Розділ 4. Інтеграл Лебега

4.1. Збіжність за напрямленістю. Розбиття

4.1.1. Напрямленості

Нагадаємо, що відношення $\succ$ на множині G називається *відношенням порядку*, якщо воно задовольняє такі умови:

1. $g \succ g$ для будь-якого $g \in G$ (рефлексивність);
2. Якщо $g_2 \succ g_1$ і $g_1 \succ g_2$, то $g_1 = g_2$ (антисиметричність);
3. Якщо $g_2 \succ g_1$ і $g_3 \succ g_2$, то $g_3 \succ g_1$ (транзитивність).

Множина G із введеним на ній бінарним відношенням $\succ$ називається *напрямленою множиною* або *напрямленістю*, якщо виконані такі умови:

(a) $g \succ g$ для будь-якого $g \in G$;

(b) якщо $g_2 \succ g_1$ і $g_3 \succ g_2$, то $g_3 \succ g_1$;

(c) для будь-яких двох елементів $g_1, g_2 \in G$ існує елемент g_3, що є наступним за обома: $g_3 \succ g_1$ і $g_3 \succ g_2$.

Зазначимо, що часто в означенні напрямленої множини вимагають, щоб відношення $\succ$ було відношенням порядку, в нашому ж означенні напрямленість може не підпорядковуватись аксіомі 2 відношення порядку.

Вправи

У яких із перелічених нижче прикладів відношення $\succ$ на множині $\mathbb{Z}$ цілих чисел є відношенням порядку? В яких прикладах $(\mathbb{Z}, \succ)$ — напрямлена множина?

1. $n_1 \succ n_2$, якщо $n_1 > n_2$.
2. $n_1 \succ n_2$, якщо $n_1 \geqslant n_2$.
3. $n_1 \succ n_2$, якщо $n_1 \leqslant n_2$.
4. $n_1 \succ n_2$, якщо $|n_1| \geqslant |n_2|$.
5. $n_1 \succ n_2$, якщо $n_1 \geqslant n_2$ і n_1 ділиться без остачі на n_2.
6. $n_1 \succ n_2$, якщо $n_1 \geqslant n_2$ і $n_1 - n_2$ ділиться без остачі на 2.

Нехай $(G, \succ)$ — напрямлена множина. Назвемо елементи $g_1, g_2 \in G$ еквівалентними ($g_1 \sim g_2$), якщо $g_2 \succ g_1$ і $g_1 \succ g_2$.

7. Перевірте, що відношення «$\sim$» є відношенням еквівалентності.

Наведений учбовий текст є витягом з підручнику
Кадець В.М. Курс функціонального аналізу та теорії міри. – Львів: Видавець І.Е. Чижиков, 2012. – 590 с. – (Серія "Університетська бібліотека") ISBN 978-966-2645-03-3
Усі посилання на теореми, вправи, означення, такі що не увійшли до цього тексту – це посилання на підручник.

4.1.2. Границя за напрямленістю. Критерій Коші

Нехай $(G, \succ)$ — напрямлена множина, $f\colon G \to \mathbb{R}$ — деяка функція. Число $a \in \mathbb{R}$ називається *границею функції f за напрямленістю* $(G, \succ)$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує такий елемент $g \in G$, що для будь-якого $g_1 \succ g$ виконується нерівність $|f(g_1) - a| < \varepsilon$. Позначення: $a = \lim\limits_{(G,\succ)} f$, або, якщо напрямленість зрозуміла з контексту, $a = \lim_g f(g)$. Функція $f\colon G \to \mathbb{R}$ називається *збіжною за напрямленістю* $(G, \succ)$, якщо існує $\lim\limits_{(G,\succ)} f$.

Зазначимо найпростіші властивості границі за напрямленістю:

1. Якщо $a = \lim\limits_{(G,\succ)} f$, то для будь-якого $g \in G$ і будь-якого $\varepsilon > 0$ існує такий елемент $g_1 \succ g$, що $|f(h) - a| < \varepsilon$ для будь-якого $h \succ g_1$.

2. Якщо $a = \lim\limits_{(G,\succ)} f$ і $b = \lim\limits_{(G,\succ)} f$, то $a = b$ (єдиність границі).

3. Нехай для функцій f_1, f_2 існує таке $g \in G$, що $f_1(h) = f_2(h)$ для будь-якого $h \succ g$. Тоді, якщо одна з цих функцій збігається за напрямленістю $(G, \succ)$, то й інша збігається, і $\lim\limits_{(G,\succ)} f_1 = \lim\limits_{(G,\succ)} f_2$. Тому для означення границі функція не обов'язково має бути визначеною скрізь на G. Достатньо, щоб функція була визначена для всіх h, які наступні за деяким фіксованим елементом $g \in G$.

4. Нехай $f_1 \leqslant f_2$ і границі функцій f_1 і f_2 за напрямленістю G існують. Тоді $\lim\limits_{(G,\succ)} f_1 \leqslant \lim\limits_{(G,\succ)} f_2$.

5. Нехай $a_1 = \lim\limits_{(G,\succ)} f_1$, $a_2 = \lim\limits_{(G,\succ)} f_2$ і функція двох змінних $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ неперервна в точці (a_1, a_2). Тоді $\lim_g F(f_1(g), f_2(g))$ існує і дорівнює $F(a_1, a_2)$.

6. Якщо існує $\lim\limits_{(G,\succ)} f$, то для будь-якого скаляра $t \in \mathbb{R}$ існує $\lim\limits_{(G,\succ)} tf$ і $\lim\limits_{(G,\succ)} tf = t \lim\limits_{(G,\succ)} f$.

7. Якщо $a_1 = \lim\limits_{(G,\succ)} f_1$ і $a_2 = \lim\limits_{(G,\succ)} f_2$, то $a_1 + a_2 = \lim\limits_{(G,\succ)} (f_1 + f_2)$.

Доведемо наприклад властивість 5 (до речі, властивості 6 і 7 випливають з 5). Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ і виберемо $\delta > 0$ так, щоб для будь-якої точки $(b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ з нерівності $\max\{|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|\} < \delta$ випливало, що $|F(a_1, a_2) - F(b_1, b_2)| < \varepsilon$. Оскільки $a_1 = \lim\limits_{(G,\succ)} f_1$, то існує таке $g \in G$, що для будь-якого $h \succ g$ виконується нерівність $|f_1(h) - a_1| < \delta$. Оскільки $a_2 = \lim\limits_{(G,\succ)} f_2$, то за першою з перерахованих вище властивостей існує такий елемент $g_1 \succ g$, що $|f_2(h) - a_2| < \delta$ для будь-якого $h \succ g_1$. Тоді для будь-якого $h \succ g_1$ виконуються обидві нерівності $|f_1(h) - a_1| < \delta$ і $|f_2(h) - a_2| < \delta$. Отже, для будь-якого $h \succ g_1$ маємо

$$|F(a_1, a_2) - F(f_1(h), f_2(h))| < \varepsilon,$$

що і треба було довести.

Теорема (критерій Коші збіжності за напрямленістю). *Для того, щоб функція $f\colon G \to \mathbb{R}$ збігалась за напрямленістю $(G, \succ)$, необхідно і достатньо, щоб для будь-якого $\varepsilon > 0$ існував такий елемент $g \in G$, що $|f(g) - f(h)| < \varepsilon$ для будь-якого $h \succ g$.*

Доведення. Необхідність. Нехай f збігається за напрямленістю $(G, \succ)$ і $\lim_g f(g) = a$. За означенням границі, для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує такий елемент $g \in G$, що для будь-якого $h \succ g$ виконується нерівність $|f(h) - a| < \varepsilon/2$. Тоді для будь-якого h, що є наступником g,

$$|f(g) - f(h)| \leqslant |f(g) - a| + |a - f(h)| < \varepsilon.$$

Достатність. Скористаємось спочатку умовою теореми з $\varepsilon = 1$. Нехай $g_1 \in G$ — такий елемент, що $|f(g_1) - f(h)| < 1$ для будь-якого $h \succ g_1$. Тепер скористаємось умовою з $\varepsilon = 1/2$. Позначимо через g_2 такий елемент, що $g_2 \succ g_1$ і $|f(g_2) - f(h)| < 1/2$ для будь-якого h, що є наступником g_2. Продовжуючи це міркування, отримаємо таку послідовність $g_1 \prec g_2 \prec g_3 \prec \ldots$, що для будь-якого $h \succ g_n$ виконується нерівність $|f(g_n) - f(h)| < 1/n$. Зокрема, $|f(g_n) - f(g_m)| < 1/n$ для будь-яких $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$. Отже, числова послідовність $(f(g_n))$ задовольняє умову Коші і, тому, збіжна. Позначимо $\lim_{n\to\infty} f(g_n)$ через a. Доведемо, що $\lim_g f(g) = a$. Справді, для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує такий номер n_0, що $\frac{2}{n_0} < \varepsilon$. За побудовою, для будь-якого $h \succ g_{n_0}$ маємо $|f(g_{n_0}) - f(h)| < \frac{1}{n_0}$. Зокрема, оскільки $g_n \succ g_{n_0}$ для будь-якого $n > n_0$, то одержуємо, що для будь-якого $n > n_0$ і будь-якого $h \succ g_{n_0}$ правильна оцінка

$$|f(g_n) - f(h)| \leqslant |f(g_n) - f(g_{n_0})| + |f(g_{n_0}) - f(h)| < \frac{1}{n_0} + \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

Перейшовши в отриманій нерівності $|f(g_n) - f(h)| < \varepsilon$ до границі при $n \to \infty$, отримаємо, що $|a - f(h)| \leqslant \varepsilon$ для будь-якого $h \succ g_{n_0}$. □

Вправи

1. Задамо на $\mathbb{R}$ природну напрямленість: $a \succ b$, якщо $a \geqslant b$. Перевірте, що границя функції за цією напрямленістю збігається з границею при $t \to +\infty$.

2. Опишіть інші відомі з курсу аналізу приклади границь ($\lim\limits_{t\to-\infty}$, $\lim\limits_{t\to\infty}$, $\lim\limits_{t\to a}$, $\lim\limits_{t\to a-0}$) як границі за відповідними напрямленостями.

3. Інтеграл Рімана визначається як границя інтегральних сум. Запишіть цей тип границь також як границю за деякою напрямленістю.

4. Нехай $\mathbb{N}_f$ — сім'я всіх скінченних підмножин множини натуральних чисел. Вважатимемо, що скінченна множина A є наступником скінченної множини B, якщо $A \supset B$. Перевірте, що в такому відношенні порядку $\mathbb{N}_f$ — напрямлена множина.

5. Нехай (a_n) — довільна числова послідовність. Означимо функцію $s \colon \mathbb{N}_f \to \mathbb{R}$ формулою $s(A) = \sum_{n\in A} a_n$. Доведіть, що у функції s існує границя за напрямленістю $\mathbb{N}_f$ тоді і тільки тоді, коли ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається абсолютно. У цьому випадку $\lim_A s(A) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

6. Означити границю за напрямленістю для функцій зі значеннями в довільному топологічному просторі. Довести, що для функцій зі значеннями в повних метричних просторах виконується критерій Коші збіжності за напрямленістю.

4.1.3. Розбиття

З цього підрозділу до підрозділу 4.5 включно (Ω, Σ, μ) буде фіксованим простором зі скінченною мірою, A — вимірною підмножиною в Ω (тобто $A \in \Sigma$). Функції f, f_n, якщо не обумовлено інше, визначені на A і набувають дійсні значення.

Нехай $A \in \Sigma$ — довільна непорожня множина. *Розбиттям множини A* називається скінченний або зліченний набір D попарно неперетинних непорожніх вимірних підмножин $\Delta_k \subset A$, $k = 1, 2, \ldots$, які дають в об'єднанні все A. Щоб не розглядати щоразу окремо випадки скінченного і зліченного числа елементів у розбитті, надалі записуватимемо розбиття як набори зліченного числа вимірних підмножин, маючи на увазі, що випадок скінченного числа також можливий.

Розбиття $D = \{\Delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ множини A назвемо *допустимим для функції* f, якщо для кожного елемента $\Delta_k \in D$ ненульової міри

$$\sup_{t\in\Delta_k} |f(t)| < \infty$$

і

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sup_{t\in\Delta_k} [|f(t)|\,\mu(\Delta_k)] < \infty.$$

За означенням, розбиття $D_1 = \{\Delta_k^1\}_{k=1}^{\infty}$ є наступником розбиття $D_2 = \{\Delta_k^2\}_{k=1}^{\infty}$, якщо D_1 є *подрібненням розбиття* D_2. Іншими словами, $D_1 \succ D_2$, якщо для будь-яких $k, j \in \mathbb{N}$ з того, що Δ_k^1 перетинається з Δ_j^2, випливає, що Δ_k^1 міститься в Δ_j^2.

Теорема 1. *Якщо розбиття $D = \{\Delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ множини A допустиме для функції f, то довільне дрібніше розбиття $D_1 = \{\Delta_k^1\}_{k=1}^{\infty} \succ D$ також допустиме.*

Доведення. Згрупуємо множини Δ_k^1, які потрапляють в один і той самий елемент розбиття D:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sup_{t\in\Delta_k^1} |f(t_k)|\,\mu(\Delta_k^1) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\Delta_k^1\subset\Delta_j} \sup_{t\in\Delta_k^1} |f(t)|\,\mu(\Delta_k^1) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \sup_{t\in\Delta_j} |f(t)| \sum_{\Delta_k^1\subset\Delta_j} \mu(\Delta_k^1) = \sum_{j=1}^{\infty} \sup_{t\in\Delta_j} |f(t)|\,\mu(\Delta_j) < \infty.$$

Теорему доведено. □

Такі властивості допустимих розбиттів пропонуємо читачеві перевірити самостійно.

1. Нехай розбиття D допустиме для функції f, $a \in \mathbb{R}$ — довільний скаляр. Тоді розбиття D допустиме для функції af.
2. Нехай розбиття D допустиме для двох функцій f і g. Тоді це розбиття D допустиме для функції $f + g$.

Нехай $D = \{\Delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ — розбиття множини A. Послідовність $T = \{t_k\}_1^{\infty} \subset \Omega$ називається *набором відмічених точок для* D, якщо $t_k \in \Delta_k$ для будь-якого $k \in \mathbb{N}$. Нехай (D_1, T_1) і (D_2, T_2) — розбиття із відповідними наборами відмічених точок. За означенням, пара (D_1, T_1) є наступником пари (D_2, T_2), якщо D_1 — наступник D_2.

Вправи

1. Перевірте, що для розбиттів $D_1 = \{\Delta_k^1\}_{k=1}^{\infty}$, $D_2 = \{\Delta_k^2\}_{k=1}^{\infty}$ множини A такі умови еквівалентні:

(a) $D_1 \succ D_2$;

(b) для будь-якого $k \in \mathbb{N}$ існує таке $j \in \mathbb{N}$, що $\Delta_k^1 \subset \Delta_j^2$;

(c) для будь-якого $j \in \mathbb{N}$ існує така підмножина індексів $A \subset \mathbb{N}$, що $\bigcup_{k\in A} \Delta_k^1 = \Delta_j^2$.

2. Перевірте, що введене відношення $\succ$ на множині всіх розбиттів множини A є відношенням порядку.

3. Нехай $D_1 = \{\Delta_k^1\}_{k=1}^{\infty}$ і $D_2 = \{\Delta_k^2\}_{k=1}^{\infty}$ — розбиття множини A. Означимо розбиття D_3, виписавши в послідовність всі непорожні множини вигляду $\Delta_k^1 \cap \Delta_j^2$, $k, j \in \mathbb{N}$. Доведіть, що D_3 є наступником як D_1, так і D_2, тобто сім'я всіх розбиттів множини A утворює напрямленість.

4. Нехай D_1, D_2 і D_3 — розбиття з попередньої вправи. Покажіть, що якщо розбиття D є наступником одночасно D_1 і D_2, то $D \succ D_3$. Доведіть, що множина всіх пар вигляду (D, T)-розбиттів з відміченими точками, утворює напрямленість.

4.2. Інтегровні функції

4.2.1. Інтегральні суми

Означення 1. Нехай $A \in \Sigma$, $f\colon A \to \mathbb{R}$ — деяка функція; $D = \{\Delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ — допустиме розбиття множини A, $T = \{t_k\}_1^{\infty}$ — набір відмічених точок. *Інтегральною сумою* функції f по множині A, яка відповідає парі (D, T), називається число

$$S_A(f, D, T) = \sum_{k=1}^{\infty} f(t_k)\mu(\Delta_k).$$

Зазначимо, що допустимість розбиття D гарантує абсолютну збіжність ряду $\sum_{k=1}^{\infty} f(t_k)\mu(\Delta_k)$ в означенні інтегральної суми. Ця абсолютна збіжність потрібна для того, щоб інтегральна сума залежала від самого розбиття з відміченими точками, а не від того, в якому порядку виписані елементи цього розбиття.

Наступні властивості інтегральних сум пропонуємо читачеві перевірити самостійно.

1. $S_A(af, D, T) = aS_A(f, D, T)$.
2. $S_A(f + g, D, T) = S_A(f, D, T) + S_A(g, D, T)$.
3. Якщо $f \geqslant 0$ на множині A, то $S_A(f, D, T) \geqslant 0$.
4. Якщо $f \geqslant g$ на множині A, то $S_A(f, D, T) \geqslant S_A(g, D, T)$.
5. Якщо на множині A функція f тотожно дорівнює деякій сталій a, то будь-яке розбиття D допустиме для f і $S_A(f, D, T) = a\mu(A)$.
6. Якщо на множині A виконується оцінка $f \geqslant a$, то $S_A(f, D, T) \geqslant a\mu(A)$.
7. Якщо на множині A виконується оцінка $f \leqslant b$, то $S_A(f, D, T) \leqslant b\mu(A)$.

За аналогією з інтегральними сумами Рімана можна ввести верхні та нижні інтегральні суми для розбиттів загального вигляду.

Означення 2. Нехай $f\colon A \to \mathbb{R}$ — деяка функція на вимірній множині A, $D = \{\Delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ — допустиме розбиття множини A. *Верхньою інтегральною сумою функції f* за розбиттям D називається число

$$\overline{S}_A(f, D) = \sum_{k=1}^{\infty} \sup_{t \in \Delta_k} [f(t)\mu(\Delta_k)],$$

а *нижньою інтегральною сумою* — число

$$\underline{S}_A\,(f,D)=\sum_{k=1}^{\infty}\inf_{t\in\Delta_k}\,[f(t)\mu\,(\Delta_k)].$$

Зауваження. За означенням допустимого розбиття, для кожного $\Delta_k\in D$ ненульової міри $\sup\limits_{t\in\Delta_k}|f(t)|<\infty$. Тому всі доданки $\sup\limits_{t\in\Delta_k}[f(t)\mu\,(\Delta_k)]$ і $\inf\limits_{t\in\Delta_k}[f(t)\mu\,(\Delta_k)]$ в означенні верхньої і нижньої інтегральної суми скінченні. Скінченними є і самі суми з огляду на умову

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sup_{t\in\Delta_k}[|f(t)|\,\mu\,(\Delta_k)]<\infty.$$

Надалі при записі верхніх і нижніх інтегральних сум ми враховуватимемо, що доданки, відповідні $\Delta_k\in D$ з $\mu(\Delta_k)=0$, самі дорівнюють нулеві. Решту ж доданків можна записати у вигляді $\sup\limits_{t\in\Delta_k}f(t)\mu\,(\Delta_k)$ і $\inf\limits_{t\in\Delta_k}f(t)\mu\,(\Delta_k)$, бо при цьому вже не може виникнути невизначений вираз вигляду $\infty\cdot 0$.

Лема. *Нехай $D=\{\Delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ — допустиме для функції f розбиття множини A. Тоді*

(1) для будь-якого вибору T відмічених точок

$$\underline{S}_A\,(f,D)\leqslant S_A\,(f,D,T)\leqslant \bar{S}_A\,(f,D)\,.$$

(2) Нехай, далі $D_1\succ D$. Тоді

$$\underline{S}_A\,(f,D)\leqslant \underline{S}_A\,(f,D_1)\leqslant \overline{S}_A\,(f,D_1)\leqslant \overline{S}_A\,(f,D)\,.$$

(3) Нарешті, $\underline{S}_A\,(f,D)=\inf\limits_T S_A\,(f,D,T)$ і $\overline{S}_A\,(f,D)=\sup\limits_T S_A\,(f,D,T)$.

Доведення. (1) Оскільки $t_k\in\Delta_k$, то

$$\inf_{t\in\Delta_k}f\,(t)\leqslant f(t_k)\leqslant\sup_{t\in\Delta_k}f\,(t)$$

для будь-якого $k\in\mathbb{N}$. Звідси випливає потрібна оцінка.

(2) Нехай $D_1=\{\Delta_k^1\}_{k=1}^{\infty}$. Згрупуємо множини Δ_k^1, які потрапляють на один і той самий елемент розбиття D :

$$\overline{S}_A\,(f,D_1)=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{\Delta_k^1\subset\Delta_j}\sup_{t\in\Delta_k^1}f(t)\mu(\Delta_k^1)\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}\sup_{t\in\Delta_j}f(t)\sum_{\Delta_k^1\subset\Delta_j}\mu(\Delta_k^1)=\overline{S}_A\,(f,D).$$

Аналогічно перевіряється і нерівність $\underline{S}_A\,(f,D)\leqslant\underline{S}_A\,(f,D_1)$.

(3) Щоб довести рівність $\overline{S}_A\,(f,D)=\sup_T S_A\,(f,D,T)$, для будь-якого $\delta>0$ побудуємо такий набір $T_\delta=\{t_k\}_1^{\infty}$ відмічених точок, що $f(t_k)\geqslant\sup\limits_{t\in\Delta_k}f(t)-\delta$. Маємо

$$S_A(f,D,T_\delta)\geqslant\sum_{k=1}^{\infty}\sup_{t\in\Delta_k}[f(t)\mu\,(\Delta_k)]-\sum_{k=1}^{\infty}\delta\mu\,(\Delta_k)=\overline{S}_A(f,D)-\delta\mu(A),$$

що через довільність δ доводить потрібне співвідношення. Рівність $\underline{S}_A\,(f,D)=\inf_T S_A\,(f,D,T)$ доводиться аналогічно. $\square$

Вправи

1. Взагалі кажучи, сума ряду може змінюватись при перестановці доданків. Обґрунтуйте перестановку доданків в оцінках з доведення леми.

2. Нехай $D_1 = \{\Delta_k^1\}_{k=1}^{\infty}$ — допустиме для f розбиття множини A, $D_2 \succ D_1$, $D_2 = \{\Delta_k^2\}_{k=1}^{\infty}$. Означимо зліченнозначні функції $\bar{f}_i, \underline{f}_i$, $i = 1, 2$ за правилом $\bar{f}_i = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \sup\limits_{t \in \Delta_k^i} f(t) \mathbb{1}_{\Delta_k^i}$, $\underline{f}_i = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \inf\limits_{t \in \Delta_k^i} f(t) \mathbb{1}_{\Delta_k^i}$. Перевірте, що в кожній точці множини A виконані нерівності $\underline{f}_1 \leqslant \underline{f}_2 \leqslant \bar{f}_2 \leqslant \bar{f}_1$.

4.2.2. Означення і найпростіші властивості інтеграла Лебега

Означення 1. Нехай $A \in \Sigma$ — вимірна множина, $f\colon A \to \mathbb{R}$ — деяка функція на A. Число $a \in \mathbb{R}$ називається *інтегралом* (інтегралом Лебега) функції f на множині A за мірою μ (позначення: $a = \int_A f d\mu$), якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке допустиме розбиття D_ε множини A, що для будь-якого розбиття D, яке є наступником D_ε, і будь-якого вибору відмічених точок T для D, $|a - S_A(f, D, T)| \leqslant \varepsilon$. Функція $f\colon A \to \mathbb{R}$ називається *інтегровною* на множині A за мірою μ, якщо для неї існує відповідний інтеграл.

Іншими словами, функція f інтегровна на A, якщо, починаючи з деякого розбиття, інтегральні суми визначені й існує границя інтегральних сум за напрямленістю розбиттів з відміченими точками, описаною в п. 4.1.3. Ця границя називається інтегралом Лебега і позначається $f = \int_A f\, d\mu$.

Наступні твердження про інтеграл Лебега безпосередньо випливають з відповідних властивостей інтегральних сум і властивостей границі за напрямленістю.

1. Нехай $f\colon A \to \mathbb{R}$ — інтегровна функція, $\lambda \in \mathbb{R}$. Тоді функція λf також інтегровна і $\int_A \lambda f d\mu = \lambda \int_A f d\mu$.
2. Якщо функції f і g інтегровні на A, то $f + g$ також інтегровна і $\int\limits_A (f+g) d\mu = \int\limits_A f d\mu + \int\limits_A g d\mu$.
3. Якщо інтегровна функція f більша або дорівнює нулю на множині A, то $\int\limits_A f d\mu \geqslant 0$.
4. Якщо $f \geqslant g$ на множині A, f і g інтегровні на A, то $\int\limits_A f d\mu \geqslant \int\limits_A g d\mu$.
5. Якщо $f\colon A \to \mathbb{R}$ — інтегровна функція, $f \geqslant 0$ і $\int\limits_A f d\mu = 0$, то всі функції g, що задовольняють нерівність $0 \leqslant g \leqslant f$, також інтегровні на A з $\int\limits_A g d\mu = 0$.
6. Нехай $a \in \mathbb{R}$ — деяка стала. Тоді $\int\limits_A a d\mu = a\mu(A)$.
7. Нехай $f\colon A \to \mathbb{R}$ — інтегровна функція, $a \in \mathbb{R}$ і $f \leqslant a$ на A. Тоді $\int\limits_A f d\mu \leqslant a\mu(A)$. Аналогічно, якщо $f \geqslant b$, то $\int\limits_A f d\mu \geqslant b\mu(A)$.

Теорема 1. *Для функції $f\colon A \to \mathbb{R}$, $A \in \Sigma$, такі умови еквівалентні:*

(1) функція інтегровна і $\int\limits_A f d\mu = a$;

(2) *для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке допустиме розбиття $D_\varepsilon = \{\Delta_j\}_{j=1}^\infty$ множини A, що при будь-якому виборі T відмічених точок $|a - S_A(f, D_\varepsilon, T)| < \varepsilon$;*

(3) *для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке допустиме розбиття D_ε множини A, що відповідні верхня і нижня інтегральні суми функції f наближають a з точністю до ε: $\left|a - \overline{S}_A(f, D_\varepsilon)\right| \leqslant \varepsilon$ і $|a - \underline{S}_A(f, D_\varepsilon)| \leqslant \varepsilon$.*

Доведення. Імплікація (1) $\Rightarrow$ (2) очевидна. Імплікація (2) $\Rightarrow$ (3) випливає з леми, доведеної в попередньому параграфі (п. (3) леми). Справді, за умовою всі значення інтегральних сум $S_A(f, D_\varepsilon, T)$ лежать на відрізку $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$, відтак, $\underline{S}_A(f, D) = \inf_T S_A(f, D, T)$ і $\overline{S}_A(f, D) = \sup_T S_A(f, D, T)$ лежать на тому ж відрізку. З тієї ж леми випливає й імплікація (3) $\Rightarrow$ (1). А саме, нехай D_ε — розбиття з умови (3). Згідно із зазначеною лемою, для будь-якого розбиття D, яке є наступником D_ε, правильні оцінки

$$a - \varepsilon \leqslant \underline{S}_A(f, D_\varepsilon) \leqslant \underline{S}_A(f, D) \leqslant \overline{S}_A(f, D) \leqslant \overline{S}_A(f, D_\varepsilon) \leqslant a + \varepsilon.$$

Далі, для будь-якого вибору відмічених точок $T = \{t_k\}_1^\infty$ для D, $\underline{S}_A(f, D) \leqslant S_A(f, D, T) \leqslant \bar{S}_A(f, D)$. Отже, $a - \varepsilon \leqslant S_A(f, D, T) \leqslant a + \varepsilon$ і $|a - S_A(f, D, T)| \leqslant \varepsilon$. □

Приклад 1. Нехай $\{A_k\}_1^\infty$ — розбиття множини $A \in \Sigma$ на вимірні підмножини, $f = \sum_{k=1}^\infty a_k \mathbb{1}_{A_k}$ — зліченнозначна вимірна функція і ряд $\sum_{k=1}^\infty a_k \mu(A_k)$ збігається абсолютно. Тоді функція f інтегровна на A і $\int\limits_A f d\mu = \sum\limits_{k=1}^\infty a_k \mu(A_k)$. Справді, якщо за розбиття D взяти розбиття множини A на $\{A_k\}_1^\infty$, то $\underline{S}_A(f, D) = \bar{S}_A(f, D) = \sum\limits_{k=1}^\infty a_k \mu(A_k)$. Залишається застосувати умову (3) теореми 1 з $D_\varepsilon = D$.

Згідно з критерієм Коші збіжності за напрямленістю, функція $f\colon A \to \mathbb{R}$ інтегровна на множині A тоді і тільки тоді, коли для будь-якого $\varepsilon > 0$ існують таке допустиме розбиття D_ε множини A і такий вибір T відмічених точок, що $\left|S_A(f, D_\varepsilon, T) - S_A\left(f, D, \tilde{T}\right)\right| < \varepsilon$ для будь-якого $D \succ D_\varepsilon$ і будь-якого вибору $\tilde{T}$ відмічених точок розбиття D. Оскільки за лемою з попереднього пункту всі можливі значення сум вигляду $S_A\left(f, D, \tilde{T}\right)$ заповнюють відрізок $\left[\underline{S}_A(f, D_\varepsilon), \bar{S}_A(f, D_\varepsilon)\right]$, одержуємо таке корисне переформулювання критерію Коші.

Теорема 2. *Функція $f\colon A \to \mathbb{R}$ інтегровна на множині A тоді і тільки тоді, коли для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке допустиме розбиття D_ε множини A, що відповідні верхня і нижня інтегральні суми функції f відрізняються менше ніж на ε: $\left|\bar{S}_A(f, D_\varepsilon) - \underline{S}_A(f, D_\varepsilon)\right| < \varepsilon$.*

Теорема 3. *Нехай $f\colon A \to \mathbb{R}$ — інтегровна функція. Тоді функція $|f|$ також інтегровна.*

Доведення. Нехай $\varepsilon > 0$, а $D_\varepsilon = \{\Delta_j\}_{j=1}^\infty$ — розбиття з попередньої теореми для функції f. Тоді

$$\left|\bar{S}_A(|f|, D_\varepsilon) - \underline{S}_A(|f|, D_\varepsilon)\right| = \sum_{k=1}^\infty \Bigg(\sup_{\mathrm{t}\in\Delta_\mathrm{k}} \left[|f(t)|\, \mu(\Delta_k)\right] -$$

$$- \inf_{t\in\Delta_k} \left[|f(t)|\, \mu(\Delta_k)\right]\Bigg) \leqslant \sum_{k=1}^\infty \left(\sup_{t\in\Delta_k} \left[f(t)\mu(\Delta_k)\right] - \inf_{\mathrm{t}\in\Delta_\mathrm{k}} \left[f(t)\mu(\Delta_k)\right]\right) =$$

$$= \bar{S}_A(f, D_\varepsilon) - \underline{S}_A(f, D_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Отож, для будь-якого $\varepsilon > 0$ ми довели існування розбиття D_ε такого, що $\left|\bar{S}_A(|f|, D_\varepsilon) - \underline{S}_A(|f|, D_\varepsilon\right.$
ε. За теоремою 2 цим доведено інтегровність функції $|f|$. □

Наслідок 1. *Нехай $f\colon A \to \mathbb{R}$ — інтегровна функція. Тоді функції f^+ і f^- також інтегровні.*

Доведення. Нагадаємо, що, за означенням, $f^+(t)$ збігається з $f(t)$ для тих t, де $f(t) > 0$; для тих t, де $f(t) \leqslant 0$, $f^+(t) = 0$. Аналогічно, $f^-(t) = |f(t)|$ в точках, де $f(t) \leqslant 0$, у решті точок $f^-(t) = 0$. З огляду на рівності $f^+ = \frac{1}{2}(f + |f|)$ і $f^- = \frac{1}{2}(|f| - f)$ потрібне твердження випливає з попередньої теореми і вже зазначених властивостей інтеграла. □

Наслідок 2. *Нехай f і g — дві інтегровні функції. Тоді функції* $\max\{f, g\}$ *і* $\min\{f, g\}$ *також інтегровні.*

Доведення. Безпосередньо випливає з формул $\max\{f, g\} = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$ і $\min\{f, g\} = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$. □

Вправи

1. Доведіть імплікацію (1) ⇒ (2) теореми 1 п. 4.2.2.
2. Доведіть теорему 2 п. 4.2.2.
3. Чому в доведенні теореми 3 п. 4.2.2 D_ε — допустиме розбиття для функції $|f|$?
4. Перевірте формули $f^+ = \frac{1}{2}(f + |f|)$, $f^- = \frac{1}{2}(|f| - f)$, $\max\{f, g\} = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$ і $\min\{f, g\} = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$ з доведень двох останніх наслідків.
5. Нехай A — множина міри нуль. Доведіть, що будь-яка функція f на A інтегровна і $\int_A f d\mu = 0$.
6. Нехай f і g — дві функції, задані на вимірній множині A, і $f \overset{\text{м.с.}}{=} g$. Тоді, якщо f інтегровна, то g також інтегровна і $\int_A g d\mu = \int_A f d\mu$.
7. Нехай функції f і g інтегровні на A і $f \leqslant g$ майже скрізь. Тоді $\int_A f d\mu \leqslant \int_A g d\mu$.
8. Нехай Σ — σ-алгебра вимірних за Лебегом підмножин відрізка $[a, b]$, λ — міра Лебега на відрізку, $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ — інтегровна за Ріманом функція. Спираючись на теорему 1 п.4.2.2, доведіть, що функція f інтегровна за Лебегом на $[a, b]$ і $\int_{[a,b]} f d\lambda = \int_a^b f(t)dt$.
9. Загальніший результат. Нехай $F\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ — монотонно неспадна функція Стілтьєса, μ — відповідна борелева міра, породжена F як функцією розподілу (див. п. 2.3.5). Тоді кожна інтегровна за Стілтьєсом функція $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ інтегровна на $[a, b]$ за мірою μ і $\int_{[a,b]} f d\mu = \int_a^b f(t)dF(t)$.
10. Нехай $A \subset [a, b]$ — щільна на відрізку множина лебегової міри нуль. Доведіть, що функція $\mathbb{1}_A$ не інтегровна за Ріманом, але інтегровна за Лебегом на $[a, b]$. Чому дорівнює $\int_{[a,b]} \mathbb{1}_A d\lambda$?
11. Доведіть, що функція $f(x) = 1/x$ неінтегровна за мірою Лебега на відрізку $(0, 1]$.
12. Доведіть таке переформулювання теореми 2 п. 4.2.2: функція $f\colon A \to \mathbb{R}$ — інтегровна на множині A тоді і тільки тоді, коли для будь-якого $\varepsilon > 0$ і будь-якого розбиття D множини A існує таке допустиме розбиття $D_\varepsilon \succ D$, що відповідні верхня і нижня інтегральні суми функції f відрізняються менше ніж на ε: $\left|\bar{S}_A(f, D_\varepsilon) - \underline{S}_A(f, D_\varepsilon)\right| < \varepsilon$.
13. Наведіть приклад двох зліченнозначних інтегровних функцій, добуток яких неінтегровний.
14. Нехай μ — міра на $\mathbb{N}$, описана у вправі 5 п. 2.1.4. Тоді функція $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ інтегровна на $\mathbb{N}$ за мірою μ тоді і тільки тоді, коли ряд $\sum_{n=1}^\infty f(n)b_n$ абсолютно збігається. У цьому випадку $\int_{\mathbb{N}} f d\mu = \sum_{n=1}^\infty f(n)b_n$.

15. Означення інтеграла зберігає зміст і для функцій, які приймають комплексні значення. Перевірте виконання властивостей

$$\int\limits_A \lambda f d\mu = \lambda \int\limits_A f d\mu, \int_A (f+g) d\mu = \int_A f d\mu + \int_A g d\mu$$

і нерівності $\left|\int_A f d\mu\right| \leqslant \int_A |f| d\mu$ для комплекснозначних функцій і комплексних скалярів.

16. Нехай f — комплекснозначна функція на A, f_1 і f_2 — відповідно дійсна й уявна частини функції f. Доведіть, що f інтегровна тоді і тільки тоді, коли f_1 і f_2 інтегровні, і $\int\limits_A f d\mu = \int\limits_A f_1 d\mu + i \int\limits_A f_2 d\mu$.

17. Перевірте для комплекснозначних функцій виконання еквівалентності (1) $\Leftrightarrow$ (2) теореми 1, виконання критерію інтегровності зліченнозначної функції (приклад 1), а також твердження теореми 3 (всі – з п. 4.2.2).

4.2.3. Інтеграл як функція множини

Теорема 1. *Нехай $f\colon A \to \mathbb{R}$ — інтегровна функція на A, B — вимірна підмножина в A. Тоді функція f інтегровна на B.*

Доведення. За теоремою 2 п. 4.2.2 для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке допустиме розбиття $D_\varepsilon = \{\Delta_j\}_{j=1}^\infty$ множини A, що відповідні верхня і нижня інтегральні суми функції f відрізняються менше, ніж на ε: $|\overline{S}_A(f, D_\varepsilon) - \underline{S}_A(f, D_\varepsilon)| < \varepsilon$. Розглянемо множину K тих індексів k, для яких Δ_k перетинається з B. Тоді множини $\Delta_k^1 = B \cap \Delta_k$, $k \in K$ утворюють допустиме розбиття множини B. Позначимо це розбиття через D_ε^1. Зазначимо, що

$$\sup_{t\in\Delta_k^1} f(t) \leqslant \sup_{t\in\Delta_k} f(t), \quad \inf_{t\in\Delta_k^1} f(t) \geqslant \inf_{t\in\Delta_k} f(t)$$

і $\mu(\Delta_k^1) \leqslant \mu(\Delta_k)$. Оцінимо величину $\left|\bar{S}_A(f, D_\varepsilon^1) - \underline{S}_A(f, D_\varepsilon^1)\right|$. Маємо

$$\begin{aligned}\left|\bar{S}_B\left(f, D_\varepsilon^1\right) - \underline{S}_B\left(f, D_\varepsilon^1\right)\right| &= \sum_{k\in K}\left(\sup_{t\in\Delta_k^1}\left[f(t)\mu\left(\Delta_k^1\right)\right] - \inf_{t\in\Delta_k^1}\left[f(t)\mu\left(\Delta_k^1\right)\right]\right) \leqslant \\ &\leqslant \sum_{k=1}^\infty\left(\sup_{t\in\Delta_k}\left[f(t)\mu\left(\Delta_k\right)\right] - \inf_{t\in\Delta_k}\left[f(t)\mu\left(\Delta_k\right)\right]\right) = \\ &= \left|\bar{S}_A(f, D_\varepsilon) - \underline{S}_A(f, D_\varepsilon)\right| < \varepsilon.\end{aligned}$$

Ми довели, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує розбиття множини B, верхня і нижня інтегральні суми якого відрізняються менше ніж на ε. За теоремою 2 п. 4.2.2 цим доведено інтегровність функції f на B. □

Теорема 2. *Нехай $A_1, A_2 \in \Sigma$ — неперетинні множини і функція f інтегровна як на A_1, так і на A_2. Тоді f інтегровна на $A_1 \cup A_2$ і*

$$\int\limits_{A_1\cup A_2} f d\mu = \int\limits_{A_1} f d\mu + \int\limits_{A_2} f d\mu.$$

Доведення. Позначимо $\int_{A_i} f d\mu$ через a_i, $i = 1, 2$. Скористаємось умовою (2) теореми 1 п. 4.2.2. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ і виберемо такі допустимі розбиття D_1 і D_2 множин A_1 і A_2, що за будь-якого вибору T_1, T_2 відмічених точок $|a_i - S_{A_i}(f, D_i, T_i)| < \varepsilon$, $i = 1, 2$. Утворимо розбиття D множини $A_1 \cup A_2$, взявши за елементи цього розбиття всі елементи розбиттів D_1 і D_2. Нехай T — довільний вибір відмічених точок для D. Через T_i, $i = 1, 2$ позначимо частину T, яка потрапляє на відповідну A_i. Тоді

$$S_{A_1 \cup A_2}(f, D, T) = S_{A_1}(f, D_1, T_1) + S_{A_2}(f, D_2, T_2)$$

і, відповідно:

$$|a_1 + a_2 - S_{A_1 \cup A_2}(f, D, T)| \leqslant |a_1 - S_{A_1}(f, D_1, T_1)| + \\ + |a_2 - S_{A_2}(f, D_2, T_2)| < 2\varepsilon.$$

З довільності ε ми перебуваємо умовах вже згаданого критерію інтегровності. □

Наслідок 1. *Якщо функція f інтегровна і невід'ємна на A, то функція множини $G(B) = \int_B f d\mu$ є скінченно-адитивною мірою на сім'ї $\Sigma_A = \{B \in \Sigma : B \subset A\}$.*

Теорема 3. *Нехай функція f набуває на A тільки невід'ємні значення, $\{A_k\}_1^\infty$ — деяке розбиття множини A на вимірні підмножини. Нехай далі на кожному з A_k функція f інтегровна і ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_{A_k} f d\mu$ збігається. Тоді f інтегровна на всій множині A і $\int\limits_A f d\mu = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_{A_k} f d\mu$.*

Доведення. Міркуватимемо за аналогією з попереднім доведенням. Позначимо $\int_{A_k} f d\mu$ через a_k, $k = 1, 2, ...$. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ і такі допустимі розбиття D_k множин A_k, $k = 1, 2, ...$, що за будь-якого вибору T_k відмічених точок для відповідного D_k $|a_k - S_{A_k}(f, D_k, T_k)| < \frac{\varepsilon}{2^k}$. Утворимо розбиття $D = \{\Delta_j\}_{j=1}^\infty$ множини A, взявши за елементи цього розбиття всі елементи розбиттів D_k, $k = 1, 2, ...$. Для будь-якого T — набору відмічених точок, відповідного D, позначимо через T_k, $k = 1, 2, ...$, частину набору T, яка потрапила на відповідне A_k. Маємо

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sup_{t \in \Delta_j} [|f(t)| \mu(\Delta_j)] = \sup_T \sum_{j=1}^{\infty} f(t_j) \mu(\Delta_j) = \\ = \sup_T \sum_{k=1}^{\infty} S_{A_k}(f, D_k, T_k) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k + \frac{\varepsilon}{2^k}\right) < \infty.$$

Ми довели, що розбиття D допустиме. Далі,

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k - S_A(f, D, T) \right| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |a_k - S_{A_k}(f, D_k, T_k)| < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon.$$

З огляду на пункт 2 теореми 1 п. 4.2.2 нашу теорему доведено. □

Наслідок 2. *В умовах наслідку 1 функція множини $G(B) = \int_B f d\mu$ — не тільки скінченно-адитивна, але й зліченно-адитивна міра на Σ_A.*

Доведення. Нехай $\{B_k\}_1^\infty$ — розбиття деякої множини $B \in \Sigma$ на вимірні підмножина. З огляду на вже доведену скінченну адитивність функції множини G для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ маємо

$$\sum_{k=1}^{n} \int\limits_{B_k} f d\mu = \int\limits_{\bigcup_{k=1}^n B_k} f d\mu \leqslant \int\limits_B f d\mu.$$

Отже,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{B_k} f d\mu \leqslant \int\limits_{B} f d\mu < \infty,$$

і ми потрапляємо в умови попередньої теореми. Застосовуючи теорему, отримуємо, що

$$\int\limits_{\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k} f d\mu = \int\limits_{B} f d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{B_k} f d\mu. \qquad \square$$

Тепер ми готові довести основний результат цього пункту:

Теорема 4. *Нехай $(B_k)_1^{\infty}$ — послідовність попарно неперетинних вимірних множин і $A = \coprod_{k=1}^{\infty} B_k$. Функція f інтегровна на A тоді і тільки тоді, коли f інтегровна на кожному з B_k і ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_{B_k} |f| \, d\mu$ збігається. При цьому $\int\limits_{B} f d\mu = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_{B_k} f d\mu$.*

Доведення. У випадку $f \geqslant 0$ результат випливає з теореми 3 і наслідку 2. Тому твердження правильне для функцій f^+ і f^-. Для завершення доведення потрібно застосувати формули $|f| = f^+ + f^-$ і $f = f^+ - f^-$. $\square$

Наслідок 3. *Нехай $\{B_k\}_1^{\infty}$ — розбиття множини $A \in \Sigma$ на вимірні підмножини, $f = \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k \mathbb{1}_{B_k}$ — зліченнозначна вимірна функція. Для того, щоб функція f була інтегровною на A необхідно і достатньо, щоб ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k \mu(B_k)$ збігався абсолютно. У цьому випадку*

$$\int\limits_{A} f d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \mu(B_k).$$

Приклад 1. Нехай $(A_k)_{k=1}^{\infty}$ — послідовність попарно неперетинних підмножин ненульової міри відрізка $[0,1]$, $\coprod_{k=1}^{\infty} A_k = [0,1]$. Розглянемо зліченнозначну вимірну функцію $f = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\mu(A_k)} \mathbb{1}_{A_k}$. За наслідком 3, функція f неінтегровна на відрізку $[0,1]$ за мірою Лебега. Покладемо $B_n = A_{2n-1} \cup A_{2n}$. Тоді $(B_n)_1^{\infty}$ — знову послідовність попарно неперетинних підмножин ненульової міри відрізка $[0,1]$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = [0,1]$. Зазначимо, що на кожному з B_n функція f інтегровна і $\int_{B_n} f d\lambda = 0$. Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{B_n} f d\lambda$ абсолютно збіжний. Отож збіжність (і навіть абсолютна збіжність) ряду з інтегралів на підмножинах не імплікує, взагалі кажучи, інтегровність функції на об'єднанні цих множин.

Зауваження 1. Нехай функція f визначена майже скрізь на множині A, тобто існує така множина $B \subset A$ міри нуль, що f визначена на $A \backslash B$. Як випливає з вправи 5 п. 4.2.2, такі умови еквівалентні:

(a) функція f інтегровна на $A \backslash B$;

(b) функцію f можна так продовжити на всю A, щоб вона стала інтегровною на A;

(c) при будь-якому продовженні на всю A функція f інтегровна на A.

Також очевидно, що значення інтеграла не зміниться, якщо значення функції поміняти на якійсь нехтуваній підмножині. Тому в межах теорії інтеграла можна розглядати функції, визначені майже скрізь. Це виявляється вельми зручним при розгляді функцій типу $\frac{1}{\sqrt{x}}$, $\frac{x}{|x|}$ і т. д.: ми можемо не турбуватись про те, як доозначити функцію в точці розриву.

Вправи

1. Чи не суперечить твердження теореми 4 прикладу 1?

2. Нехай $A \in \Sigma$. Позначимо через Σ_A сім'ю всіх елементів σ-алгебри Σ, які є підмножинами множини A, $\mu_1 \colon \Sigma_A \to \mathbb{R}$ — обмеження міри μ на Σ_A (тобто $\mu_1(B) = \mu(B)$ для будь-якого $B \in \Sigma_A$). Перевірте, що (A, Σ_A, μ_1) — знову простір з мірою.

3. Нехай $A \in \Sigma$, f визначена та інтегровна на A. Доозначимо на $\Omega \setminus A$ функцію f нулем. Перевірте, що так доозначена функція f інтегровна на Ω.

4. Як ми вже зазначали (вправи 15–17 п. 4.2.2), означення інтеграла має сенс і для функцій, які набувають комплексні значення. Перевірте для комплекснозначних функцій виконання теорем 1, 2 і 4.

4.3. Вимірність та інтегровність

4.3.1. Вимірність інтегровної функції

Наступна проста оцінка виявляється дуже корисною при роботі з інтегралом Лебега.

Лема (нерівність Чебишова). *Нехай $a > 0$ — деяка стала, g — інтегровна функція на A, $g \geqslant 0$, $B \subset A$ — така вимірна підмножина, що $g(t) \geqslant a$ для будь-якого $t \in B$. Тоді*

$$\mu(B) \leqslant \frac{1}{a} \int\limits_A g d\mu.$$

Доведення.

$$\int\limits_A g d\mu \geqslant \int\limits_B g d\mu \geqslant \int\limits_B a d\mu = a\mu(B). \qquad \square$$

Теорема. *Якщо простір з мірою повний, то кожна інтегровна на множині функція вимірна на цій множині.*

Доведення. Нехай f — інтегровна функція на A. Виберемо подрібнюючу послідовність допустимих розбиттів $D_j = \{\Delta_k^j\}_{k=1}^{\infty}$, $D_1 \prec D_2 \prec D_3 \prec \dots$, для кожного з яких $\left| \bar{S}_A(f, D_j) - \underline{S}_A(f, D_j) \right| < 1/j$. За аналогією із вправою 2 п. 4.2.1 означимо дві послідовності зліченнозначних функцій $\bar{f}_j = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \sup\limits_{t \in \Delta_k^j} f(t) \mathbb{1}_{\Delta_k^j}$ і $\underline{f}_j = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \inf\limits_{t \in \Delta_k^j} f(t) \mathbb{1}_{\Delta_k^j}$. Ці функції інтегровні на A, $\int_A \bar{f}_j d\mu = \bar{S}_A(f, D_j)$ і $\int_A \underline{f}_j d\mu = \underline{S}_A(f, D_j)$. Послідовність $(\bar{f}_j)$ поточково не зростає і обмежена зверху функцією f. Отже, у $\bar{f}_j$ існує поточкова границя при $j \to \infty$, яку ми позначимо $\bar{f}$. Аналогічно, позначимо через $\underline{f}$ поточкову границю функцій $\underline{f}_j$ при $j \to \infty$. Функції $\underline{f}$ і $\bar{f}$ вимірні (як границі послідовностей вимірних функцій), $\underline{f} \leqslant f \leqslant \bar{f}$. Якщо ми доведемо, що $\underline{f} = \bar{f}$ майже скрізь, то отримаємо, що $\underline{f} = f = \bar{f}$ майже скрізь, відтак, функція f вимірна (тут ми користуємось повнотою міри). Позначимо через B множину тих точок, де $\underline{f} \neq \bar{f}$, а через B_n — множину тих точок, де $\bar{f} - \underline{f} > \frac{1}{n}$. Оскільки $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, нам достатньо довести, що $\mu(B_n) = 0$ при будь-якому n. Зазначимо, що $\bar{f}_j - \underline{f}_j \geqslant \bar{f} - \underline{f}$ для будь-якого $j \in \mathbb{N}$, отже, на B_n

виконується оцінка $\bar{f}_j - \underline{f}_j > \frac{1}{n}$. За нерівністю Чебишова,

$$\mu(B_n) \leqslant n \int\limits_A \left(\bar{f}_j - \underline{f}_j\right) d\mu = n\left(\bar{S}_A(f, D_j) - \underline{S}_A(f, D_j)\right) < \frac{n}{j}.$$

Спрямовуючи j до нескінченності, отримуємо рівність $\mu(B_n) = 0$. □

Зауваження. Якщо (Ω, Σ, μ) — неповний простір з мірою, (Ω, Σ', μ) — його поповнення, то інтегровна функція на (Ω, Σ, μ) може не бути Σ-вимірною, але обов'язково буде Σ'-вимірною. Як ми знаємо, ці два види вимірності не сильно відрізняються: для кожної Σ'-вимірної функції існує Σ-вимірна функція, яка майже скрізь збігається з нею. Щоб не затримуватися щоразу на цій неістотній відмінності, в межах теорії інтегрування, ми, якщо не обумовлено інше, будемо припускати повноту аналізованих просторів з мірою. Тому надалі **всі інтегровні функції вважатимуться вимірними**. Інший прийом, який найчастіше зустрічається в літературі — на неповних просторах з мірою розглядати лише вимірні інтегровні функції, тобто вимірність вважати необхідною частиною означення інтегровності.

Вправи

1. Обґрунтуйте існування послідовності розбиттів D_j з доведення останньої теореми.

2. У доведенні використовувалась повнота міри μ в твердженні, що якщо $f \overset{\text{м.с.}}{=} g$ і f вимірна, то g вимірна. Перевірте це твердження. Чи можна тут обійтись без повноти?

Функції $\bar{f}_j$, $\underline{f}_j$ і, відповідно, $\bar{f}$ і $\underline{f}$ в деяких точках можуть набувати нескінченні значення. При означенні інтегровних функцій ми не враховували таку можливість (хоча, в принципі, це можна зробити не докладаючи значних зусиль). Отже, теорему по суті доведено за додаткового припущення існування послідовності розбиттів D_j, для яких не тільки $\left|\bar{S}_A(f, D_j) - \underline{S}_A(f, D_j)\right| < \frac{1}{j}$, але й відповідні функції $\bar{f}_j$ і $\underline{f}_j$ приймають в усіх точках скінченні значення. Це ускладнення в доведенні можна обійти, довівши, що такий вибір D_j справді можливий. Проте це можна зробити простіше, так як у зауваженні 1 п. 4.2.3, розв'язавши такі вправи.

3. Спираючись на означення верхньої і нижньої інтегральних сум, доведіть, що при кожному $j \in \mathbb{N}$ функції $\bar{f}_j$, $\underline{f}_j$ майже скрізь приймають скінченні значення.

4. Доведіть, що в A існує така підмножина E міри нуль, що на $G = A \backslash E$ всі функції $\bar{f}_j$, $\underline{f}_j$, $j \in \mathbb{N}$ приймають скінченні значення. Доведіть, що функція f вимірна на G, і, отже, вимірна на всій множині A.

З вимірності інтегровної функції і доведеної на початку параграфа леми легко випливає таке корисне твердження.

5. Нехай $\int_A |f|\, d\mu = 0$. Тоді на множині A функція f майже скрізь дорівнює нулю.

4.3.2. Теорема про рівномірну границю

Теорема. *Нехай послідовність функцій (f_n) рівномірно збігається на множині A до функції f. Тоді, якщо всі функцій f_n інтегровні на A, то й f інтегровна на A, і*

$$\int\limits_A f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_A f_n d\mu.$$

Доведення. Введемо позначення $a_n = \int\limits_A f_n d\mu$. Послідовність (a_n) фундаментальна:

$$|a_n - a_m| \leqslant \int\limits_A |f_n - f_m|\, d\mu \leqslant \sup_{t\in A} |f_n(t) - f_m(t)|\, \mu(A) \to 0, \quad n, m \to \infty.$$

Позначимо границю послідовності (a_n) через a. Нехай ε — довільне додатне число. З рівномірної збіжності послідовності (f_n) до f існує такий номер $N = N(\varepsilon)$, що для будь-якого $n > N$ і будь-якого $t \in A$

$$|f_n(t) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{4\mu(A)}.$$

Зафіксуємо таке $n > N$, що $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{4}$. Скориставшись інтегровністю функції f_n, побудуємо таке допустиме розбиття $D = \{\Delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ множини A, що при будь-якому виборі $T = \{t_k\}_1^{\infty}$ відмічених точок $|a_n - S_A(f_n, D, T)| < \varepsilon/2$.

З огляду на нерівність $|f_n(t) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{4\mu(A)}$ розбиття D допустиме і для функції f:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sup_{t\in\Delta_k} \left[|f(t)|\, \mu(\Delta_k)\right] \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \sup_{t\in\Delta_k} \left[|f_n(t)|\, \mu(\Delta_k)\right] + \frac{\varepsilon}{4} < \infty.$$

Далі, для будь-якого вибору $T = \{t_k\}_1^{\infty}$ відмічених точок

$$|a - S_A(f, D, T)| = \left| a - \sum_{k=1}^{\infty} f(t_k)\mu(\Delta_k) \right| \leqslant |a - a_n| +$$

$$+ \left| a_n - \sum_{k=1}^{\infty} f_n(t_k)\mu(\Delta_k) \right| + \left| \sum_{k=1}^{\infty} \left(f_n(t_k) - f(t_k)\right)\mu(\Delta_k) \right| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$

За критерієм (2) з теореми 1 п. 4.2.2, функція f інтегровна і $\int_A f d\mu = a$. Для завершення доведення потрібно лише згадати, що через a позначено $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_A f_n d\mu$. □

4.3.3. Умова інтегровності вимірної функції

Теорема. *Якщо для вимірної функції f існує інтегровна мажоранта, то й сама функція f інтегровна. Детальніше формулювання: нехай на множині A функція f вимірна, $|f| \leqslant g$ і функція g інтегровна. Тоді функція f також інтегровна.*

Доведення. Спочатку розберемо частковий випадок, коли f — зліченнозначна функція, тобто функція f має вигляд $f = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \mathbb{1}_{A_k}$, де (A_k) — послідовність попарно неперетинних вимірних множин. Нерівність $|f| \leqslant g$ означає, що $|a_k| \leqslant g(t)$ при $t \in A_k$. Отже, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \mu(A_k)$ збігається абсолютно:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|\, \mu(A_k) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{A_k} g d\mu \leqslant \int\limits_A g d\mu < \infty.$$

Згідно з прикладом 1 п. 4.2.2, функція f інтегровна.

Загальний випадок ми виведемо з двох вже відомих результатів: теореми про наближення вимірної функції зліченнозначними і теореми про рівномірну границю. Отож нехай f вимірна, $|f| \leqslant g$ і g інтегровна. Побудуємо таку послідовність (f_n) вимірних зліченнозначних функцій, що $\sup\limits_A |f_n(t) - f(t)| < 1/n$. Тоді $|f_n| \leqslant g + 1/n$, і за вже доведеним частковим випадком цієї теореми f_n інтегровні. Отже, ми змогли зобразити функцію f як границю рівномірно збіжної послідовності інтегровних функцій. Цим доведено інтегровність функції f. □

Доведена умова інтегровності вимірної функції стає корисною в багатьох ситуаціях. Справа в тому, що вимірність зберігається при всіх звичайних операціях над функціями: додаванні, множенні, граничному переході і т. д. Тому перевірка вимірності якоїсь конкретної функції зазвичай не є складною. Зайти ж інтегровну мажоранту простіше, ніж перевіряти інтегровність, виходячи з означення.

Вправи

1. Нехай f — вимірна функція і $|f|$ інтегровний. Тоді f інтегровна.
2. Нехай для вимірної функції f існує допустиме розбиття. Тоді f інтегровна.
3. Кожна обмежена вимірна функція інтегровна.
4. Добуток обмеженої вимірної функції на інтегровну знову інтегровний.
5. Опишіть ті простори з мірою, на яких кожна вимірна функція інтегровна.
6. Нехай (Ω, Σ, μ) — простір зі скінченною мірою, E — лінійний простір всіх вимірних скалярних функцій на Ω, F — підпростір в E, що складається з усіх функцій, які дорівнюють майже скрізь нульові. Через $L_0(\Omega, \Sigma, \mu)$ позначимо фактор-простір E/F. Для спрощення термінології прийнято говорити, що елементами простору $L_0(\Omega, \Sigma, \mu)$ є вимірні функції на Ω, але при цьому функції, які збігаються майже скрізь, ототожнюються між собою. Нехай $f, g \in L_0(\Omega, \Sigma, \mu)$. Покладемо $\rho(f,g) = \int\limits_\Omega \frac{|f-g|}{1+|f-g|} d\mu$.

Покажіть, що ρ задає метрику на $L_0(\Omega, \Sigma, \mu)$, причому збіжність у цій метриці еквівалентна збіжності за мірою.

4.4. Теореми про граничний перехід під знаком інтеграла

У підрозділі 4.2 ми ознайомилися з означенням інтеграла Лебега і побачили, що, хоча він і є загальнішим поняттям, ніж інтеграл Рімана, але зберігає, як і раніше, всі зручні властивості інтеграла, відомі нам з курсу аналізу. А тепер ми переходимо до вивчення переваг інтеграла Лебега над інтегралом Рімана. Ми переконаємося, що для інтеграла Лебега виконується не лише теорема про рівномірну границю, але й значно загальніші і зручні у застосуваннях теореми про граничний перехід під знаком інтеграла.

4.4.1. Лема Фату

Теорема (лема Фату). *Нехай на множині A задано послідовність (f_n) невід'ємних інтегровних функцій; послідовність (f_n) збігається майже скрізь до деякої функції f, й інтеграли функцій (f_n) обмежені в сукупності: $\int\limits_A f_n d\mu \leqslant C < \infty$. Тоді f інтегровна й*

$$\int\limits_A f d\mu \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int\limits_A f_n d\mu.$$

Доведення. Скористаємось теоремою Єгорова (п. 3.2.4). Виділимо в A вимірну підмножину A_1 з $\mu(A \setminus A_1) \leqslant \frac{1}{2}$, на якій f_n рівномірно збігаються до f. Позначимо $A \setminus A_1$ через B_1. Знову скориставшись теоремою Єгорова, виділимо в B_1 вимірну підмножину A_2 з $\mu(B_1 \setminus A_2) \leqslant \frac{1}{4}$, на якій f_n також рівномірно збігається до f. Позначимо $B_1 \setminus A_2$ через B_2.

Продовживши цей процес, отримаємо послідовність (A_j) попарно неперетинних вимірних множин і спадну послідовність множин B_j, $A_{j+1} \subset B_j$, $B_{j+1} = B_j \backslash A_{j+1}$, $\mu(B_j) \leqslant \frac{1}{2^j}$, які мають ту властивість, що на кожному з A_j послідовність (f_n) рівномірно збігається до f.

За теоремою про рівномірну границю, на кожній з A_j функція f інтегровна. Далі, для будь-якого $N \in \mathbb{N}$ виконана оцінка

$$\sum_{k=1}^{N} \int_{A_k} f d\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \int_{A_k} f_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{\bigcup_{k=1}^{N} A_k} f_n d\mu \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu,$$

отже, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_{A_k} f d\mu \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} \int\limits_A f_n d\mu$. За теоремою 3 п. 4.2.3, функція f інтегровна на $D = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ і $\int\limits_D f d\mu \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} \int\limits_A f_n d\mu$. Залишається зазначити, що, за побудовою, доповнення в A до D має міру нуль:

$$\mu\left(A \backslash \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = 0.$$

Отже, f інтегровна на всій множині A і $\int\limits_A f d\mu \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} \int\limits_A f_n d\mu$. □

Зауваження. Умову невід'ємності функцій f_n у формулюванні леми Фату можна дещо послабити: досить вимагати, щоб усі f_n були більшими або дорівнювали деякій інтегровній функції g. Справді, в цьому випадку функції $f_n - g$ невід'ємні, і до них можна застосувати лему Фату в початковому формулюванні. Тобто функція $f - g$ інтегровна (відтак, інтегровна і $f = g + (f - g)$) і $\int\limits_A (f - g) d\mu \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} \int\limits_A (f_n - g) d\mu$. Залишилось додати до обох частин останньої нерівності $\int_A g d\mu$, щоб одержати потрібну оцінку $\int\limits_A f d\mu \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} \int\limits_A f_n d\mu$.

Вправи

1. Якщо вимірна функція f додатна й інтеграли всіх менших інтегровних функцій обмежені в сукупності, то f інтегровна.

2. На прикладі східчастих функцій $f_n = n \mathbb{1}_{(0,1/n)}$, заданих на $A = [0,1]$, доведіть, що в умовах леми Фату $\int\limits_A f d\mu$ може не дорівнювати $\varliminf\limits_{n\to\infty} \int\limits_A f_n d\mu$.

3. Наведіть приклад, який показує, що в умовах леми Фату може не існувати $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_A f_n d\mu$.

4. Доведіть, що умову невід'ємності функцій f_n у формулюванні леми Фату можна замінити умовою $f_n \geqslant 0$ майже скрізь.

5. Нехай $(A_k)_1^{\infty}$ — послідовність попарно неперетинних підмножин ненульової міри відрізка $[0,1]$. Розглянемо послідовність інтегровних функцій $f_n = \sum\limits_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{\mu(A_k)} \mathbb{1}_{A_k}$. Перевірте, що інтеграли цих функцій дорівнюють 0 (і, отже, обмежені в сукупності), послідовність f_n) збігається в кожній точці до $f = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\mu(A_k)} \mathbb{1}_{A_k}$, проте гранична функція f не інтегровна. Яка з умов леми Фату тут не виконана?

4.4.2. Теорема Лебега про мажоровану збіжність

Теорема. *Нехай на множині A задано послідовність (f_n) інтегровних функцій, збіжну майже скрізь до деякої функції f. Нехай далі у послідовності (f_n) є інтегровна мажоранта g (тобто g інтегровна і $|f_n| \leqslant g$ при всіх n). Тоді гранична функція f інтегровна і*

$$\int_A f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu.$$

Доведення. Всі функції f_n обмежені знизу інтегровною функцією $-g$, й інтеграли функцій f_n обмежені в сукупності:

$$\int_A f_n d\mu \leqslant \int_A g d\mu < \infty.$$

Відповідно до зауваження, наведеного після доведення леми Фату, звідси випливає, що функція f інтегровна і $\int_A f d\mu \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu$. Застосувавши те саме міркування до функцій $-f_n$, отримаємо, що

$$\int_A (-f) d\mu \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int_A (-f_n) d\mu = -\varlimsup_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu,$$

тобто

$$\varlimsup_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu \leqslant \int_A f d\mu \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu.$$

Але в якому випадку верхню границю послідовності можна оцінити зверху нижньою границею цієї ж послідовності? Тільки якщо у послідовності є справжня границя. Отже, з двобічної нерівності

$$\varlimsup_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu \leqslant \int_A f d\mu \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu$$

випливає, що існує $\lim\limits_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu$, і $\int_A f d\mu$ дорівнює цій границі. □

Вправи

1. Спираючись на теорему Лебега і вправу 14 п. 4.2.2, доведіть таку **теорему про мажоровану збіжність для рядів.** *Нехай задано нескінченну матрицю $(a_{n,m})_{n,m=1}^{\infty}$, кожний стовпчик якої збігається до відповідного числа a_m: $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n,m} = a_m$. Нехай, далі, існує послідовність (b_m) додатних чисел, $\sum\limits_{m=1}^{\infty} b_m < \infty$, яка мажорує всі рядки матриці: $|a_{n,m}| \leqslant b_m$ при всіх $n, m \in \mathbb{N}$. Тоді ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty} a_m$ абсолютно збіжний і $\sum\limits_{m=1}^{\infty} a_m = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{m=1}^{\infty} a_{n,m}$.*

2. Сформулюйте та доведіть аналог леми Фату для рядів.

3. Доведіть, що умову $|f_n| \leqslant g$ у формулюванні теореми Лебега про мажоровану збіжність можна замінити умовою $|f_n| \leqslant g$ майже скрізь.

4.4.3. Теореми Леві про послідовності і ряди

Теорема Леві про монотонні послідовності. *Нехай $f_1 \leqslant f_2 \leqslant f_3 \leqslant \ldots$ — неспадна послідовність інтегровних функцій на A, й інтеграли функцій f_n обмежені в сукупності деякою сталою $C < \infty$. Тоді послідовність (f_n) прямує майже скрізь до деякої інтегровної функції f, і*

$$\int\limits_A f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_A f_n d\mu.$$

Доведення. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що всі $f_n \geqslant 0$ (загальний випадок зводиться до цього часткового введенням допоміжних функцій $f_n - f_1$). З монотонності в кожній точці $t \in A$ випливає, що послідовність $(f_n(t))$ прямує або до скінченної границі, або до $+\infty$. Позначимо через B множину тих $t \in A$, де $f_n(t) \to +\infty$ $(n \to \infty)$. Доведемо, що B — множина нульової міри. Для будь-яких $n, m \in \mathbb{N}$ покладемо $B_{n,m} = \{t \in A : f_n(t) > m\}$, $B_m = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_{n,m}$. Іншими словами, B_m — це множина тих точок $t \in A$, де всі f_n, починаючи з деякого номера, більші за число m. Відповідно, $B = \bigcap_{m=1}^{\infty} B_m$. За нерівністю Чебишова (лема з п. 4.3.1),

$$\mu(B_{n,m}) \leqslant \frac{1}{m} \int\limits_A f_n d\mu \leqslant \frac{C}{m}.$$

Оскільки при фіксованому m множини $B_{n,m}$ зростають зі зростанням n, $\mu(B_m) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(B_{n,m}) \leqslant \frac{C}{m}$. У свою чергу, множини B_m спадають зі зростанням m, тобто

$$\mu(B) = \lim_{m\to\infty} \mu(B_m) \leqslant \lim_{m\to\infty} \frac{C}{m} = 0.$$

Тепер визначимо функцію f на B довільним способом (наприклад, покладемо $f = 0$ на B), а на $A \setminus B$, де, за побудовою, в кожній точці існує скінченна границя послідовності $(f_n(t))$, покладемо $f(t) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(t)$. При такому означенні послідовність f_n збігається майже скрізь до f, і, за лемою Фату, функція f інтегровна. Далі, f є інтегровною мажорантою для всіх f_n, і для завершення доведення нам потрібно лише застосувати теорему Лебега про мажоровану збіжність. □

Теорема Леві про ряди. *Нехай на множині A задана послідовність (f_n) невід'ємних інтегровних функцій і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_A f_n d\mu < \infty$. Тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ збігається майже скрізь до деякої інтегровної функції f, і*

$$\int\limits_A f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_A f_n d\mu.$$

Доведення. Достатньо зазначити, що послідовність частинних сум ряду $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ задовольняє умови теореми Леві про монотонні послідовності. □

Вправи

1. Доведіть, що умову $f_n \leqslant f_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ у формулюванні теореми Леві про монотонні послідовності можна замінити умовою «для всіх $n \in \mathbb{N}$ $f_n \leqslant f_{n+1}$ майже скрізь».

2. Запишіть детальніше доведення теореми Леві про ряди.

3. Використовуючи зображення функції у вигляді різниці її додатної і від'ємної частин, доведіть таке посилення теореми Леві про ряди: нехай функції f_n інтегровні на множині A і $\sum_{n=1}^{\infty} \int_A |f_n| d\mu < \infty$. Тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ збігається майже скрізь до деякої інтегровної функції f, і $\int\limits_A f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_A f_n d\mu$. Ми будемо користуватись цим твердженням нижче в п. 6.3.2 при доведенні повноти простору L_1.

4. Виведіть розв'язок вправи 5 п. 4.3.1, застосувавши теорему Леві про монотонні послідовності до послідовності $f_n = n\,|f|$.

4.4.4. Теорема про монотонний клас функцій

Означення. Нехай (Ω, Σ, μ) — простір зі скінченною мірою. Сім'я E інтегровних на Ω функцій називається *монотонним класом функцій*, якщо вона задовольняє такі аксіоми:

(1) якщо $f_1, f_2 \in E$, то $a_1 f_1 + a_2 f_2 \in E$ для будь-яких скалярів a_1, a_2 (лінійність);

(2) якщо $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots \in E$, f_n утворюють неспадну послідовність, збіжну в кожній точці до деякої функції f, і $\sup\limits_n \int\limits_\Omega f_n d\mu = C < \infty$, то $f \in E$) (аналог теореми Леві);

(3) якщо $f \in E$, $f \geqslant 0$ і $\int_\Omega f d\mu = 0$, то всі функції g, що підпорядковуються нерівності $0 \leqslant g \leqslant f$, також лежать в E (аналог повноти).

Зазначимо, що переходом від f_n до $-f_n$ легко одержати ще одну властивість монотонного класу:

$(2')$ якщо $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots \in E$, f_n утворюють незростаючу послідовність, збіжну в кожній точці до деякої функції f і $\inf\limits_n \int\limits_\Omega f_n d\mu > -\infty$, то $f \in E$.

Теорема. *Нехай (Ω, Σ, μ) — простір зі скінченною мірою, отриманий, як описано в підрозділі 2.2, продовженням міри μ з деякого півкільця з одиницею $\Phi \subset \Sigma$, E — монотонний клас функцій, який містить характеристичні функції всіх елементів півкільця Φ. Тоді E збігається із множиною всіх інтегровних на Ω функцій.*

Доведення. Позначимо через $\mathcal{M}$ сім'ю всіх множин, характеристичні функції яких належать до E. $\mathcal{M}$ — це монотонний клас множин, який містить Φ як підклас. За теоремою про монотонний клас множин (п. 2.2.4), $\mathcal{M} = \Sigma$. Отже, до класу E належать характеристичні функції всіх вимірних підмножин. Кожна скінченнозначна інтегровна функція має вигляд $\sum_{k=1}^{n} a_k \mathbb{1}_{A_k}$ з $A_k \in \Sigma$, і за лінійністю всі такі функції лежать в E. Будь-яка невід'ємна зліченнозначна інтегровна функція $f = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \mathbb{1}_{A_k}$, $a_k \geqslant 0$ є границею неспадної послідовності $f_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbb{1}_{A_k}$ скінченнозначних і, отже, також лежить в E. Будь-яку інтегровну невід'ємну функцію можна зобразити у вигляді границі неспадної послідовності невід'ємних зліченнозначних інтегровних функцій, і, нарешті, будь-яка інтегровна функція f зображується у вигляді різниці $f = f^+ - f^-$ двох невід'ємних інтегровних функцій. □

Вправи

1. Нехай E — монотонний клас, $f \in E$, $f \geqslant 0$ і $\int_\Omega f d\mu = 0$. Тоді всі функції g, які задовольняють нерівність $|g| \leqslant f$, також лежать в E.

2. Доведіть незалежність аксіом монотонного класу. Іншими словами, наведіть приклади сімей інтегровних функцій, які підпорядковуються двом аксіомам монотонного класу, але не підпорядковуються аксіомі, що залишилась. Наприклад, сім'ї, яка задовольняє аксіоми (1) і (3), проте не задовольняє аксіому (2) і т. д.

4.5. Кратний інтеграл

4.5.1. Добуток просторів з мірою

Нехай $(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$ і $(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$ — простори зі скінченними мірами, $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$. Як і в п. 2.1.3, прямокутниками в Ω назвемо множини вигляду $A_1 \times A_2$, де $A_1 \in \Sigma_1$, $A_2 \in \Sigma_2$. Через Φ позначимо сім'ю всіх прямокутників в Ω.

Теорема 1. *Сім'я Φ всіх прямокутників в Ω утворює півкільце з одиницею.*

Доведення. Нехай $A = A_1 \times A_2$ і $B = B_1 \times B_2$ — довільні прямокутники. Тоді $A \cap B = (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2)$, тобто знову є прямокутником. Далі, $\Omega \backslash A = ((\Omega_1 \backslash A_1) \times \Omega_2) \cup (A_1 \times (\Omega_2 \backslash A_2))$, тобто доповнення до прямокутника зображується у вигляді диз'юнктного об'єднання двох прямокутників. Нарешті, весь простір Ω — також прямокутник. □

Означимо міру μ на Φ рівністю $\mu(A) = \mu_1(A_1) \times \mu_2(A_2)$.

Теорема 2. *Міра μ на Φ зліченно-адитивна.*

Доведення. Нехай $A = A_1 \times A_2$, $B_n = A_{1,n} \times A_{2,n}$, прямокутники B_n попарно не перетинаються і в об'єднанні дають прямокутник A. Для будь-якого $t \in A_1$ позначимо через $N(t)$ множину тих індексів n, для яких $A_{1,n}$ містить t. Тоді сім'я множин $A_{2,n}$, $n \in N(t)$ диз'юнктна, і $\bigcup_{n \in N(t)} A_{2,n} = A_2$. Введемо в розгляд допоміжні функції на A_1: $f_n = \mu_2(A_{2,n}) \mathbb{1}_{A_{1,n}}$. Ці функції інтегровні за мірою μ_1, й інтеграли дорівнюють $\mu(B_n)$. Зазначимо, що для будь-якого $t \in A_1$ виконані співвідношення

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(t) = \sum_{n \in N(t)} \mu_2(A_{2,n}) = \mu_2\Big(\bigcup_{n \in N(t)} A_{2,n}\Big) = \mu_2(A_2).$$

Залишається проінтегрувати обидві частини рівності, що можливо за теоремою Леві про ряди, щоб отримати потрібну рівність $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(B_n) = \mu(A)$. □

Застосуємо схему продовження мір, описану в підрозділі 2.2, до міри μ на Φ. Отриманий простір з мірою (Ω, Σ, μ) називається добутком просторів $(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$ і $(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$. Для міри μ використовують позначення $\mu_1 \times \mu_2$, а елементи одержаної σ-алгебри Σ називають ще $\mu_1 \times \mu_2$-вимірними множинами. Зрозуміло, що σ-алгебра Σ включають як підсистему найменшу σ-алгебру, яка містить всі прямокутники (останню ми позначали $\Sigma_1 \otimes \Sigma_2$).

Зауваження 1. Нехай $(\Omega_k, \Sigma_k, \mu_k)$, $k \in \{1, 2, ..., n\}$ — скінченний набір просторів з мірою. *Паралелепіпедом* в $\prod_{k=1}^n \Omega_k = \Omega_1 \times \Omega_2 \times ... \times \Omega_n$ називається множина вигляду $\prod_{k=1}^n A_k$, $A_k \in \Sigma_k$. Покладемо

$$\mu\left(\prod_{k=1}^n A_k\right) = \prod_{k=1}^n \mu(A_k).$$

Можна довести, що паралелепіпеди утворюють півкільце з одиницею і що μ — зліченно-адитивна міра на цьому півкільці. Знову застосувавши процедуру продовження, отримаємо простір з мірою, що є добутком просторів $(\Omega_k, \Sigma_k, \mu_k)$. Проте, щоб не повторювати у випадку n співмножників міркування, вже проведені для $n = 2$, зручніше добуток скінченного числа просторів з мірою визначати індукцією за числом співмножників. Тобто спочатку перемножити перші два простори, потім одержаний добуток помножити на третій простір, потім ще на один і т. д. Другий шлях зручніший ще й тим, що теореми, отримані для добутку пари просторів з мірою, можна потім за індукцією переносити на довільне скінченне число співмножників.

Зауваження 2. Поки ми дали лише формальне означення добутку просторів з мірою. Глибше відчути зміст цього поняття читач зможе після вивчення наступного параграфа. Зокрема, цьому допоможе вправа 1 п. 4.5.2, де задано явну формулу для обчислення міри, аналогічну формулі площі криволінійної трапеції. Проте можна цілком успішно оперувати з добутком мір і без цієї формули, користуючись лише зліченною адитивністю, повнотою міри і формулою для міри прямокутника.

Вправи

1. Розглянемо одиничний квадрат K як добуток відрізків $[0,1] \times [0,1]$ і плоску міру Лебега $\lambda \times \lambda$ на K означимо як добуток звичайних лінійних мір Лебега на відрізку. Перевірте, що діагональ квадрата — це множина плоскої міри нуль.

2. Нехай множина $A \subset [0,1]$ має лінійну міру нуль. Доведіть, що множина тих $x = (x_1, x_2) \in K$, для яких $x_1 - x_2 \in A$, має плоску міру нуль.

3. Нехай A — підмножина в K, що має площу. Перевірте, що $(\lambda \times \lambda)(A)$ збігається з площею множини A.

4. Нехай f — довільна вимірна функція на $[0,1]$. Доведіть, що функція $g\colon K \to \mathbb{R}$, яка визначається рівністю $g(x_1, x_2) = f(x_1)$, вимірна на K.

5. Доведіть, що функція $g(x_1, x_2) = x_1 - x_2$ вимірна на K.

6. Доведіть, що функція з попередньої вправи має таку властивість: для будь-якої вимірної за Лебегом множини $A \subset [0,1]$ множина $f^{-1}(A)$ вимірна за мірою Лебега на квадраті.

7. Нехай f — довільна вимірна функція на $[0,1]$. Доведіть, що функція $g\colon K \to \mathbb{R}$, яка визначається рівністю $g(x_1, x_2) = f(x_1 - x_2)$, вимірна на K. Розглянемо функцію $g\colon K \to \mathbb{R}$, яка діє за правилом $g(x_1, x_2) = x_1$. Через D позначимо головну діагональ квадрата K. Задамо на σ-алгебрі $\mathfrak{B}$ борелевих підмножин квадрата K міру μ у такий спосіб: $\mu(A) = \lambda(g(A \cap D))$. Перевірте, що μ — зліченно-адитивна міра на σ-алгебрі $\mathfrak{B}$, що значення мір μ і $\lambda \times \lambda$ збігаються на прямокутниках вигляду $[a,b] \times [0,1]$ і $[0,1] \times [a,b]$, проте на квадратах вигляду $[a,b] \times [a,b]$ значення цих мір вже можуть відрізнятися.

8. Доведіть, що $\mathfrak{B}$ — це найменша σ-алгебра підмножин квадрата K, яка містить всі прямокутники вигляду $[a,b] \times [0,1]$ і $[0,1] \times [a,b]$. Цей факт разом із попереднім прикладом показує, що дві зліченно-адитивні міри можуть збігатися на сім'ї підмножин, яка породжує цю σ-алгебру, але при цьому не збігатися на всій σ-алгебрі.

4.5.2. Повторний інтеграл і теорема Фубіні

У пп. 4.5.2 і 4.5.3, $(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$ і $(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$ будуть просторами зі скінченними мірами, а через (Ω, Σ, μ) позначатимемо добуток цих просторів. Кожен елемент множини Ω має вигляд (t_1, t_2), де $t_1 \in \Omega_1$, $t_2 \in \Omega_2$. Тому кожну функцію f, означену на Ω, доцільно розглядати як функцію двох змінних $f(t_1, t_2)$, а інтеграл $\int_\Omega f d\mu$ за аналогією з тим, як це робилось у курсі аналізу, природно називати *подвійним інтегралом.* При розгляді інтеграла за однією зі змінних при фіксованій другій змінній ми будемо використовувати вирази типу $\int_{\Omega_1} f(t_1, t_2)\, d\mu_1(t_1)$, де умовне позначення $d\mu_1(t_1)$ підкреслює, за якою змінною йде інтегрування.

Означення. Для функції $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ існує *повторний інтеграл*

$$\int\limits_{\Omega_2} \left[\int\limits_{\Omega_1} f(t_1, t_2)\, d\mu_1(t_1) \right] d\mu_2(t_2),$$

якщо для майже всіх значень змінної $t_2 \in \Omega_2$ функція $f(t_1, t_2)$ інтегровна на Ω_1 за мірою μ_1 як функція змінної t_1 і функція

$$g(t_2) = \int\limits_{\Omega_1} f(t_1, t_2)\, d\mu_1(t_1)$$

інтегровна на Ω_2 за мірою μ_2 як функція змінної t_2.

Теорема Фубіні. *Якщо функція $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ інтегровна на Ω за сукупністю змінних (тобто існує $\int_\Omega f d\mu$), то для f існує повторний інтеграл, і подвійний інтеграл дорівнює повторному:*

$$\int\limits_{\Omega} f d\mu = \int\limits_{\Omega_2} \left[\int\limits_{\Omega_1} f(t_1, t_2)\, d\mu_1(t_1) \right] d\mu_2(t_2).$$

Доведення. Будемо говорити, що функція $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ належить до *класу Фубіні* ($f \in \mathrm{Fub}(\mu)$), якщо f інтегровна за мірою μ на Ω, для f існує повторний інтеграл, і подвійний інтеграл дорівнює повторному:

$$\int\limits_{\Omega} f d\mu = \int\limits_{\Omega_2} \left[\int\limits_{\Omega_1} f(t_1, t_2)\, d\mu_1(t_1) \right] d\mu_2(t_2).$$

Нам потрібно довести, що клас Фубіні збігається з класом усіх функцій, інтегровних за сукупністю змінних. Оскільки клас Фубіні містить характеристичні функції всіх прямокутників, достатньо перевірити (див. п. 4.4.4), що клас Фубіні є монотонним класом. Перша з аксіом монотонного класу — лінійність — перевіряється зовсім просто. Перевірка ж другої і третьої аксіом вимагає певних зусиль.

Потрібно довести такі два твердження.

A. Якщо $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots \in \mathrm{Fub}(\mu)$, f_n утворюють неспадну послідовність, збігаються в кожній точці до деякої функції f і $\sup\limits_n \int\limits_\Omega f_n d\mu = C < \infty$, то $f \in \mathrm{Fub}(\mu)$.

B. Якщо $f \in \mathrm{Fub}(\mu)$, $f \geqslant 0$, $\int\limits_\Omega f d\mu = 0$ і функція g задовольняє нерівність $0 \leqslant g \leqslant f$, то $g \in \mathrm{Fub}(\mu)$.

Почнемо з твердження A. Позначимо $\int_{\Omega_1} f_n(t_1, t_2)\, d\mu_1(t_1)$ через $g_n(t_2)$. За умовою, функції g_n визначені майже скрізь та інтегровні на Ω_2; $\int\limits_{\Omega_2} g_n d\mu_2 = \int\limits_\Omega f_n d\mu$. Далі, g_n утворюють майже скрізь неспадну послідовність функцій, і

$$\sup_n \int\limits_{\Omega_2} g_n d\mu_2 = \sup_n \int\limits_{\Omega} f_n d\mu = C < \infty.$$

Згідно з теоремою Леві, послідовність (g_n) майже скрізь на Ω_2 збігається до деякої інтегровної функції g, і

$$\int\limits_{\Omega_2} g d\mu_2 = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega_2} g_n d\mu_2 = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega} f_n d\mu. \tag{1}$$

Позначимо через D множину тих точок $t_2 \in \Omega_2$, для яких визначені $g_n(t_2)$ і $g(t_2)$, $\int_{\Omega_1} f_n(t_1,t_2)\,d\mu_1(t_1) = g_n(t_2)$, $g_n(t_2)$ не спадають зі зростанням n і збігаються до $g(t_2)$. За побудовою, $\mu_2(\Omega_2 \backslash D) = 0$. У кожній точці $t_2 \in D$ функції f_n інтегровні за змінною t_1, не спадають зі зростанням n і збігаються до функції f. Крім того, виконані співвідношення

$$\int\limits_{\Omega_1} f_n(t_1,t_2)\,d\mu_1(t_1) = g_n(t_2) \leqslant g(t_2) < \infty.$$

Знову застосовуючи теорему Леві, але тепер вже за змінною t_1, отримуємо, що для будь-якого $t_2 \in D$ (тобто для майже всіх значень змінною t_2) функція f інтегровна за t_1, і

$$\int\limits_{\Omega_1} f(t_1,t_2)\,d\mu_1(t_1) = \lim_{n\to\infty}\int\limits_{\Omega_1} f_n(t_1,t_2)\,d\mu_1(t_1) = \lim_{n\to\infty} g_n(t_2) = g(t_2). \tag{2}$$

Нарешті, теорема Леві, застосована до функцій f_n на Ω (тобто за сукупністю змінних), дає рівність $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{\Omega} f_n d\mu = \int\limits_{\Omega} f d\mu$. Зіставляючи співвідношення (1), (2) і останню рівність, одержуємо, що

$$\int\limits_{\Omega_2}\left[\int\limits_{\Omega_1} f(t_1,t_2)\,d\mu_1(t_1)\right] d\mu_2(t_2) = \int\limits_{\Omega_2} g d\mu_2 =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int\limits_{\Omega_2} g_n d\mu_2 = \lim_{n\to\infty}\int\limits_{\Omega} f_n d\mu = \int\limits_{\Omega} f d\mu,$$

тобто $f \in \mathrm{Fub}(\mu)$.

Тепер доведемо твердження В. По-перше, зі співвідношень $0 \leqslant g \leqslant f$ і $\int_\Omega f d\mu = 0$ випливає, що

$$\int\limits_{\Omega} g d\mu = 0. \tag{3}$$

Далі, позначимо $\int\limits_{\Omega_1} f(t_1,t_2)\,d\mu_1(t_1)$ через $h(t_2)$. Оскільки $f \in Fub(\mu)$, функція h визначена майже скрізь на Ω_2, інтегровна, і

$$\int\limits_{\Omega_2} h d\mu_2 = \int\limits_{\Omega} f d\mu = 0.$$

З огляду на невід'ємність, функція h майже скрізь на Ω_2 дорівнює нулю (впевнений, шановний читач впорався з вправою 5 п. 4.3.1). Позначимо через D множину тих точок $t_2 \in \Omega_2$, для яких $h(t_2) = 0$. Доповнення до множини D в Ω_2 має нульову міру, і при кожному фіксованому $t_2 \in D$ функція $f(t_1,t_2)$ інтегровна на Ω_1 за змінною t_1, і $\int_{\Omega_1} f(t_1,t_2)\,d\mu_1(t_1) = 0$. Знову з огляду на додатність при кожному фіксованому $t_2 \in D$ для майже всіх $t_1 \in \Omega_1$ значення $f(t_1,t_2)$ дорівнює нулю. Але на підставі нерівності $0 \leqslant g \leqslant f$ в тих точках, де $f(t_1,t_2) = 0$, там і $g(t_1,t_2) = 0$. Тому, при кожному фіксованому $t_2 \in D$ для майже всіх $t_1 \in \Omega_1$ значення $g(t_1,t_2)$ дорівнює нулю. Отже, при $t_2 \in D$ (тобто для майже всіх значень змінної t_2) функція g інтегровна за t_1, і $\int_{\Omega_1} g(t_1,t_2)\,d\mu_1(t_1) = 0$. Зіставивши останній запис із рівністю (3), одержуємо потрібну належність функції g до класу Фубіні. □

Зауваження 1. Оскільки змінні t_1 і t_2 в умовах теореми Фубіні рівноправні, то можна поміняти їх місцями у твердженні теореми. Тому, якщо існує подвійний інтеграл, то визначені повторні інтеграли в обох можливих порядках інтегрування, й обидва ці інтеграли дорівнюють подвійному інтегралу. Отже, якщо існує подвійний інтеграл, то можна міняти порядок інтегрування в повторному інтегралі:

$$\int\limits_{\Omega_2}\left[\int\limits_{\Omega_1} f(t_1,t_2)\,d\mu_1(t_1)\right] d\mu_2(t_2) = \int\limits_{\Omega_1}\left[\int\limits_{\Omega_2} f(t_1,t_2)\,d\mu_2(t_2)\right] d\mu_1(t_1).$$

Саме в цій формі теорема Фубіні найчастіше застосовується.

Вправи

1. Нехай A — вимірна підмножина в $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$. Для будь-якого $t_1 \in \Omega_1$ позначимо через A_{t_1} множину тих $t_2 \in \Omega_2$, для яких $(t_1, t_2) \in A$. Доведіть, спираючись на теорему Фубіні, що $A_{t_1} \in \Sigma_2$ для майже всіх $t_1 \in \Omega_1$ і $\mu(A) = \int_{\Omega_1} \mu_2(A_{t_1})\,d\mu_1(t_1)$.

2. Нехай в умовах попередньої вправи функція двох змінних f інтегровна на A за мірою μ. Доведіть, що

$$\int\limits_A f d\mu = \int\limits_{\Omega_1}\left[\int\limits_{A_{t_1}} f(t_1,t_2)\,d\mu_2(t_2)\right] d\mu_1(t_1).$$

3. Нехай A_1 — невимірна за Лебегом підмножина відрізка $[0,1]$. Означимо підмножину $A \subset [0,1]\times[0,1]$ як об'єднання множин $A_1 \times [0,\ 1/2]$ і $([0,1]\setminus A_1)\times(1/2,\ 1]$. Покажіть, що для функції $f = \mathbb{1}_A$ існує повторний інтеграл $\int\limits_{[0,1]}\left[\int\limits_{[0,1]} f(t,\tau)d\lambda(\tau)\right] d\lambda(t)$. Чому він дорівнює? Покажіть, що інтеграл $\int\limits_{[0,1]}\left[\int\limits_{[0,1]} f(t,\tau)d\lambda(t)\right] d\lambda(\tau)$ не існує. Чи буде функція f інтегровна за сукупністю змінних? вимірна?

4. Наведіть приклад функції на квадраті, для якої повторні інтеграли існують, але відрізняються між собою.

5. Наведіть приклад функції на квадраті, для якої повторні інтеграли існують і дорівнюють один одному, але за сукупністю змінних функція не інтегровна.

4.5.3. Обернена теорема Фубіні

Як показують наведені вище вправи, поміняти порядок інтегрування в повторному інтегралі можна не завжди. Умова, за якою це можна робити, — інтегровність функції за сукупністю змінних — звучить занадто абстрактно. Справді, як визначити для конкретної функції, скажімо двох дійсних змінних, чи інтегровна вона за сукупністю змінних? Наскільки простіше було б мати справу з повторним інтегралом, якщо б, переконавшись, що він існує для якоїсь функції в одному порядку, можна було б бути впевненим, що ця функція інтегровна і в іншому порядку, і як функція двох змінних також.

Теорема. *Нехай f — вимірна невід'ємна функція на Ω, для якої існує повторний інтеграл* $\int\limits_{\Omega_2}\left[\int\limits_{\Omega_1} f(t_1,t_2)\,d\mu_1(t_1)\right] d\mu_2(t_2)$. *Тоді для f існує подвійний інтеграл, і, отже,*

$$\int\limits_{\Omega_2}\left[\int\limits_{\Omega_1} f(t_1,t_2)\,d\mu_1(t_1)\right] d\mu_2(t_2) = \int\limits_{\Omega_1}\left[\int\limits_{\Omega_2} f(t_1,t_2)\,d\mu_2(t_2)\right] d\mu_1(t_1).$$

Доведення. Введемо у розгляд множини $A_n = \{t \in \Omega : f(t) \leqslant n\}$ і функції $f_n = f \cdot \mathbb{1}_{A_n}$. Кожна функція f_n вимірна й обмежена на Ω, отже, інтегровна за сукупністю змінних (див. 4.3.3). Далі,

$$\int\limits_{\Omega} f_n d\mu = \int\limits_{\Omega_2} \left[\int\limits_{\Omega_1} f_n(t_1, t_2)\, d\mu_1(t_1) \right] d\mu_2(t_2) \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{\Omega_2} \left[\int\limits_{\Omega_1} f(t_1, t_2)\, d\mu_1(t_1) \right] d\mu_2(t_2),$$

тобто $\int_{\Omega} f_n d\mu$ обмежені зверху сталою, яка не залежить від n. Нарешті, f_n утворюють неспадну послідовність і прямують поточково до f. Для завершення доведення залишається застосувати теорему Леві. □

Якщо функція вимірна, то її інтегровність еквівалентна інтегровності її модуля. Отримуємо:

Наслідок. *Для вимірної функції f на Ω такі умови еквівалентні:*

(1) f інтегровна на Ω за сукупністю змінних;

(2) для функції $|f|$ існує повторний інтеграл

$$\int\limits_{\Omega_2} \left[\int\limits_{\Omega_1} |f(t_1, t_2)|\, d\mu_1(t_1) \right] d\mu_2(t_2).$$

Зауваження 1. Оскільки добуток $\prod_{k=1}^{n} (\Omega_k, \Sigma_k, \mu_k)$ скінченного числа просторів з мірою будується індуктивно, як $\left(\prod_{k=1}^{n-1} (\Omega_k, \Sigma_k, \mu_k)\right) \times (\Omega_n, \Sigma_n, \mu_n)$, результати останніх двох пунктів нескладно переносяться на випадок кратного інтеграла.

Зауваження 2. Як ми вже зазначали, для неповних просторів з мірою інтегровність функції не обов'язково означає вимірність: для отримання вимірності потрібно ще видалити деяку множину міри 0. Добуток просторів з мірою повний за побудовою, але самі співмножники можуть бути і неповними просторами. У цьому випадку, якщо з певної причини необхідна вимірність функції двох змінних за першою чи другою змінною, потрібно обмежитись $\Sigma_1 \otimes \Sigma_2$-вимірними функціями. Пропонуємо читачеві самому перевірити, що в цьому випадку функція f при кожному фіксованому значенні однієї змінної вимірна за другою змінною. Для доведення доцільно спочатку розглянути характеристичні функції множин (див. вправу 6 п.2.1.3), а потім скористатись апроксимацією вимірної функції зліченнозначними.

Вправи

1. Доведіть, що якщо функція f на $[0, 1] \times [0, 1]$ інтегровна як функція двох змінних за Ріманом, то вона інтегровна і за Лебегом як функція двох змінних.

2. Доведіть формулу переходу до полярних координат для інтеграла Лебега.

4.6. Інтеграл Лебега на відрізку і на осі

4.6.1. Інтеграл Лебега і невластивий інтеграл на відрізку

Як вже було зазначено у вправі 8 п. 4.2.2, з умови (2) теореми 1 п. 4.2.2 випливає, що кожна інтегровна за Ріманом функція $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ інтегровна і за Лебегом. Більше того, за теоремою п. 4.3.3, всі обмежені вимірні функції на відрізку є інтегровними за Лебегом.

Якщо ж функція інтегровна за Ріманом, то вона повинна бути обмеженою. Тому в курсі математичного аналізу детально вивчався невластивий інтеграл як спосіб визначення інтеграла для деяких необмежених на відрізку функцій. Щоб краще відчути природу інтеграла Лебега, нижче ми розберемо зв'язок між невластивим інтегралом та інтегралом Лебега.

Теорема 1. *Нехай функція $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ неперервна скрізь, крім точки a, й інтегровна за Лебегом на $[a,b]$. Тоді існує невластивий інтеграл $\int_a^b f(t)dt$, і цей невластивий інтеграл дорівнює відповідному інтегралу Лебега $\int_{[a,b]} fd\lambda$.*

Доведення. Нехай $a_n \in [a,b]$, $a_n \to a$ $(n \to \infty)$. Введемо в розгляд допоміжні функції $f_n = f \cdot \mathbb{1}_{[a_n,b]}$. Функції f_n утворюють майже скрізь збіжну до f послідовність інтегровних (як за Ріманом, так і за Лебегом) функцій, причому $|f|$ є інтегровною мажорантою для всіх f_n. Згідно з теоремою Лебега,

$$\int\limits_{[a,b]} f_n d\lambda = \int\limits_{[a_n,b]} fd\lambda \xrightarrow[n\to\infty]{} \int\limits_{[a,b]} fd\lambda.$$

Але, за означенням, це й означає, що існує невластивий інтеграл, який дорівнює $\int_{[a,b]} fd\lambda$. □

Теорема 2. *Нехай функція $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ неперервна скрізь, крім точки a, і невід'ємна. Тоді, якщо існує невластивий інтеграл $\int_a^b f(t)dt$, то f інтегровна за Лебегом на $[a,b]$.*

Доведення. Нехай a_n і (f_n) — ті самі, що й у доведенні попередньої теореми. Послідовність (f_n) не спадає і прямує майже скрізь до функції f. Далі, за означенням невластивого інтеграла, $\int_{[a,b]} f_n d\lambda = \int_{[a_n,b]} fd\lambda$ прямує до $\int_a^b f(t)dt$ при $n \to \infty$. Залишається застосувати теорему Леві про монотонні послідовності. □

З курсу математичного аналізу читачеві добре відомі приклади функцій, для яких існує невластивий інтеграл, але модуль яких неінтегровний навіть у невластивому сенсі. Такі функції неінтегровні за Лебегом, оскільки в інтегровної за Лебегом функції модуль також повинен бути інтегровним за Лебегом. Надалі якщо функція інтегровна за Лебегом на відрізку, то для інтеграла Лебега ми використовуватимемо як позначення $\int_{[a,b]} f(t)d\lambda$, так і більш звичне з курсу аналізу $\int_a^b f(t)dt$.

Вправи

Які з перерахованих нижче функцій f інтегровні за Лебегом на відрізку $[a,b]$?

1. $f(t) = t^2$, $[a,b] = [0,1]$.
2. $f(t) = t^{-2}$, $[a,b] = [0,1]$.
3. $f(t) = t^{-2}$, $[a,b] = [1,2]$.
4. $f(t) = \sin t^{-2}$, $[a,b] = [0,1]$.

5. $f(t) = \sin^{-2} t$, $[a, b] = [0, 1]$.
6. $f(t) = t^{-\frac{1}{2}}$, $[a, b] = [0, 1]$.
7. $f(t) = \frac{1}{t}$, $[a, b] = [-1, 1]$.

Які з перерахованих нижче функцій на квадраті $[0, 1] \times [0, 1]$ інтегровні за плоскою мірою Лебега, а які ні?

8. $f(x, y) = x + y$.
9. $f(x, y) = \frac{1}{x+y}$.
10. $f(x, y) = x - y$.
11. $f(x, y) = \frac{1}{x-y}$.
12. $f(x, y) = \sin\left(\frac{1}{x-y}\right)$.
13. При яких значеннях параметра α функція $f(x, y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}$ інтегровна на $[0, 1] \times [0, 1]$?

4.6.2. Інтеграл за σ-скінченною мірою

У підрозділах 4.2–4.5 ми вивчали теорію інтеграла Лебега на просторі (Ω, Σ, μ) зі скінченною мірою. Щоб успішно означити інтеграл Лебега на осі чи, скажімо, на необмеженій підмножині площини, нам потрібно розглянути випадок зліченно-адитивних мір, які набувають на деяких елементах σ-алгебри Σ значення $+\infty$. Такі міри називатимемо нескінченними.

Отож, нехай (Ω, Σ, μ) — простір з нескінченною мірою. Підмножина $A \in \Sigma$ називається множиною σ-скінченної міри (інший термін — міра μ σ-скінченна на A), якщо A можна зобразити у вигляді об'єднання зліченного числа множин скінченної міри. σ-Скінченні міри вже згадувались у п. 2.3.7. Якщо міра μ σ-скінченна на A, то A можна записати у вигляді $A = \coprod_{n=1}^{\infty} A_n$, $0 < \mu(A_n) < \infty$. Зазначимо також, що зліченне об'єднання множин σ-скінченної міри знову є множиною σ-скінченної міри.

Для функцій, визначених на множині A σ-скінченної міри, можна ввести розбиття множини A на підмножини скінченної міри. Можна також ввести інтегральні суми й інтеграл Лебега у такий самий спосіб, як ми це робили вище для множин скінченної міри. Читач може самостійно перевірити, що доведення основних властивостей інтеграла залишаються правильними і в цьому випадку. Єдиною перешкодою, яку доводиться долати при поширені властивостей інтеграла з випадку скінченної на випадок σ-скінченної міри — це неінтегровність сталої на A функції. Ми рекомендуємо читачеві переглянути ще раз усю викладену вище схему побудови інтеграла Лебега з тим, щоб самостійно побудувати за взірцем, який ми вже маємо, теорію інтеграла на множині σ-скінченної міри. У цьому ж параграфі буде запропоновано обхідний шлях, який дозволяє за допомогою деякого штучного прийому звести інтегровність за σ-скінченною мірою до вже розібраного випадку інтеграла за скінченною мірою. Це дозволить звести властивості інтеграла за σ-скінченною мірою до вже відомих нам результатів.

Нехай A — множина σ-скінченної міри. Зафіксуємо деяке зображення множини A у вигляді $A = \coprod_{n=1}^{\infty} A_n$, де $A_n \in \Sigma$ і $0 < \mu(A_n) < \infty$. Поняття інтеграла на кожній множині скінченної міри, зокрема на кожній з A_n, нам вже відоме. Відштовхуючись від цього, можна ввести таке означення:

Означення 1. Назвемо функцію f *інтегровною на A за σ-скінченною мірою μ*, якщо f μ-інтегровна на кожному з A_k і $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_{A_k} |f| d\mu < \infty$. Покладемо, за означенням, $\int\limits_A f d\mu = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_{A_k} f d\mu$.

Введемо позначення $a_n = 2^n \mu(A_n)$. Означимо на сім'ї Σ_A всіх вимірних підмножин множини A нову міру μ_1 формулою $\mu_1(B) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(B\cap A_n)}{a_n}$. При такому означенні трійка (A, Σ_A, μ_1) є простором зі скінченною мірою. Задамо на A функцію $g = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \mathbb{1}_{A_n}$.

Лема 1. *Нехай $B \in \Sigma_A$ і $\mu(B) < \infty$. Тоді функція $h\colon B \to \mathbb{R}$ інтегровна на B за мірою μ тоді і тільки тоді, коли функція $f \cdot g$ інтегровна на B за мірою μ_1. При цьому $\int_B h d\mu = \int_B hg d\mu_1$.*

Доведення. На Σ_{A_n} маємо $\mu_1 = \frac{1}{a_n}\mu$, а функція g на A_n дорівнює сталій a_n. Тому для $B \subset A_n$ твердження очевидне:

$$\int\limits_B h d\mu = \int\limits_B a_n h\, d\left(\frac{1}{a_n}\mu\right) = \int\limits_B hg d\mu_1.$$

Довільну ж множину B можна зобразити у вигляді $B = \coprod_{n=1}^{\infty}(B \cap A_n)$, де множини $B \cap A_n$ диз'юнктні і кожна з них міститься у своєму A_n. Оскільки на B за умовою не тільки μ_1, але й μ скінченна, ми можемо застосувати теорему 4 п. 4.2.3 про зліченну адитивність інтеграла як функції множини до інтеграла на B як за μ_1, так і за μ, і скласти твердження леми із вже доведених тверджень на підмножинах $B \cap A_n$. □

Лема 2. *Функція f інтегровна на A за мірою μ тоді і тільки тоді, коли функція $f \cdot g$ інтегровна на A за мірою μ_1. При цьому $\int\limits_A f d\mu = \int\limits_A fg d\mu_1$.*

Доведення. Потрібно застосувати лему 1 до кожної з множин A_k, скористатись означенням 1 і застосувати теорему 4 п. 4.2.3 до міри μ_1. □

На підставі леми 2 лінійність інтеграла, можливість інтегрування нерівностей, вимірність інтегровної функції, критерій інтегровності вимірної функції, лема Фату, теорема Лебега про мажоровану збіжність, теореми Леві — всі ці властивості для інтеграла за мірою μ легко випливають з відповідних властивостей для інтеграла за мірою μ_1.

Наступна властивість інтеграла за σ-скінченною мірою означає, що інтеграл не залежить від вибору зображення множини A у вигляді $A = \coprod_{n=1}^{\infty} A_n$ (це запитання напевно виникло у читача після прочитання означення 1).

Теорема 1. *Нехай A — множина σ-скінченної міри, $A = \coprod_{n=1}^{\infty} B_n$, де $B_n \in \Sigma$ і $\mu(B_n) < \infty$. Інтеграл $\int_A f d\mu$ існує тоді і тільки тоді, коли f інтегровна на кожній B_n і $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_{B_k} |f| d\mu < \infty$. При цьому*

$$\int\limits_A f d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{B_k} f d\mu.$$

Доведення. Нехай μ_1 — скінченна міра з лем 1 і 2. Скориставшись лемою 2 і застосувавши теорему 4 п. 4.2.3 до скінченної міри μ_1, отримаємо, що функція f інтегровна на A за мірою μ тоді і тільки тоді, коли функція $f \cdot g$ інтегровна на кожній B_n за μ_1 і збігається ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_{B_k} |f|\, g d\mu_1$. При цьому $\int\limits_A f d\mu = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_{B_k} fg d\mu_1$. Для завершення доведення потрібно застосувати лему 1 на множинах B_k, що можливо з огляду на скінченність міри μ на кожній з цих множин. □

Вправи

У наведених нижче вправах A_n і μ_1 взяті з означення 1 і леми 1.

1. Нехай $B \subset A_n$ при деякому n. Тоді $\mu_1(B) = \mu(B)/a_n$.

2. Нехай D — розбиття множини A на підмножини A_n. Тоді для будь-якого розбиття $D_1 = \{\Delta_k\}_{k=1}^{\infty} \succ D$ і будь-якого вибору T відмічених точок, інтегральна сума $S_A(f, D, T) = \sum_{k=1}^{\infty} f(t_k)\mu(\Delta_k)$ за мірою μ збігається з інтегральною сумою $S_A(fg, D, T) = \sum_{k=1}^{\infty} (fg)(t_k)\mu_1(\Delta_k)$ за мірою μ_1. Отже, $\int_A f d\mu$ можна означити як границю інтегральних сум, і за лемою 2 це означення еквівалентне початковому.

3. Доведіть, що для множини $B \subset A$ умови $\mu(B) = 0$ і $\mu_1(B) = 0$ еквівалентні.

4. Для послідовності функцій (f_n) на A такі умови еквівалентні: $f_n \to f$ майже скрізь у розумінні міри μ; $f_n \to f$ майже скрізь у розумінні міри μ_1; $f_n g \to fg$ майже скрізь у розумінні міри μ_1.

5. Нехай λ — міра Лебега на осі. Вимірна функція f на осі інтегровна за λ тоді і тільки тоді, коли

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \int\limits_{[k,k+1)} |f|\, d\lambda < \infty$$

і

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f d\lambda = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int\limits_{[k,k+1)} f d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{[-n,n)} f d\lambda.$$

6. Спираючись на вже доведені теореми про граничний перехід під знаком інтеграла для інтеграла за скінченною мірою, доведіть лему Фату, теорему Лебега про мажоровану збіжність, теореми Леві про послідовності і ряди для випадку σ-скінченної міри.

7. **(Увага!)** Теорема про рівномірну границю для інтеграла за σ-скінченною мірою **не виконується**. Покажіть це на такому прикладі: послідовність $f_n = \frac{1}{2n}\mathbb{1}_{[-n,n]}$ інтегровних на осі функцій прямує рівномірно до нуля, але інтеграли всіх цих функцій дорівнюють одиниці.

8. Доведіть теорему 1 без додаткового припущення $\mu(B_n) < \infty$.

9. Нехай $(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$, $(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$ — простори з σ-скінченними мірами, $\{A_k\}_1^{\infty}$, $\{B_k\}_1^{\infty}$ — відповідні розбиття множин Ω_1 і Ω_2 на підмножини скінченної міри. Тоді прямокутники $\{A_k \times B_j\}_{k,j=1}^{\infty}$ утворюють розбиття декартового добутку $\Omega_1 \times \Omega_2$ на підмножини скінченної міри. Використовуючи це розбиття, доведіть теорему Фубіні для добутку просторів з σ-скінченними мірами.

10. Можна означити інтеграл на множинах, які не є множинами σ-скінченної міри, але це означення не розширює істотно наші уявлення про інтеграл. Нагадаємо, що *носієм функції* $f\colon A \to \mathbb{R}$ називається множина $\operatorname{supp} f = \{t \in A : f(t) \neq 0\}$. Назвемо функцію f інтегровною на A, якщо $\operatorname{supp} f$ є множиною σ-скінченної міри і f інтегровна на $\operatorname{supp} f$. За означенням, $\int_A f d\mu = \int_{\operatorname{supp} f} f d\mu$. Перевірте, що основні властивості інтеграла по множині σ-скінченної міри поширюється і на цей загальніший випадок.

11. Доведіть, що неможливо поширити поняття інтеграла на функції, носії яких не є множинами σ-скінченної міри, із збереженням основних властивостей інтеграла, а саме, зі збереженням властивостей (a) якщо $f \geqslant g$ на множині A, f і g інтегровні на A, то $\int_A f d\mu \geqslant \int_A g d\mu$ і (b) $\int_A a d\mu = a\mu(A)$ для будь-якої константи $a \in \mathbb{R}$ і будь-якої вимірної множини A скінченної міри.

4.6.3. Згортка

Означення. Для функцій f і g на осі визначена *згортка*, якщо для майже всіх $t \in \mathbb{R}$ функція $f(\tau)\, g(t-\tau)$ інтегровна за мірою Лебега на $\mathbb{R}$ як функція змінної τ.

У цьому випадку *згорткою функцій* f і g називається функція $f * g$, визначена для майже всіх $t \in \mathbb{R}$ рівністю

$$(f * g)(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\lambda(\tau).$$

Поняття згортки виявляється важливим у теорії ймовірностей (щільність розподілу суми двох незалежних випадкових величин дорівнює згортці щільностей розподілів вихідних величин) і в теорії перетворення Фур'є (перетворення Фур'є згортки двох функцій дорівнює добутку перетворень Фур'є цих функцій). У цьому пункті доведемо такий корисний результат.

Теорема. *Якщо функції f і g інтегровні на осі за мірою Лебега, то для них визначено згортку. Далі, функція $f * g$ інтегровна на осі і*

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |f * g|\, d\lambda \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}} |f|\, d\lambda \int\limits_{\mathbb{R}} |g|\, d\lambda.$$

Доведення. Насамперед, нагадаємо, що добуток інтегровних функцій не повинен бути інтегровним, тобто при якихось значеннях параметра t функція $f(\tau)\, g(t-\tau)$ може бути неінтегровною за змінною τ. Спробуємо згадати, де вже були твердження типу «для майже всіх значень першої змінної функція інтегровна за другою змінною»? Звичайно, в теоремі Фубіні. Саме до теореми Фубіні ми і будемо зводити наше твердження.

Зазначимо, що функції $f(\tau)$, $g(t-\tau)$, відтак і їх добуток $f(\tau)\, g(t-\tau)$ вимірні як функції двох змінних (див. вправи 3, 6 п. 4.5.1). Щоб довести інтегровність $f(\tau)\, g(t-\tau)$ на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, згідно із критерієм інтегровності вимірної функції (п. 4.3.3), достатньо довести інтегровність додатної функції $|f(\tau)\, g(t-\tau)|$. Для цього ж, в свою чергу, достатньо (див. п. 4.5.3) перевірити існування повторного інтеграла.

За умовою, функція g інтегровна, отже, функція $g(t-\tau)$ інтегровна по t при будь-якому значенні τ. Маємо

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |f(\tau)\, g(t-\tau)|\, d\lambda(t) = |f(\tau)| \int\limits_{\mathbb{R}} |g(t-\tau)|\, d\lambda(t) = |f(\tau)| \int\limits_{\mathbb{R}} |g(t)|\, d\lambda(t)\,.$$

Тепер легко можна обчислити повторний інтеграл:

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \left[\int\limits_{\mathbb{R}} |f(\tau)\, g(t-\tau)|\, d\lambda(t) \right] d\lambda(\tau) = \int\limits_{\mathbb{R}} |f(\tau)|\, d\lambda(\tau) \int\limits_{\mathbb{R}} |g(t)|\, d\lambda(t)\,. \qquad (1)$$

Отже, добуток $f(\tau)\, g(t-\tau)$ інтегровний як функція двох змінних. Застосовуючи теорему Фубіні, одержуємо, що для майже всіх $t \in \mathbb{R}$ функція $f(\tau)\, g(t-\tau)$ інтегровна за мірою Лебега на $\mathbb{R}$ як функція змінної τ і функція

$$(f * g)(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\lambda(\tau)$$

інтегровна за змінною t, тобто згортка визначена й інтегровна. Потрібна ж нерівність $\int_{\mathbb{R}} |f * g|\, d\lambda \leqslant \int_{\mathbb{R}} |f|\, d\lambda \int_{\mathbb{R}} |g|\, d\lambda$ безпосередньо випливає з формули (1). $\square$

Вправи

1. Операція згортки комутативна, тобто $f*g = g*f$ для будь-яких інтегровних функцій f і g.

Як ми вже зазначали вище, для комплекснозначних функцій означення і властивості інтеграла нічим істотним не відрізняються від відповідних означень і властивостей у дійсному випадку. Одним з розділів математики, де постійно використовується інтегрування комплекснозначних функцій, є гармонійний аналіз: теорія рядів Фур'є, інтеграла Фур'є і пов'язаних з цим питань. У нашому курсі ми будемо багаторазово звертатись до тих чи інших питань гармонійного аналізу для демонстрації ідей і методів застосування матеріалу, що вивчається.

2. Нехай f — комплекснозначна інтегровна функція на $\mathbb{R}$. Доведіть, що для будь-якого $t \in \mathbb{R}$ функція $f(\tau)\,e^{it\tau}$ інтегровна на $\mathbb{R}$ як функція змінної τ.

3. *Перетворенням Фур'є* інтегровної функції f на осі називається функція $\hat{f}$ на $\mathbb{R}$ (інше позначення: $F(f)$), яка задається формулою

$$\hat{f}(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(\tau)\,e^{it\tau} d\lambda(\tau).$$

Доведіть, що функція $\hat{f}$ обмежена на $\mathbb{R}$.

4. Доведіть, що функція $\hat{f}$ неперервна і на нескінченності прямує до нуля.

5. Нехай функції f і g інтегровні на осі. Тоді $F(f*g) = F(f)\,F(g)$.

6. Нехай функції f і g — 2π-періодичні функції на осі, інтегровні на відрізку $[0, 2\pi]$. Згорткою функцій g на відрізку $[0, 2\pi]$ називається функція $f*g$, визначених для майже всіх $t \in [0, 2\pi]$ рівністю

$$(f*g)(t) = \int\limits_{[0,2\pi]} f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\lambda_1(\tau),$$

де $\lambda_1 = \frac{\lambda}{2\pi}$ — нормована міра Лебега на відрізку. Доведіть, що, як і у випадку згортки на осі, згортка інтегровних функцій на відрізку коректно визначена, функція $f*g$ сама інтегровна на відрізку і

$$\int\limits_{[0,2\pi]} |f*g|\,d\lambda_1 \leqslant \int\limits_{[0,2\pi]} |f|\,d\lambda_1 \int\limits_{[0,2\pi]} |g|\,d\lambda_1.$$

7. Нагадаємо, що *коефіцієнтами Фур'є* інтегровної функції f на відрізку $[0, 2\pi]$ називаються числа

$$\hat{f}_n = \int\limits_{[0,2\pi]} f(t)\,e^{int} d\lambda_1, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

В умовах попередньої вправи доведіть, що коефіцієнти Фур'є функції $f*g$ на відрізку $[0, 2\pi]$ дорівнюють добуткам відповідних коефіцієнтів Фур'є функцій f і g.

8. Доведіть, що $\hat{f}_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Коментарі до вправ

4.2.2

Вправа 8. Інтегровна за Ріманом функція задовольняє умову (2) теореми 1 п.4.2.2, причому, за означенням інтеграла Рімана, за розбиття можна взяти будь-яке розбиття на скінченне число досить малих відрізків.

4.3.1

Вправа 5. За нерівністю Чебишова (п. 4.3.1), всі множини $|f|_{>1/n} = \{t \in A : |f(t)| > \frac{1}{n}\}$ мають міру нуль. Отже, їх об'єднання — множина тих точок, де $f(t) \neq 0$, має міру нуль.

4.6.3

Вправи 3–5. Див. розділ 14.2.

Вправа 8. Див. наслідок п. 10.4.3.