F(\mu, \nu - \mu_{f_1})$, то $\nu - \mu_{f_1+f_2} \geqslant 0$. Продовжимо цей процес, вибираючи на $n+1$-ому кроці функцію $f_{n+1} \in F(\mu, \nu - \mu_{f_1+f_2+\ldots+f_n})$ так, що $\int\limits_\Omega f_{n+1} d\mu \geqslant \frac{1}{2} m(\mu, \nu - \mu_{f_1+f_2+\ldots+f_n})$. При цьому на кожному кроці буде виконуватись нерівність $\nu - \mu_{f_1+f_2+\ldots+f_n} \geqslant 0$ або, що те саме, $\mu_{f_1+f_2+\ldots+f_n} \leqslant \nu$. Оскільки всі f_n невід'ємні, частинні суми ряду $\sum_{n=1}^\infty f_n$ утворюють зростаючу послідовність функцій. За теоремою 3 п. 7.1.4, ряд $\sum_{n=1}^\infty f_n$ збігається μ-майже скрізь до деякої функції $f \in L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$, і $\mu_f \leqslant v$. За побудовою, $\mu_{f_1+f_2+\ldots+f_n} \leqslant \mu_f$ при всіх n. Отже,

$$m(\mu, \nu - \mu_f) \leqslant m(\mu, \nu - \mu_{f_1+f_2+\ldots+f_n}) \leqslant 2 \int\limits_\Omega f_{n+1} d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Тобто $m(\mu, \nu - \mu_f) = 0$ і, згідно з лемою п. 7.1.5, $\nu - \mu_f \perp \mu$. Для завершення доведення залишилось покласти $\eta_1 = \mu_f$ і $\eta_2 = \nu - \mu_f$. □

Застосуємо останню теорему до часткового випадку, коли $\nu \ll \mu$. У цьому випадку з огляду на єдиність зображення $\nu = \eta_1 + \eta_2$ маємо $\nu = \eta_1$ і $\eta_2 = 0$. Відповідно, сам заряд ν має вигляд $\nu = \mu_f$. Розшифрувавши означення заряду μ_f, одержуємо такий глибокий результат, який належить Радону (J. Radon) і Никодиму (O. M. Nikodým).

Теорема 2. *Нехай заряд ν абсолютно неперервний відносно міри μ. Тоді існує така функція $f \in L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$, що $\int\limits_A f d\mu = \nu(A)$ для всіх $A \in \Sigma$.*

Як неважко переконатись (наприклад, зіславшись на теорему 2 п. 7.1.4), функція f в теоремі Радона-Никодима визначається мірою μ і зарядом ν однозначно з точністю до рівності майже скрізь за мірою μ. Ця функція f називається *похідною Радона-Никодима* заряду ν за мірою μ і позначається $\frac{d\nu}{d\mu}$.

Вправи

1. Обґрунтуйте співвідношення $\int_\Omega f_{n+1} d\mu \to 0$ $(n \to \infty)$ з доведення теореми 1.

2. Нехай $\nu \ll \mu$. Вимірна функція g на Ω інтегровна за зарядом ν тоді і тільки тоді, коли функція $g\frac{d\nu}{d\mu}$ інтегровна за мірою μ. При цьому $\int\limits_\Omega g\frac{d\nu}{d\mu} d\mu = \int\limits_\Omega g d\nu$.

7.2. Похідна й інтеграл на відрізку

У курсі аналізу формулу Ньютона-Лейбніца $\int\limits_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a)$ доведено тільки для неперервно диференційовних функцій. Нижче ми дамо повний опис тих функцій f, для яких виконується формула Ньютона-Лейбніца, якщо інтеграл розуміти в лебеговому сенсі. Ми побачимо, що такий опис тісно пов'язаний із питаннями, що вивчалися вище, — зарядами і теоремою Радона-Никодима. У цьому розділі розглянемо дійснозначні функції дійсного аргумента, а λ буде мірою Лебега на відповідному відрізку або на осі.

7.2.1. Інтеграл похідної

Теорема. *Нехай $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ — зростаюча функція. Тоді $f' \in L_1[a,b]$, і $\int\limits_a^b f'(t)dt \leqslant f(b) - f(a)$.*

Доведення. Зафіксуємо збіжну до нуля послідовність $\varepsilon_n > 0$ і розглянемо розділені різниці $f_n(t) = \frac{f(t+\varepsilon_n)-f(t)}{\varepsilon_n}$. Щоб ця формула мала сенс на всьому відрізку $[a,b]$, покладемо $f(x) = f(b)$ при $x > b$. Функції f_n інтегровні, невід'ємні, і

$$\int\limits_{[a,b]} f_n(t)d\lambda = \frac{1}{\varepsilon_n}\int\limits_{[a,b]}\Big(f(t+\varepsilon_n) - f(t)\Big)d\lambda = \frac{1}{\varepsilon_n}\Bigg(\int\limits_{[a+\varepsilon_n,b+\varepsilon_n]} f(t)d\lambda -$$

$$-\int\limits_{[a,b]} f(t)d\lambda\Bigg) = \frac{1}{\varepsilon_n}\Bigg(\int\limits_{[b,b+\varepsilon_n]} f(t)d\lambda - \int\limits_{[a,a+\varepsilon_n]} f(t)d\lambda\Bigg) \leqslant f(b) - f(a).$$

Далі, $f_n \overset{\text{м.с.}}{\to} f'$ на $[a,b]$. Отже, за лемою Фату, функція f' інтегровна на $[a,b]$ і

$$\int\limits_a^b f'(t)dt \leqslant \varliminf_{n\to\infty}\int\limits_a^b f_n(t)dt \leqslant f(b) - f(a). \qquad \square$$

Вправи

1. В умовах вищенаведеної теореми $\int_a^b f'(t)dt \leqslant f(b-0) - f(a+0)$.
2. Приклад зростаючої функції з $\int_a^b f'(t)dt \neq f(b) - f(a)$: $f = \mathbb{1}_{[1/2\ ,1]}$, $[a,b] = [0,1]$.
3. Навіть для неперервної зростаючої функції f формула Ньютона-Лейбніца може не виконуватись. Приклад — «канторова драбина» (п. 2.3.6).

7.2.2. Похідна інтеграла як функції верхньої межі інтегрування

Нехай $f \in L_1[a,b]$, F — «первісна» функції f: $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$.

Теорема 1. *Для будь-якої $f \in L_1[a,b]$ функція F неперервна на $[a,b]$.*

Доведення. Згідно з теоремою 1 п. 7.1.4, для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що для будь-якої множини $A \in \Sigma$, якщо $\mu(A) < \delta$, то $\int_A |f|d\mu < \varepsilon$. Застосувавши це твердження до $A = [x, x+\delta]$, одержуємо нерівність $|F(x) - F(x+\delta)| < \varepsilon$, що означає потрібну неперервність. $\square$

Лема. *Для будь-якої $f \in L_1[a,b]$ функція F диференційовна майже скрізь, $F' \in L_1[a,b]$ і $\int\limits_a^b |F'(t)|\,dt \leqslant \int\limits_a^b |f(t)|\,dt$.*

Доведення. Запишемо F у вигляді різниці $F = F_1 - F_2$ з $F_1(x) = \int\limits_a^x f^+(t)dt$ і $F_2(x) = \int\limits_a^x f^-(t)dt$. Функції F_1 і F_2 монотонні, отже, і вони, і F диференційовні майже скрізь, і їх похідні інтегровні. Далі,

$$\int\limits_a^b |F'(t)|\,dt = \int\limits_a^b |F_1'(t) - F_2'(t)|\,dt \leqslant \int\limits_a^b F_1'(t)dt + \int\limits_a^b F_2'(t)dt \leqslant$$

$$\leqslant F_1(b) - F_1(a) + F_2(b) - F_2(a) = \int\limits_a^b f^+(t)dt + \int\limits_a^b f^-(t)dt = \int\limits_a^b |f(t)|\,dt. \qquad \square$$

Теорема 2. *$F' \overset{\text{м.с.}}{=} f$ для будь-якої функції $f \in L_1[a,b]$. Іншими словами, похідна інтеграла Лебега як функції верхньої межі інтегрування майже скрізь дорівнює підінтегральній функції.*

Доведення. Розглянемо лінійний оператор T, що діє з $L_1[a,b]$ в $L_1[a,b]$ за правилом $Tf = F' - f$. За попередньою лемою,

$$\|Tf\| = \int\limits_a^b |F'(t) - f(t)|\, dt \leqslant 2 \int\limits_a^b |f(t)|\, dt = 2\,\|f\|\,,$$

тобто оператор T неперервний. Для $f \in C[a,b]$, на підставі відомої теореми аналізу, $Tf = 0$. Оскільки множина $C[a,b]$ неперервних функцій щільна в $L_1[a,b]$, звідси випливає, що $T = 0$ на всьому $L_1[a,b]$, що й потрібно було довести. □

Вправи

1. Нехай A — вимірна підмножина відрізка. Застосувавши останню теорему до функції $f = \mathbb{1}_A$, виведіть звідси розв'язок вправи 4 п. 2.3.3 про точки щільності множини.

2. Доведіть, що канторова драбина не може бути первісною для жодної інтегровної функції f.

7.2.3. Функції обмеженої варіації та загальний вигляд борелевого заряду на відрізку

Оскільки основні властивості функцій обмеженої варіації зазвичай викладаються в курсі математичного аналізу (як основа теорії інтеграла Стілтьєса), ми нагадаємо ці властивості без доведень. Читач, який упустив раніше поняття, які наводяться нижче, може або поставитись до матеріалу цього пункту як до ланцюжка вправ, що пропонуються для самостійного розв'язування, або прочитати детальний виклад за підручником, наприклад, А. Колмогорова, С. Фоміна [K-F].

Означення 1. *Варіацією функції f на відрізку* $[a,b]$ називається величина

$$V_a^b(f) = \sup\left\{\sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)|\right\},$$

де супремум береться за всіма скінченними диз'юнктними наборами відкритих підвідрізків (a_k, b_k) відрізка $[a,b]$. Якщо $V_a^b(f) < \infty$, то f називається *функцією обмеженої варіації* на $[a,b]$.

Згідно з означенням, варіація функції — величина невід'ємна.

1. Супремум в означенні варіації $V_a^b(f)$ досить брати за такими наборами підвідрізків (a_k, b_k) відрізка $[a,b]$, що $a = a_1 < b_1 = a_2 < \ldots < b_n = b$. Іншими словами, за диз'юнктними наборами, які дають в об'єднанні весь $[a,b]$, за винятком скінченної кількості точок. Саме в такій формі означення варіації найчастіше подається в літературі.

2. Множина функцій обмеженої варіації на фіксованому відрізку $[a,b]$ утворює лінійний простір, і V_a^b — опуклий функціонал на цьому просторі.

3. Монотонні функції мають обмежені варіації: $V_a^b(f) = |f(b) - f(a)|$. Відповідно і лінійні комбінації монотонних функцій мають обмежені варіації.

4. $V_a^b(f) = V_a^c(f) + V_c^b(f)$ для будь-яких $a < c < b$.

5. Кожну функцію f обмеженої варіації можна подати у вигляді різниці двох зростаючих функцій: $f = f_1 - f_2$, де $f_1(t) = V_a^t(f)$, $f_2(t) = V_a^t(f) - f(t)$.

Лема. *Кожна неперервна справа функція f обмеженої варіації на відрізку $[a,b]$ зображається у вигляді різниці двох зростаючих неперервних справа функцій.*

Доведення. Спочатку запишемо f як різницю $f_1 - f_2$ деяких зростаючих функцій. Означимо потрібні функції g_1, g_2 формулами $g_1(t) = \lim\limits_{x\to t+0} f_1(x)$ і $g_2(t) = \lim\limits_{x\to t+0} f_2(x)$ при $t \in [a,b)$ і покладемо $g_1(b) = f_1(b)$, $g_2(b) = f_2(b)$. Ці функції вже будуть неперервними справа, і

$$f(t) = \lim_{x\to t+0} f(x) = \lim_{x\to t+0} (f_1(x) - f_2(x)) = g_1(t) - g_2(t). \qquad \square$$

Означення 2. *Борелевим зарядом* на відрізку $[a,b]$ називається заряд, заданий на сім'ї всіх борелевих підмножин відрізка $[a,b]$. *Функцією розподілу борелевого заряду ν* на $[a,b]$ називається функція $F_\nu(t) = \nu([a,t])$.

У п. 2.3.5 доведено, що, поставивши у відповідність кожній скінченній борелевій мірі μ на відрізку $[a,b]$ її функцію розподілу $F_\mu(t) = \mu([a,t])$, можна встановити взаємно однозначну відповідність між борелевими мірами на $[a,b]$ і зростаючими неперервними справа функціями на цьому відрізку. Цей факт разом із вищенаведеною лемою дають такий результат.

Теорема. *Відображення $\nu \mapsto F_\nu$ здійснює лінійну бієктивну відповідність між сім'єю всіх борелевих зарядів на відрізку $[a,b]$ і множиною всіх неперервних справа функцій обмеженої варіації на $[a,b]$.*

Доведення. Співвідношення лінійності $F_{\nu_1+\nu_2} = F_{\nu_1} + F_{\nu_2}$ і $F_{c\nu} = cF_\nu$ випливають безпосередньо з означення функції розподілу борелевого заряду. Далі, $F_\nu = F_{\nu^+} - F_{\nu^-}$, тобто функція F_ν зображається у вигляді різниці двох функцій розподілу мір — зростаючих неперервних справа функцій. Отже, F_ν — неперервна справа функція обмеженої варіації. Навпаки, будь-яка неперервна справа функція обмеженої варіації f зображується у вигляді різниці $f = f_1 - f_2$ двох зростаючих неперервних справа функцій, кожна з яких, у свою чергу, може бути записана як функція розподілу відповідної борелевої міри: $f_1 = F_{\mu_1}$, $f_2 = F_{\mu_2}$. Отже, $f = F_{\mu_1-\mu_2}$. Цим доведено сюр'єктивність відображення. Доведемо, нарешті, ін'єктивність. Нехай $F_\nu = 0$. Тоді $F_{\nu^+} = F_{\nu^-}$. Але, згідно з теоремою 2 п. 2.3.5, якщо функції розподілу двох борелевих мір на відрізку збігаються, то збігаються і самі міри. Тому $\nu^+ = \nu^-$, тобто $\nu = \nu^+ - \nu^- = 0$. $\square$

Вправи

1. Якщо до функції додати сталу, то варіація не зміниться.

2. Поняття *варіації заряду* і варіації функції узгоджені: якщо ν — борелів заряд на $[a,b]$ і точка a не є атомом цього заряду, то $V_a^b(F_\nu) = |\nu|([a,b])$.

3. У загальному випадку $V_a^t(F_\nu) = F_{|\nu|}(t) - |\nu|(\{a\})$.

4. Нехай функція f обмеженої варіації неперервна на $[a,b]$. Тоді функція $f_1(t) = V_a^t(f)$ також неперервна на $[a,b]$.

7.2.4. Абсолютно неперервні функції

Функція f на відрізку $[a,b]$ називається *абсолютно неперервною*, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що на будь-якому скінченному наборі неперетинних відкритих підвідрізків $(a_k, b_k) \subset [a,b]$, $k = 1, ..., n$, з $\sum_{k=1}^n |b_k - a_k| \leqslant \delta$ (тобто сумарної довжини, що не перевищує δ), сумарне коливання функції не перевищує ε: $\sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| \leqslant \varepsilon$.

Зазначимо, що кожна абсолютно неперервна функція неперервна (застосувати означення, взявши за набір відрізків один відрізок довжини, меншої за δ), і будь-яка лінійна комбінація абсолютно неперервних функцій також абсолютно неперервна.

Теорема. *Нехай f — абсолютно неперервна функція на відрізку $[a,b]$. Тоді f — функція обмеженої варіації. Більше того, функції $f_1(t) = V_a^t(f)$ і $f_2(t) = V_a^t(f) - f(t)$ також абсолютно неперервні, тобто f зображається у вигляді різниці $f_1 - f_2$ двох зростаючих абсолютно неперервних функцій.*

Доведення. Візьмемо $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ з означення абсолютної неперервності. Зафіксуємо набір попарно неперетинних відрізків $(c_n, d_n) \subset [a,b]$, $n = 1, \ldots, N$ з $\sum_{n=1}^N |d_n - c_n| \leqslant \delta$. На кожному з (c_n, d_n) виберемо скінченний набір неперетинних підвідрізків $(a_{k,n}, b_{k,n}) \subset (c_n, d_n)$, $k = 1, 2, \ldots, m_n$. Тоді $\sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^{m_n} |b_{k,n} - a_{k,n}| \leqslant \delta$, отже $\sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^{m_n} |f(b_{k,n}) - f(a_{k,n})| \leqslant \varepsilon$. Взявши супремум за всіма наборами $(a_{k,n}, b_{k,n})$, отримаємо оцінку

$$\sum_{n=1}^{N} V_{c_n}^{d_n}(f) \leqslant \varepsilon \tag{*}$$

для будь-яких диз'юнктних $(c_n, d_n) \subset [a,b]$ з $\sum_{n=1}^N |d_n - c_n| \leqslant \delta$.

Усі твердження теореми випливають з цієї оцінки. Справді, розіб'ємо $[a,b)$ на скінченне число неперетинних підвідрізків $[c_k, d_k) \subset [a,b]$, $k = 1, 2, \ldots, m$, довжина кожного з яких не перевищує δ. Тоді

$$V_a^b(f) = \sum_{k=1}^{m} V_{c_k}^{d_k}(f) \leqslant m\varepsilon < \infty,$$

тобто f — це функція обмеженої варіації. Далі, умова (*) означає абсолютну неперервність функції f_1, а з нею і функції $f_2 = f_1 - f$. □

Вправи

1. Нехай послідовність f_n функцій на $[a,b]$ збігається поточково до функції f. Тоді $V_a^b(f) \leqslant \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} V_a^b(f_n)$.

2. Позначимо через $\mathrm{bv}[a,b]$ лінійний простір функцій обмеженої варіації на $[a,b]$. Перевірте, що V_a^b — напівнорма на $\mathrm{bv}[a,b]$ (означення напівнорми див. у вправах п. 6.1.3).

3. Доведіть, що ядро напівнорми V_a^b складається зі сталих.

4. Розглянемо фактор-простір простору $\mathrm{bv}[a,b]$ за підпростором X сталих. Означимо норму будь-якого класу еквівалентності $[f] \in \mathrm{bv}[a,b]/X$ рівністю $\|[f]\| = V_a^b(f)$. Перевірте коректність такого означення. Одержаний нормований простір $\mathrm{bv}[a,b]/X$ позначається $V[a,b]$.

5. Означимо оператор $T\colon V[a,b] \to L_1[a,b]$ рівністю $Tf = f'$ (оператор взяття похідної). Перевірте, що T — неперервний лінійний оператор.

6. Спираючись на попередню вправу, доведіть теорему Фубіні про диференційовність ряду (вправа 3 п. 2.3.3).

7. $V[a,b]$ — банахів простір.

Через $\mathrm{AC}[a,b]$ позначимо підмножину простору $V[a,b]$, утворену класами еквівалентності абсолютно неперервних функцій.

8. $\mathrm{AC}[a,b]$ — замкнений підпростір простору $V[a,b]$.

7.2.5. Абсолютно неперервні функції й абсолютно неперервні борелеві заряди

Теорема. *Для функції розподілу F борелевої міри μ на відрізку $[a, b]$ такі умови еквівалентні:*

A. *F абсолютно неперервна і $F(a) = 0$;*

B. *Міра μ абсолютно неперервна щодо міри Лебега λ.*

Доведення. B⇒A. Нагадаємо спочатку, що міри напіввідкритих підвідрізків можна обчислювати за формулою $\mu((t_1, t_2]) = F(t_2) - F(t_1)$. Якщо $\mu \ll \lambda$, то, згідно з теоремою п. 7.1.3, для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що будь-яка борелева множина $A \subset [a, b]$ з $\lambda(A) < \delta$ має $\mu(A) < \varepsilon$. Розглянемо набір неперетинних відкритих підвідрізків $(a_k, b_k) \subset [a, b]$, $k = 1, 2, ..., n$, з $\sum_{k=1}^{n} |b_k - a_k| \leqslant \delta$ і візьмемо $A = \bigcup_{k=1}^{n} (a_k, b_k]$. Тоді $\lambda(A) < \delta$ і, відповідно, $\mu(A) = \sum_{k=1}^{n} (F(b_k) - F(a_k)) < \varepsilon$. Цим доведено абсолютну неперервність функції F. Умова ж $F(a) = 0$ випливає з того, що одноточкова множина $\{a\}$ має нульову міру Лебега, отже, і $\mu(\{a\}) = 0$.

A⇒B. Нехай F абсолютно неперервна, $\varepsilon > 0$ — довільне число, і $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ взяте з означення абсолютно неперервної функції. Доведемо спочатку, що $\mu(A) \leqslant \varepsilon$ для будь-якої відкритої підмножини $A \subset [a, b]$ з $\lambda(A) < \delta$. Справді, така відкрита множина має вигляд $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k)$ з $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k - a_k| \leqslant \delta$. (Якщо бути зовсім точним, то два з цих відрізків, які лежать на початку і в кінці відрізка $[a, b]$, можуть бути напіввідкритими). Тоді $\sum_{k=1}^{n} (F(b_k) - F(a_k)) < \varepsilon$ для будь-якого $n \in \mathbb{N}$. Відповідно,

$$\mu(A) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} (F(b_k) - F(a_k)) \leqslant \varepsilon.$$

Доведемо тепер потрібну абсолютну неперервність міри μ щодо міри Лебега. Нехай $D \subset [a, b]$ — множина нульової міри Лебега. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує відкрита множина $A \subset [a, b]$, яка містить D, з $\lambda(A) < \delta(\varepsilon)$. Отже, $\mu(D) \leqslant \mu(A) \leqslant \varepsilon$. З огляду на довільність ε цим доведено потрібну рівність $\mu(D) = 0$. □

Наслідок. *Нехай f — абсолютно неперервна функція на $[a, b]$, $f(a) = 0$. Тоді існує борелів заряд ν, абсолютно неперервний щодо міри Лебега, пов'язаний на $[a, b]$ з f рівністю $f(t) = \nu([a, t])$.*

Доведення. Зобразимо f у вигляді різниці $f_1 - f_2$ двох зростаючих абсолютно неперервних функцій (основна теорема попереднього пункту), які дорівнюють нулю в точці a. Для кожної з цих функцій f_j побудуємо борелеву міру μ_j, яка має функцію розподілу f_j. Заряд ν визначимо як $\mu_1 - \mu_2$. □

Вправи

1. Чому функції f_1, f_2 в останньому доведенні можна вибрати рівними нулю в точці a?
2. Канторова драбина (п. 2.3.6) — це приклад неперервної, але не абсолютно неперервної функції на відрізку.

7.2.6. Відновлення функції за її похідною

Ми провели велику підготовчу роботу і переходимо, нарешті, до умов виконання формули Ньютона-Лейбніца для інтеграла Лебега. Звертаємо увагу читача, що доведення, зовні просте і коротке, істотно використовує глибокі результати, які групуються навколо теореми Радона-Никодима.

Теорема. *Для функції F на відрізку $[a,b]$ такі умови еквівалентні:*

(1) F абсолютно неперервна;

(2) F зображувана у вигляді $F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt$, $f \in L_1[a,b]$ (тобто, в термінології п. 7.2.2, $F(x) - F(a)$ — це «первісна» деякої функції з $L_1[a,b]$);

(3) F диференційовна майже скрізь на $[a,b]$, $F' \in L_1[a,b]$, і для будь-якого $x \in [a,b]$ правильна формула Ньютона-Лейбніца $F(x) - F(a) = \int_a^x F'(t)dt$.

Доведення. (1)⇒(2). Згідно з наслідком з попереднього пункту, існує борелів заряд μ на $[a,b]$, для якого функція $F(x) - F(a)$ є функцією розподілу. Оскільки заряд μ абсолютно неперервний щодо міри Лебега λ (теорема з попереднього пункту), ми можемо скористатись теоремою Радона-Никодима (теорема 2 п. 7.1.6). За цією теоремою, існує така функція $f \in L_1[a,b]$, що $\int_A f d\lambda = \mu(A)$ для всіх борелевих підмножин відрізка $[a,b]$. Підставивши замість A підвідрізок $[a,x]$, отримаємо, що

$$F(x) - F(a) = \mu([a,x]) = \int\limits_a^x f(t)dt.$$

(2)⇒(1). Умова $F(x) - F(a) = \int_a^x f(t)dt$ означає, що $F(x) - F(a)$ — це функція розподілу заряду λ_f (див. п. 7.1.4), який задається рівністю $\lambda_f(A) = \int_A f d\lambda$. Такий заряд абсолютно неперервний щодо міри Лебега, отже, абсолютно неперервна і його функція розподілу.

(2)⇒(3). Достатньо скористатись теоремою 2 п. 7.2.2 про похідну інтеграла як функції верхньої межі інтегрування.

(3)⇒(2). За f потрібно взяти F'. □

7.2.7. Вправи: заміна змінних в інтегралі Лебега

Нехай Ω і Ω_1 — множини, Σ — σ-алгебра на Ω і $F\colon \Omega \to \Omega_1$ — довільне відображення. Задамо на Ω_1 сім'ю підмножин $\Sigma_1 : A \in \Sigma_1 \Leftrightarrow F^{-1}(A) \in \Sigma$.

1. Сім'я Σ_1 утворює σ-алгебру на Ω_1.

Далі, нехай μ — заряд на Σ. *Образом заряду μ при відображенні F* називається функція множини $F(\mu)\colon \Sigma_1 \to \mathbb{R}$, яка визначається рівністю $(F(\mu))(A) = \mu(F^{-1}(A))$.

2. $F(\mu)$ — зліченно-адитивний заряд, причому якщо μ — міра, то $F(\mu)$ — теж міра.

3. При фіксованому F відображення $\mu \mapsto F(\mu)$ лінійне.

4. Наведіть приклад, коли $F(\mu)$ — міра, хоча заряд μ не є мірою.

5. Якщо (Ω, Σ, μ) — повний простір з мірою, то простір $(\Omega_1, \Sigma_1, F(\mu))$ також повний.

6. Чи може простір з мірою $(\Omega_1, \Sigma_1, F(\mu))$ бути повним, якщо простір з мірою (Ω, Σ, μ) неповний?

7. Нехай відображення F ін'єктивне і простір з мірою $(\Omega_1, \Sigma_1, F(\mu))$ повний. Тоді повний і (Ω, Σ, μ).

8. Нехай μ — міра і $F(\mu)$ безатомна. Тоді у μ теж нема атомів.

9. Функція $f\colon \Omega_1 \to \mathbb{R}$ інтегровна за мірою $F(\mu)$ тоді і тільки тоді, коли композиція $f \circ F$ інтегровна за мірою μ. При цьому $\int_\Omega f \circ F\, d\mu = \int_{F(\Omega)} f\, dF(\mu)$.

Конкретизуємо описану вище конструкцію для випадку функцій дійсної змінної і міри Лебега λ. Нехай F — це зростаюча неперервна функція на відрізку $[a,b]$. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що F — це функція розподілу деякої безатомної борелевої міри μ на відрізку $[a,b]$.

10. Для будь-якого відрізка $[c, d] \subset [F(a), F(b)]$ виконується рівність $(F(\mu))([c, d]) = d - c$. Іншими словами, обмеження міри $F(\mu)$ на σ-алгебру борелевих підмножин відрізка $[F(a), F(b)]$ збігається з мірою Лебега λ на $[F(a), F(b)]$.

11. В умовах попередньої вправи для будь-якої функції $f \in L_1 [F(a), F(b)]$ виконується співвідношення $\int_a^b f \circ F \, d\mu = \int_{F(a)}^{F(b)} f \, d\lambda$.

Нагадаємо, що монотонна функція F на відрізку є абсолютно неперервною тоді і тільки тоді, коли породжена нею міра μ абсолютно неперервна щодо міри Лебега і похідна Радона-Никодима $\frac{d\mu}{d\lambda}$ збігається з F'. Отже, за умови абсолютної неперервності функції F формула з попередньої вправи набуває добре знайомого вигляду:

12. $\int\limits_a^b f(F(x))F'(x) \, dx = \int\limits_{F(a)}^{F(b)} f(t) \, dt$, де інтеграли в обох частинах рівності розуміємо в сенсі інтеграла Лебега.

13. Домовимось для інтеграла Лебега, як і для інтеграла Рімана, вважати, що $\int_c^d g(x)dx = -\int_d^c g(x)dx$. Доведіть, що формула

$$\int\limits_a^b f(F(x))F'(x) \, dx = \int\limits_{F(a)}^{F(b)} f(t) \, dt$$

залишається правильною для будь-якої, не обов'язково монотонної, абсолютно неперервної функції F на відрізку $[a, b]$ і будь-якої функції f із класу $L_1 [F([a, b])]$.

Коментарі до вправ

7.1.1.

Вправа 5. Нехай $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ — послідовність попарно неперетинних вимірних множин, $\Delta = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k$. Тоді множини $A_n = \bigcup_{k=n+1}^{\infty} \Delta_k$ утворюють спадний ланцюг множин з порожнім перетином. Отже,

$$\lim_{n \to \infty} \left(\nu(\Delta) - \sum_{k=1}^{n} \nu(\Delta_k) \right) = \lim_{n \to \infty} \nu(A_n) = 0.$$

7.1.4

Вправа 4. Достатньо довести твердження для додатних f: загальний випадок виводиться окремим розглядом множин $\Omega^+ = \{t : f(t) > 0\}$ і $\Omega^- = \{t : f(t) < 0\}$. З тієї ж причини можна вважати, що і $g \geqslant 0$. За означенням μ_f для $g = \mathbb{1}_A$ з $A \in \Sigma$, обидва інтеграли існують і однакові; за теоремою Леві про ряди, твердження буде виконуватись для зліченнозначних функцій $g \geqslant 0$. Тепер нехай g — довільна невід'ємна вимірна функція. За наслідком з теореми 3 п. 3.1.4 існує зростаюча послідовність $g_n \geqslant 0$ зліченнозначних функцій з $g_n - g \leqslant 1/n$. Припустимо, що існує $\int_\Omega gf \, d\mu$. Тоді, оскільки $g + 1/n$ мають μ-інтегровну мажоранту $g + 1/n$, то існують $\int_\Omega g_n f \, d\mu$. Для зліченнозначних функцій теорему вже доведено, отже, існують $\int_\Omega g_n d\mu_f$, причому $\int_\Omega g_n f \, d\mu = \int_\Omega g_n d\mu_f$. Граничним переходом, застосовуючи теорему Леві про послідовності, робимо висновок, що існує $\int_\Omega g d\mu_f$ і $\int_\Omega gf \, d\mu = \int_\Omega g d\mu_f$. Зворотна імплікація (якщо існує $\int_\Omega g d\mu_f$, то існує і $\int_\Omega gf \, d\mu$) виводиться так само.

7.1.6

Вправа 1. З нерівності $\mu_{f_1+f_2+\ldots+f_n} \leqslant \nu$ випливає, що

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_\Omega f_n d\mu \leqslant \nu(\Omega).$$

Отже, загальний член ряду прямує до нуля.

Вправа 2. Див. 7.1.4, вправа 4 і коментар до неї.

7.2.3

Вправа 4. Нехай ν — такий борелів заряд, що $f - f(a) = F_\nu$. Заряд ν не має атомів (якщо t_0 — атом, то в цій точці у f був би розрив), отже, безатомна й міра $|\nu|$ (вправа 3 п. 7.1.2). Відповідно, неперервна і функція, яка нас цікавить $f_1 = F_{|\nu|}$.

Проте прямими міркуваннями тут можна одержати більше: якщо f неперервна справа в деякій точці $t_0 \in [a, b)$, то $f_1(t) = V_a^t(f)$ також неперервна справа в цій точці. За симетрією (заміною функції $f(x)$ на $f(-x)$), звідси випливає аналогічний факт і для неперервності зліва.

Справді, зафіксуємо $\varepsilon > 0$ і виберемо такий скінченний набір відкритих підвідрізків (a_k, b_k), $t_0 = a_1 < b_1 = a_2 < \ldots < b_n = b$, відрізка $[t_0, b]$, що $V_{t_0}^b(f) \leqslant \sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| + \varepsilon$. Виберемо тепер $\delta \in (t_0, b_1]$ у такий спосіб, щоб виконувалась нерівність $|f(\delta) - f(t_0)| < \varepsilon$. Тоді

$$V_\delta^b(f) \geqslant |f(b_1) - f(\delta)| + \sum_{k=2}^n |f(b_k) - f(a_k)| \geqslant$$
$$\geqslant \sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| - \varepsilon \geqslant V_{t_0}^b(f) - 2\varepsilon.$$

Відповідно,

$$|f_1(t_0) - f_1(\delta)| = V_{t_0}^\delta(f) = V_{t_0}^b(f) - V_\delta^b(f) \leqslant 2\varepsilon.$$