Розділ 3. Вимірні функції

У теорії міри й інтеграла вивчаються, насамперед, дійснозначні функції. Щоб уникнути непотрібних повторів, домовимось, якщо не обумовлено інше, термін «функція» використовувати для функцій, які набувають дійсних значень. Якщо ми говоримо «функція f на Ω», маємо на увазі функцію f, що діє з Ω в $\mathbb{R}$. Для тих функцій, область значень яких не лежить в $\mathbb{R}$, використовуватимемо термін «відображення».

Операції над функціями розумітимемо в поточковому сенсі. Скажімо, $f_1 + f_2$ — це функція, задана на Ω рівністю $(f_1 + f_2)(t) = f_1(t)+f_2(t)$, функція $\max\{f, g\}$ означається як $\max\{f, g\}(t) = \max\{f(t), g(t)\}$ і т. д. Границю послідовності функцій, суму ряду також розуміємо як поточкову.

3.1. Клас вимірних функцій і операції на ньому

У цьому підрозділі (Ω, Σ) — множина і задана на ній σ-алгебра. Всі функції, якщо не обумовлене протилежне, вважаються визначеними на Ω; елементи σ-алгебри Σ називаються вимірними підмножинами.

3.1.1. Критерій вимірності

Означення 1. Нехай (Ω_1, Σ_1) і (Ω_2, Σ_2) — множини і задані на них σ-алгебри підмножин. Відображення $f\colon \Omega_1 \to \Omega_2$ називається *вимірним*, якщо $f^{-1}(A) \in \Sigma_1$ для будь-якого $A \in \Sigma_2$.

Як бачимо з означення, вимірні відображення виконують таку саму роль в теорії міри, як неперервні — в теорії топологічних просторів. Частковий випадок вимірного відображення — це вимірна функція.

Наведений учбовий текст є витягом з підручнику
Кадець В.М. Курс функціонального аналізу та теорії міри. – Львів: Видавець І.Е. Чижиков, 2012. – 590 с. – (Серія “Університетська бібліотека”) ISBN 978-966-2645-03-3
Усі посилання на теореми, вправи, означення, такі що не увійшли до цього тексту – це посилання на підручник.

Означення 2. Функція f на Ω називається *вимірною* (детальніше: *вимірною по відношенню до σ-алгебри* Σ), якщо для будь-якої борелевої підмножини A в $\mathbb{R}$ множина $f^{-1}(A)$ вимірна.

Теорема 1. *Нехай (Ω_1, Σ_1) і (Ω_2, Σ_2) — множини із заданими на них σ-алгебрами підмножин, Λ — сім'я підмножин в Ω_2, яка породжує σ-алгебру Σ_2. Для того, щоб відображення $f\colon \Omega_1 \to \Omega_2$ було вимірним, необхідно і достатньо, щоб для будь-якої множини $A \in \Lambda$ її повний прообраз $f^{-1}(A)$ належав до σ-алгебри Σ_1.*

Доведення. Якщо відображення f вимірне, то прообраз будь-якої $A \in \Sigma_2$ лежить в Σ_1. Зокрема, в Σ_1 лежать прообрази всіх $A \in \Lambda$.

Навпаки, нехай Σ_1 містить всі множини вигляду $f^{-1}(A)$ для $A \in \Lambda$. Потрібно довести, що прообрази всіх елементів системи Σ_2 лежать в Σ_1. Для цього означимо таку сім'ю Λ_1 підмножин множини Ω_2: множина A є елементом сім'ї Λ_1, якщо $f^{-1}(A) \in \Sigma_1$. Легко бачити, що Λ_1 утворює σ-алгебру множин і містить всі елементи сім'ї Λ. Оскільки Σ_2 — це найменша σ-алгебра множин, яка містить Λ, звідси випливає, що $\Sigma_2 \subset \Lambda_1$, що й потрібно було довести. □

Нехай $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ — деяка функція, $a \in \mathbb{R}$. Позначимо $f^{-1}((a, +\infty))$ через $f_{>a}$, тобто $f_{>a}$ — це множина тих $t \in \Omega$, де $f(t) > a$. Оскільки (див. п. 2.1.2) множини вигляду $(a, +\infty)$, $a \in \mathbb{R}$ в сукупності породжують σ-алгебру $\mathfrak{B}$ борелевих множин на осі, отримуємо такий зручний критерій вимірності:

Наслідок 1. *Функція $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ вимірна тоді і тільки тоді, коли всі множини $f_{>a}$, $a \in \mathbb{R}$, вимірні.*

Наслідок 2. *Нехай (Ω, Σ), (Ω_1, Σ_1) і (Ω_2, Σ_2) — множини із заданими на них σ-алгебрами підмножин. Наділимо, як звичайно, декартів добуток $\Omega_1 \times \Omega_2$ σ-алгеброю $\Sigma_1 \otimes \Sigma_2$ (див. п. 2.1.3). Тоді для будь-яких вимірних відображень $f_1\colon \Omega \to \Omega_2$ і $f_2\colon \Omega \to \Omega_2$ відображення $f\colon \Omega \to \Omega_1 \times \Omega_2$, яке діє за правилом $f(t) = (f_1(t), f_2(t))$, також вимірне.*

Доведення. За означенням, σ-алгебра $\Sigma_1 \otimes \Sigma_2$ породжена множинами вигляду $A_1 \times A_2$, де $A_1 \in \Sigma_1$, $A_2 \in \Sigma_2$. Маємо $f^{-1}(A_1 \times A_2) = f_1^{-1}(A_1) \cap f_2^{-1}(A_2) \in \Sigma$. □

Взявши за Ω топологічний простір, а за Σ — σ-алгебру $\mathfrak{B}$ борелевих множин на Ω, отримуємо частковий випадок вимірності — вимірність за Борелем:

Означення 3. Функція f на топологічному просторі Ω називається *вимірною за Борелем*, якщо прообраз $f^{-1}(A)$ будь-якої борелевої множини A дійсної осі знову є борелевою множиною.

Будь-яка неперервна функція є вимірною за Борелем. Справді, для неперервної функції f всі множини $f_{>a}$ відкриті, а відтак, належать до σ-алгебри $\mathfrak{B}$ борелевих множин, тобто виконується наведений вище критерій вимірності.

Для довільної множини $A \in \Sigma$ можна розглянути σ-алгебру Σ_A всіх вимірних підмножин множини A. Якщо обмеження функції f на підмножину A вимірне щодо σ-алгебри Σ_A, то функцію називають *вимірною на підмножині* A.

Вправи

1. Якщо функція f вимірна, то для будь-якого $a \in \mathbb{R}$ вимірні множини $f_{\neq a} = \{t \in \Omega : f(t) \neq a\}$, $f_{=a} = \{t \in \Omega : f(t) = a\}$, $f_{\leqslant a} = \{t \in \Omega : f(t) \leqslant a\}$, $f_{<a} = \{t \in \Omega : f(t) < a\}$ і $f_{\geqslant a} = \{t \in \Omega : f(t) \geqslant a\}$.

2. Нехай f — вимірна за Борелем функція на відрізку $[a, b]$. Тоді множина точок максимуму функції f — борелева множина.

3. Множина точок локального максимуму борелевої функції на осі — борелева множина.

4. Нехай (Ω_1, Σ_1) і (Ω_2, Σ_2) — множини із заданими на них σ-алгебрами підмножин, і $\Omega_1 \times \Omega_2$ наділена σ-алгеброю $\Sigma_1 \otimes \Sigma_2$. Доведіть вимірність координатних проекторів P_1 і P_2, які ставлять елементу $(t_1, t_2) \in \Omega_1 \times \Omega_2$ координати t_1 і t_2 відповідно.

5. Доведіть твердження, обернене до наслідку 2: якщо відображення $f : \Omega \to \Omega_1 \times \Omega_2$, $f(t) = (f_1(t), f_2(t))$ вимірне, то відображення f_1 і f_2 також вимірні.

6. Наведіть приклад розривної вимірної за Борелем функції на $\mathbb{R}$.

7. Будь-яка монотонна функція на осі вимірна за Борелем.

8. Нехай f — вимірна функція на Ω. Доведіть, що $|f|$, $\operatorname{sign} f$, f^+ і f^- — вимірні функції.

9. Якщо функція f вимірна, то λf вимірна для будь-якого $\lambda \in \mathbb{R}$.

10. Нехай f — вимірна функція на Ω. Тоді f вимірна на кожній підмножині $A \in \Sigma$.

11. Нехай Ω зображується у вигляді об'єднання своїх вимірних підмножин A і B; функція $f : \Omega \to \mathbb{R}$ вимірна як на A, так і на B. Тоді f вимірна на Ω.

12. Наведіть приклад бієктивного вимірного відображення $f : \Omega_1 \to \Omega_2$, обернене до якого невимірне.

13. Нехай $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — неперервна функція, A — вимірна за Лебегом множина в $\mathbb{R}$.

а) Чи повинна $g(A)$ бути борелевою множиною?

б) Вимірною за Лебегом?

в) Чи може $g^{-1}(A)$ бути невимірною за Лебегом?

14. Нехай $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — неперервна функція, A — відкрита множина в $\mathbb{R}$. Тоді $g(A)$ — борелева множина. Більше того, $g(A)$ — множина класу F_σ.

15. Нехай $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — неперервна функція, A — борелева множина в $\mathbb{R}$. Чи може $g(A)$ не бути борелевою множиною?

16. Дві вимірні функції f і g на Ω називаються *рівновимірними*, якщо $\mu(f_{>a}) = \mu(g_{>a})$ для будь-якого $a \in \mathbb{R}$. Доведіть, що якщо f і g рівновимірні, то $\mu(f^{-1}(A)) = \mu(g^{-1}(A))$ для будь-якої борелевої множини A дійсних чисел.

3.1.2. Елементарні властивості вимірних функцій

Теорема 1. *Нехай $(\Omega_1, \Sigma_1), (\Omega_2, \Sigma_2)$ і (Ω_3, Σ_3) — множини із заданими на них σ-алгебрами підмножин, відображення $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ і $g : \Omega_2 \to \Omega_3$ вимірні. Тоді композиція $g \circ f : \Omega_1 \to \Omega_3$ також є вимірним відображенням.*

Доведення. Нехай $A \in \Sigma_3$. Тоді $g^{-1}(A) \in \Sigma_2$, і, отже, $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A)) \in \Sigma_1$. $\square$

Наслідок.

1. *Нехай функція $f : \Omega \to \mathbb{R}$ вимірна, а $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ вимірна за Борелем. Тоді композиція $g \circ f$ цих функцій також вимірна.*

2. *Якщо $f : \Omega \to \mathbb{R}$ вимірна, а $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ неперервна, то $g \circ f$ вимірна.*

3. *Нехай функція $f_1, f_2 : \Omega \to \mathbb{R}$ вимірні, а функція двох змінних $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ неперервна. Тоді функція $f(t) = g(f_1(t), f_2(t))$ вимірна.*

Доведення. Доведення вимагає лише третій пункт. Розглянемо площину $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, наділену σ-алгеброю борелевих множин або, що те саме, добутком σ-алгебр борелевих множин на осі. Згідно з наслідком 2 з попереднього пункту, відображення $F\colon \Omega \to \mathbb{R}^2$, яке діє за правилом $F(t) = (f_1(t), f_2(t))$, вимірне. Залишається зауважити, що $f = g \circ F$ і застосувати останню теорему. □

Теорема 2. *Клас вимірних функцій на* (Ω, Σ) *має такі властивості: якщо функції* f *і* g *вимірні, то вимірними є функції* $f + g$, fg, $\max\{f, g\}$, *і* $\min\{f, g\}$. *Також вимірні функції* $|f|$, $\operatorname{sign} f$, $f^+ = \max\{f, 0\}$, $f^- = (-f)^+$ *і* λf *при будь-якому* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Якщо* f *ніде не перетворюється в нуль, то вимірною є функція* $1/f$.

Доведення. Функції двох змінних $g_1(x, y) = x + y$, $g_2(x, y) = xy$ неперервні, як і функції $\max\{x, y\}$ і $\min\{x, y\}$. Згідно п. 3 щойно доведеного наслідку, це забезпечує вимірність функцій $f + g$, fg, $\max\{f, g\}$ і $\min\{f, g\}$. Неперервність функцій $|t|$, t^+, t^- і λt в сукупності з п. 2 попереднього наслідку забезпечують вимірність $|f|$, f^+, f^- і λf. Вимірність функції $\operatorname{sign} f$ випливає з п. 1 того ж наслідку і вимірності за Борелем функції $\operatorname{sign} t$. Нарешті, якщо f ніде не перетворюється в нуль, то $1/f$ зображується як композиція вимірної функції $f\colon \Omega \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$ (де $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ наділена σ-алгеброю борелевих множин) і неперервної, а отже, і вимірної за Борелем функції $1/t\colon \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$. □

Теорема 3. *Нехай послідовність* (f_n) *вимірних функцій збігається поточково до функції* f, *тобто* $\forall t \in \Omega\ f_n(t) \to f(t)$ $(n \to \infty)$. *Тоді* f — *вимірна функція.*

Доведення. Зафіксуємо число $a \in \mathbb{R}$. Значення функції f в точці $t \in \Omega$ буде більшим за a тоді і тільки тоді, коли існують таке раціональне число $r \in \mathbb{Q}$ і такий номер $n \in \mathbb{N}$, що для будь-якого $m > n$ правильна нерівність $f_m(t) > a + r$. Перекладаючи це твердження на мову теорії множин, одержуємо, що

$$f_{>a} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n+1}^{\infty} (f_m)_{>a+r} \in \Sigma. \qquad \square$$

Застосувавши останню теорему до послідовності частинних сум ряду, отримуємо такий наслідок.

Наслідок. *Якщо ряд з вимірних функцій збігається поточково, то його сума — вимірна функція.*

Вправи

1. Доведіть напряму, що якщо функції f і g вимірні, то при будь-якому $a \in \mathbb{R}$ множина $(f + g)_{>a}$ належить до Σ. За критерієм із попереднього параграфа, це забезпечить інше доведення вимірності суми двох вимірних функцій.

2. Запишіть вирази для множин $(\max\{f, g\})_{>a}$ і $(\min\{f, g\})_{>a}$ через аналогічні множини для функцій f і g.

3. Якщо функції f і g вимірні, то вимірні множини тих $t \in \Omega$, де $f = g$, $f \neq g$, $f > g$ і $f < g$.

4. Нехай (f_n) — поточково обмежена послідовність вимірних функцій. Тоді вимірні також функції $f = \sup_n f_n$ і $g = \overline{\lim}_{n \to \infty} f_n$.

5. Нехай A — множина всіх точок диференційовності неперервної функції f на осі (див. вправу 13 п. 2.1.2). Тоді похідна f' вимірна за Борелем на A.

6. Ототожнимо поле комплексних чисел у стандартний спосіб із площиною $\mathbb{R}^2$ і наділимо $\mathbb{C}$ σ-алгеброю $\mathfrak{B}^2$ борелевих підмножин площини. Вимірне відображення $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ називатимемо *вимірною комплекснозначною функцією.* Доведіть, що відображення

$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ вимірне тоді і тільки тоді, коли є вимірними дійснозначні функції $\mathrm{Re} f$ і $\mathrm{Im} f$.

7. Доведіть такі властивості комплекснозначних вимірних функцій:

(1) якщо функції f і g вимірні, то функція $f+g$ також вимірна;

(2) якщо f вимірна, то λf вимірна для будь-якого $\lambda \in \mathbb{C}$;

(3) якщо функції f і g вимірні, то і їхній добуток fg вимірний;

(4) якщо функція f вимірна, то $|f|$ — це вимірна дійснозначна функція.

3.1.3. Характеристична функція множини

Нехай A — підмножина виділеної множини Ω. *Характеристичною функцією* множини A називається функція $\mathbb{1}_A$ на Ω, яка дорівнює 1 на A і нулю зовні множини A. Інші прийняті в літературі позначення для характеристичної функції множини A — це χ_A і I_A. Останнє позначення найчастіше використовується в теорії ймовірностей, де характеристична функція множини називається індикатором множини, а термін «характеристична функція» використовується для зовсім іншого об'єкта. Звичайно, було б доцільно в позначенні для характеристичної функції якось враховувати не тільки множину A, але й Ω. Скажімо, одна й та сама множина A дійсних чисел в одній ситуації може розглядатись як підмножина відрізка, а в іншій — осі. У першому випадку $\mathbb{1}_A$ означена на відрізку, в другому — на осі, а символ для позначення використовується той самий. Ця невеличка неузгодженість зазвичай не викликає незручностей: тут, як і в багатьох інших випадках, функцію, визначену на підмножині, за замовчуванням доозначають на ширшу множину нулем.

Ми будемо користуватись наведеними у вправах 1–5 властивостями. Тому рекомендуємо читачеві звернути увагу на ці вправи.

Вправи

1. Нехай (Ω, Σ) — множина і задана на ній σ-алгебра, $A \subset \Omega$. Функція $\mathbb{1}_A$ буде вимірною тоді і тільки тоді, коли вимірна множина A.

2. $\mathbb{1}_{A\cup B} = \max\{\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B\}$.

3. $\mathbb{1}_{A\cap B} = \min\{\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B\} = \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B$.

4. Якщо множини A і B не перетинаються, то $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B$.

5. Нехай $A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Тоді $\mathbb{1}_A = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_n}$.

6. Нехай (A_n) — деяка послідовність множин. Тоді $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \mathbb{1}_{A_n}$ — це характеристична функція деякої множини A, яка називається *верхньою границею послідовності множин* A_n. Знайдіть вираз множини A через A_n за допомогою звичайних операцій об'єднання і перетину множин.

7. Розглянемо множину $2^{\mathbb{N}}$ всіх підмножин натурального ряду в топології, описаній у вправі 7 п. 1.4.4. Перевірте, що послідовність множин збігається в цій топології до деякої множини тоді і тільки тоді, коли характеристичні функції поточково збігаються до відповідної характеристичної функції.

3.1.4. Прості функції. Лебегова апроксимація вимірної функції простими. Вимірність на поповненні простору з мірою

Нехай (Ω, Σ) — множина і задана на ній σ-алгебра. Функція f на Ω називається *простою функцією*, якщо вона зображується у вигляді $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathbb{1}_{A_n}$, де $A_n \in \Sigma$ — диз'юнктна послідовність множин, а a_n — числа. З огляду на диз'юнктність множин

A_n ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathbb{1}_{A_n}$ не просто збігається поточково, а більше того, для будь-якого $t \in \Omega$ всі доданки вказаного ряду дорівнюють нулю, за винятком, можливо, одного (з тим номером n, для якого $t \in A_n$). На кожній з множин A_n функція f дорівнює сталій a_n, і $f(t) = 0$ за межами об'єднання всіх A_n. Прості функції ще називають *зліченнозначними функціями*, або, більш детально, *зліченнозначними вимірними функціями*. Обґрунтуванням цього терміну є таке твердження.

Теорема 1. *Функція f є простою функцією тоді і тільки тоді, коли f вимірна і множина всіх її значень не більш ніж зліченна.*

Доведення. Вимірність простої функції $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathbb{1}_{A_n}$ можна перевірити безпосередньо (прообразом будь-якої множини є скінченне або зліченне об'єднання деяких з A_n), а можна зіслатись на вимірність суми ряду вимірних функцій. Далі, $f(\Omega) \subset \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \cup \{0\}$, звідки випливає не більш ніж зліченність множини всіх значень функції. Навпаки, нехай f вимірна і множина M всіх її значень не більш ніж зліченна. Тоді для будь-якого $t \in M$ множина $f^{-1}(t)$ вимірна і $f = \sum\limits_{t \in M} t \mathbb{1}_{f^{-1}(t)}$. □

Якщо множина значень простої функції скінченна, функція називається *скінченнозначною функцією*.

Теорема 2. *Класи скінченнозначних і зліченнозначних функцій стійкі щодо операцій суми, добутку, взяття максимуму і мінімуму двох функцій.*

Доведення. Те, що ці операції зберігають вимірність, нам вже відомо. Нехай тепер f і g — дві функції на Ω, M і N — їх множини значень. Якщо M і N скінченні, то множини $M + N = \{t + r : t \in M, r \in N\}$ і $M \cdot N = \{t \cdot r : t \in M, r \in N\}$ скінченні, якщо зліченні, то — зліченні. Твердження теореми випливає з того, що образи функцій $f + g$, fg, $\max\{f, g\}$ і $\min\{f, g\}$ лежать в $M + N$, $M \cdot N$, $M \cup N$ і $M \cup N$ відповідно. □

Вимірні функції можуть бути влаштовані досить складно. Тому для полегшення досліджень їх структури використовують наближення вимірної функції простими.

Теорема 3. *Нехай f — вимірна функція на Ω. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує проста функція $f_\varepsilon \leqslant f$, яка у всіх точках відрізняється від f не більше ніж на ε. При цьому якщо $f \geqslant 0$, то f_ε також можна вибрати невід'ємною, а якщо f обмежена, то за f_ε можна вибрати скінченнозначну функцію.*

Доведення. Для будь-якого цілого n означимо числа $t_n = n\varepsilon$ і відрізки $\Delta_n = [t_n, t_{n+1})$. Через A_n позначимо $f^{-1}(\Delta_n)$. Деякі з A_n можуть бути порожніми. Зокрема, якщо $f \geqslant 0$, то порожніми будуть всі A_n з номерами, меншими за нуль. Якщо ж f обмежена за модулем деякою сталою C, то всі A_n з $|n| > C/\varepsilon + 1$ будуть порожніми. Множини A_n попарно не перетинаються, в об'єднанні дають всю множину Ω, і на A_n значення функції f задовольняють нерівності $t_n \leqslant f(t) < t_{n+1}$. Функцію f_ε означимо так, щоб на A_n вона дорівнювала відповідному t_n: $f_\varepsilon = \sum_{n=1}^{\infty} t_n \mathbb{1}_{A_n}$.

Така функція буде задовольняти всі умови теореми. Так, на кожному з A_n правильна оцінка

$$t_n = f_\varepsilon(t) \leqslant f(t) < t_{n+1},$$

тобто $f(t) - \varepsilon < f_\varepsilon(t) \leqslant f(t)$ в кожній точці $t \in \Omega$. Якщо $f \geqslant 0$, то функція f_ε не прийматиме від'ємних значень t_n: множини A_n, які відповідають від'ємним t_n, будуть порожніми. Якщо ж f обмежена, то порожніми будуть всі A_n, за винятком скінченного числа, і f_ε буде скінченнозначною. □

Наслідок. *Для будь-якої вимірної функції A існує неспадна послідовність $f_1 \leqslant f_2 \leqslant \ldots$ простих функцій, рівномірно збіжна до f. При цьому якщо $t \in \Omega$ невід'ємна (обмежена), то f_n можна вибрати невід'ємними (скінченнозначними).*

Доведення. Скористаємось попередньою теоремою і виберемо просту функцію f_1 так, щоб вона підпорядковувалась умові $0 \leqslant f - f_1 \leqslant 1$. Функція $f - f_1$ — вимірна невід'ємна функція, і, за попередньою теоремою, існує невід'ємна проста функція g_1, яка задовольняє нерівність $0 \leqslant f - f_1 - g_1 \leqslant 1/2$.

Покладемо $f_2 = f_1 + g_1$. Маємо $f_1 \leqslant f_2$ і $0 \leqslant f - f_2 \leqslant 1/2$. Функція $f - f_2$ знову — вимірна невід'ємна функція, і знову її можна наблизити деякою простою функцією g_2: $0 \leqslant f - f_2 - g_2 \leqslant 1/3$. Функцію f_3 означимо як $f_2 + g_2$. Продовживши цей процес, отримаємо зростаючу послідовність простих функцій з умовою $0 \leqslant f - f_n \leqslant 1/n$, яка забезпечує рівномірну збіжність. Задовольнити додаткові вимоги невід'ємності чи скінченнозначності, вказані у формулюванні наслідку, також нескладно. $\square$

Доведення наступної теореми спирається на можливість апроксимації вимірної функції простими.

Теорема 4. *Нехай (Ω, Σ, μ) — простір з мірою, (Ω, Σ', μ) — його поповнення. Тоді для будь-якої функції f на Ω, вимірної щодо σ-алгебри Σ', існує Ω-вимірна функція g, яка збігається з f майже скрізь.*

Доведення. Спочатку доведемо це твердження для простої функції. Нехай $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathbb{1}_{A_n}$, $A_n \in \Sigma'$ і диз'юнктні. У кожному з A_n виберемо по підмножині $B_n \in \Sigma$, з $\mu(A_n \backslash B_n) = 0$ (див. вправа 3 п. 2.1.5). Тоді $g = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathbb{1}_{B_n}$ — шукана функція. Тепер нехай f — довільна Σ'-вимірна функція, (f_n) — послідовність простих Σ'-вимірних функцій, поточково збіжна до f, g_n — Σ-вимірні функції, які майже скрізь збігаються з відповідними f_n. Нехай $A \subset \Omega$ — та нехтувана множина, зовні якої $f_n = g_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Згідно з означенням нехтуваної множини, існує Σ-вимірна множина B нульової міри, яка містить A.

Розглянемо множину повної міри $C = \Omega \backslash A$. Функції $g_n \cdot \mathbb{1}_C$ утворюють послідовність Σ-вимірних функцій, збіжну на C до f, які за межами множини C дорівнюють 0. Тобто $g_n \cdot \mathbb{1}_C$ прямують поточково до функції $g = f \cdot \mathbb{1}_C$, і, за теоремою 3 п. 3.1.2, ця гранична функція Σ-вимірна. Залишається зауважити, що $g = f$ майже скрізь, оскільки множина B, де ця рівність може не виконуватись, нехтувана. $\square$

Вправи

1. Функцію f_ε з формулювання теореми 3 можна вибрати так, щоб $f_\varepsilon(\Omega) \subset f(\Omega)$.

2. Нехай X — метричний простір, наділений σ-алгеброю борелевих множин, $f\colon \Omega \to X$ — вимірне відображення. Тоді такі умови еквівалентні:

— для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує зліченнозначне вимірне відображення $f_\varepsilon\colon \Omega \to X$ з $\rho(f(t), f_\varepsilon(t)) \leqslant \varepsilon$ у всіх $t \in \Omega$;

— множина $f(\Omega)$ сепарабельна.

3. В умовах попередньої вправи еквівалентні такі умови:

— для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує скінченнозначне вимірне відображення $f_\varepsilon\colon \Omega \to X$ з $\rho(f(t), f_\varepsilon(t)) \leqslant \varepsilon$ для всіх $t \in \Omega$;

— множина $f(\Omega)$ — передкомпакт.

4. Відображення f_ε у попередніх двох вправах можуть бути вибрані так, що $f_\varepsilon(\Omega) \subset f(\Omega)$.

5. Доведіть, що для будь-якої вимірної за Лебегом функції f на відрізку знайдеться рівновимірна з нею спадна функція $[0,1]$ (означення рівновимірності див. вправу 16 п. 3.1.1). Така функція $\tilde{f}$ називається спадною перестановкою функції f.

3.2. Основні види збіжності

У цьому розділі (Ω, Σ, μ) буде деяким фіксованим простором зі скінченною мірою, функції f, f_n і решта функцій, якщо не обумовлено інше, будуть за замовчуванням вважатись визначеними на Ω, вимірними і дійснозначними.

3.2.1. Збіжність майже скрізь

Послідовність функцій (f_n) називається *збіжною майже скрізь* до функції f (позначення: $f_n \overset{\text{м.с.}}{\to} f$), якщо множина тих $t \in \Omega$, де $f_n(t)$ не прямує до $f(t)$ при $n \to \infty$, нехтувана. Зазначимо найпростіші властивості збіжності майже скрізь, перевірку яких залишаємо читачеві як вправу.

A. Якщо $f_n \overset{\text{м.с.}}{\to} f$ і $f_n \overset{\text{м.с.}}{\to} g$, то $f \overset{\text{м.с.}}{=} g$.

B. Якщо $f_n \overset{\text{м.с.}}{\to} f$ і $f_n \overset{\text{м.с.}}{=} g_n$, то $g_n \overset{\text{м.с.}}{\to} f$.

C. Якщо $f_n \overset{\text{м.с.}}{\to} f$, $g_n \overset{\text{м.с.}}{\to} g$ і $f_n \overset{\text{м.с.}}{\leqslant} g_n$, то $f \overset{\text{м.с.}}{\leqslant} g$.

D. Якщо $G\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — неперервна функція, $f_n \overset{\text{м.с.}}{\to} f$, $g_n \overset{\text{м.с.}}{\to} g$, то $G(f_n, g_n) \overset{\text{м.с.}}{\to} G(f, g)$. Звідси випливають, зокрема, теореми про границю суми і добутку.

Збіжність майже скрізь відіграє важливу роль у теорії інтеграла Лебега. За відносно необтяжливих додаткових припущень (див. розділ 6) інтеграл граничної функції можна обчислювати як границю інтегралів. При цьому збіжність майже скрізь значно зручніша у багатьох відношеннях від звичайної поточкової збіжності. По-перше, це загальніший вид збіжності, тому таку збіжність легше перевіряти. Далі, тут, як і взагалі при роботі з властивостями, які виконуються майже скрізь, можна не звертати увагу на поведінку функції на нехтуваних множинах. Скажімо, для кусково-неперервної або для монотонної функції можна взагалі не означати значень в точках розриву — на збіжності майже скрізь це ніяк не позначиться! Проте у збіжності майже скрізь є один істотний недолік: ця збіжність не породжується жодною метрикою чи топологією, і тому немає природного способу означити «швидкість збіжності». Наведемо приклад задачі, де наявний цей недолік.

Означення. Нехай X, Y — дві сім'ї вимірних функцій на Ω. Будемо говорити, що X *м.с.-щільна* в Y (щільна в сенсі збіжності майже скрізь), якщо для будь-якого $f \in Y$ існує така послідовність (f_n) елементів сім'ї X, що $f_n \overset{\text{м.с.}}{\to} f$.

Теорема. *Нехай X м.с.-щільна в Y, Y м.с.-щільна в Z, тоді X м.с.-щільна в Z.*

Ця природна властивість важлива не тільки з точки зору внутрішньої стрункості теорії збіжності майже скрізь, але й з точки зору застосувань. Так, на ній базується вивід м.с.-щільності сім'ї неперервних функцій на відрізку в множині всіх вимірних за Лебегом функцій на тому ж відрізку. Хоча ці результати і можна довести, спираючись лише на означення збіжності майже скрізь, придумати такі доведення зовсім не просто (пропонуємо читачеві спробувати свої сили). Адже якщо б збіжність задавалась деякою топологією, задача була б тривіальною (див. вправу 4 п. 1.2.1). Проте є кращий вихід. Виявляється, існує топологія на просторі вимірних функцій, для якої поняття щільності підмножини еквівалентне м.с.-щільності, хоча збіжність (так звана збіжність за мірою) і не еквівалентна збіжності майже скрізь. До вивчення цієї топології та відповідної збіжності ми переходимо зараз.

3.2.2. Збіжність за мірою. Приклади

Нехай a і ε — строго додатні числа, f — вимірна функція. Через $U_{a,\varepsilon}(f)$ позначимо сім'ю тих вимірних функцій g, для яких $\mu\left(|g-f|_{>a}\right)<\varepsilon$. (Тут, як і раніше, символ $h_{>a}$ означає множину всіх $t\in\Omega$, для яких $h(t)>a$). *Топологією збіжності за мірою* на просторі всіх вимірних функцій на Ω називається топологія, в якої базу околів кожної функції f утворюють множини $U_{a,\varepsilon}(f)$, $a,\varepsilon>0$. Відповідно, послідовність функцій (f_n) називається *збіжною за мірою* до функції f (позначення: $f_n\xrightarrow{\mu}f$), якщо для будь-якого $a>0$

$$\mu\left(|f_n-f|_{>a}\right)\to 0,\quad n\to+\infty.$$

Теорема 1. *Збіжність за мірою має такі властивості:*

A. $f_n\xrightarrow{\mu}f$ *тоді і тільки тоді, коли* $f_n-f\xrightarrow{\mu}0$.

B. *Якщо* $f_n\xrightarrow{\mu}f$ *і* $f_n\xrightarrow{\mu}g$, *то* $f\overset{\text{м.с.}}{=}g$.

C. *Якщо* $f_n\xrightarrow{\mu}f$ *і* $f_n\overset{\text{м.с.}}{=}g_n$, *то* $g_n\xrightarrow{\mu}f$.

Доведення. Перша і третя властивості очевидні. Доведемо другу властивість. Нехай A — це множина тих $t\in\Omega$, де $f(t)\neq g(t)$, а A_n — множина тих $t\in\Omega$, де $|f(t)-g(t)|>\frac{1}{n}$. Оскільки $A=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n$, нам достатньо довести, що $\mu(A_n)=0$ при всіх n. Для будь-якого $k\in\mathbb{N}$ в кожній точці $t\in A_n$ чи $|f(t)-f_k(t)|>\frac{1}{2n}$, чи $|g(t)-f_k(t)|>\frac{1}{2n}$. Отже, якщо множину точок, де $|f(t)-f_k(t)|>\frac{1}{2n}$ позначити через $B_{n,k}$, а точок, де $|g(t)-f_k(t)|>\frac{1}{2n}$ — через $C_{n,k}$, то $A_n\subset B_{n,k}\cup C_{n,k}$. За означенням збіжності за мірою, при фіксованому n і $k\to\infty$ міри множин $B_{n,k}$ і $C_{n,k}$ прямують до 0. Отже, $\mu(A_n)$ може бути лише нульовою. □

Теорема 2. *Нехай X — деяка сім'я вимірних функцій на Ω. Тоді кожна точка замикання множини X в топології збіжності за мірою буде границею деякої збіжної за мірою послідовності елементів множини X.*

Доведення. Ми будемо користуватись ідеєю вправи 6 п. 1.2.1. Нехай f — точка замикання множини X. Зазначимо, що окіл $U_{a,\varepsilon}(f)$ збільшується як із зростанням a, так і зі зростанням ε. Розглянемо окіл $U_n=U_{1/n,1/n}(f)$. Зрозуміло, що $U_1\supset U_2\supset\ldots$ і околи U_n утворюють в сукупності базу околів для f (якщо $U_{a,\varepsilon}(f)$ — довільний окіл функції f, то $U_{a,\varepsilon}(f)\supset U_n$ при $n>\max\{1/a,1/\varepsilon\}$). За означенням замикання, всі множини $X\cap U_n$ непорожні. Виокремимо в кожній з $X\cap U_n$ по елементу f_n. Послідовність (f_n) і є потрібною послідовністю елементів множини X, збіжною до f за мірою. □

Приклад (ковзаючий пагорб). Виділимо на відрізку $[0,1]$ підвідрізки $\mathrm{I}_{n,k}=[\frac{k-1}{2^n},\frac{k}{2^n}]$, $n=0,\,1,\,2,\,\ldots$, $k=1,\,\ldots\,,2^n$. При фіксованому n відрізки $\mathrm{I}_{n,k}$, $k=1,\ldots,2^n$, покривають увесь відрізок $[0,1]$. Розглянемо таку послідовність функцій: $f_1=\mathbb{1}_{[0,1]}$, $f_2=\mathbb{1}_{[0,1/2]}$, $f_3=\mathbb{1}_{[1/2,1]}$, ... , $f_{2^n+k}=\mathbb{1}_{\mathrm{I}_{n,k}}$, ... Для будь-якого $a>0$ множина точок відрізка, де $|f_{2^n+k}|$ більше за a, або порожня (якщо $a \geqslant 1$), або збігається з $\mathrm{I}_{n,k}$. Оскільки довжини відрізків $\mathrm{I}_{n,k}$ прямують до нуля при $k \to \infty$, послідовність (f_n) прямує до нуля за мірою (в сенсі міри Лебега). Водночас послідовність (f_n) не прямує до нуля **в жодній точці**, оскільки кожна точка відрізка $[0,1]$ належить до нескінченної кількості відрізків $\mathrm{I}_{n,k}$. Цей приклад, з одного боку, дозволяє відчути сенс збіжності за мірою, а з іншого –– доводить, що збіжність за мірою не еквівалентна збіжності майже скрізь.

Вправи

1. У наведеному вище прикладі знайдіть підпослідовність послідовності (f_n), що прямує до 0 в кожній точці.

2. Чому множини $|f_n - f|_{>a}$ в означенні збіжності за мірою вимірні?

3. Перевірте коректність означення збіжності за мірою, тобто що збіжність в топології збіжності за мірою справді еквівалентна виписаній в означенні умові.

4. Якщо $f_n \xrightarrow{\mu} f$, $g_n \xrightarrow{\mu} g$ і $f_n \overset{\text{м.с.}}{\leqslant} g_n$, то $f \overset{\text{м.с.}}{\leqslant} g$.

5. На відрізку $[0,1]$ розглянемо послідовність функцій $g_n(x) = x^n$. Доведіть, що $g_n \xrightarrow{\mu} 0$ (в сенсі міри Лебега). Чи буде ця послідовність поточково збігатись до нуля? Майже скрізь?

6. Відновіть деталі доведення теореми 2.

7. $\mu\left(|f-h|_{>a}\right) \leqslant \mu\left(|f-g|_{>\frac{a}{2}}\right) + \mu\left(|g-h|_{>\frac{a}{2}}\right)$ для будь-яких вимірних функцій f, g, h і будь-якого $a > 0$.

8. Нехай $f_n \xrightarrow{\mu} f$, $g_n \xrightarrow{\mu} g$. Тоді $f_n + g_n \xrightarrow{\mu} f + g$.

9. За означенням, послідовність f_n буде послідовністю Коші в сенсі збіжності за мірою, якщо $\mu\left(|f_n - f_m|_{>a}\right)$ прямує до нуля при $n, m \to \infty$. Доведіть, що кожна збіжна за мірою послідовність буде послідовністю Коші у вказаному сенсі.

10. Послідовність функцій $\sin(\pi n x)$ на $[0,1]$ не прямує за мірою до жодної функції і, більше того, не містить збіжних за мірою підпослідовностей.

11. Нехай f_n — зростаюча послідовність функцій, $f_n \xrightarrow{\mu} f$. Тоді $f_n \xrightarrow{\text{м.с.}} f$.

12. Вираз

$$\rho(f,g) = \inf_{a \in (0,+\infty)} \{a + \mu(|f-g|_{>a})\} \text{ —}$$

це *псевдометрика, яка задає топологію збіжності за мірою.*

13. Інший приклад: псевдометрика $d(f,g) = \inf\{a > 0 : \mu(|f-g|_{>a}) \leqslant a\}$ також задає топологію збіжності за мірою.

14. Нехай (Ω, Σ, μ) — простір зі скінченною мірою і міра μ суто атомарна. Тоді для функцій на Ω збіжність за мірою збігається зі збіжністю майже скрізь. Якщо ж μ не суто атомарна, то ці два види збіжності не еквівалентні.

3.2.3. Теореми про зв'язок збіжності за мірою зі збіжністю майже скрізь

Означення 1. *Верхньою границею послідовності множин* (A_n) називається множина $\overline{\lim} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$.

Природність застосування тут терміна «верхня границя» стає зрозумілою після розв'язання вправи 6 п. 3.1.3.

Лема 1 (лема про верхню границю послідовності множин). *Нехай* $A_n \in \Sigma$, $A_\infty = \overline{\lim} A_n$. *Тоді*

(i) $\mu(A_\infty) \geqslant \overline{\lim}\, \mu(A_n)$. *Зокрема, якщо* $\mu(A_\infty) = 0$, *то* $\mu(A_n) \to 0$ $(n \to \infty)$.

(ii) Якщо $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$*, то* $\mu(A_\infty) = 0$*.*

Доведення. Розглянемо $B_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$. Тоді $A_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$. Оскільки B_n утворюють спадний ланцюжок множин, то

$$\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \mu(A_\infty). \tag{1}$$

Для доведення твердження (i) залишається зауважити, що $B_n \supset A_n$, відповідно, і $\mu(B_n) \geqslant \mu(A_n)$. Далі, якщо $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$, то

$$\mu(B_n) \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \mu(A_k) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

що разом зі співвідношенням (1) дає твердження (ii). □

Теорема 1 (Лебег). *Із збіжності майже скрізь випливає збіжність за мірою. Детальніше: якщо* f, f_n *— вимірні функції на* Ω *і* $f_n \xrightarrow{\text{м.с.}} f$*, то* $f_n \xrightarrow{\mu} f$*.*

Доведення. За умовою, множина D всіх точок, де f_n не прямує до f, нехтувана. Зафіксуємо $a > 0$. Розглянемо множини $A_n = |f_n - f|_{>a}$ і $A_\infty = \overline{\lim} A_n$. За означенням верхньої границі, $A_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$, тобто A_∞ — це множина таких точок $t \in \Omega$, що для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ існує $k > n$, при якому $|f_n(t) - f(t)| > a$. Отже, $A_\infty \subset D$ і $\mu(A_\infty) = 0$. За попередньою лемою, $\mu(A_n) \to 0$ $(n \to \infty)$, тобто $\mu\left(|f_n - f|_{>a}\right) \to 0$ $(n \to \infty)$. □

Лема 2. *Нехай* f_n *— вимірні функції,* a_n *і* ε_n *— додатні числа,* $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$*,* $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \infty$*. Далі, нехай* f_n *задовольняють умову* $\mu\left(|f_n|_{>a_n}\right) < \varepsilon_n$*. Тоді* $f_n \xrightarrow{\text{м.с.}} 0$*.*

Доведення. Введемо позначення: D — це множина всіх точок, де f_n не прямує до 0, $A_n = |f_n|_{>a_n}$, $B_n = \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$,

$$A_\infty = \overline{\lim} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n.$$

Нехай $t \in \Omega$ — довільна точка, де $f_n(t)$ не прямує до нуля. Для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ існує $k \geqslant n$, при якому $f_k(t) > a_k$, тобто $t \in B_n$. Отже, $D \subset B_n$ при всіх n і $D \subset A_\infty$. Водночас, за умовою,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \infty.$$

Застосуємо частину (ii) леми про верхню границю послідовності множин: $\mu(D) \leqslant \mu(A_\infty) = 0$. □

Теорема 2 (Ф. Ріс). *Будь-яка послідовність вимірних функцій, збіжна за мірою, містить збіжну майже скрізь підпослідовність.*

Доведення. Нехай $f_n \xrightarrow{\mu} f$. Зафіксуємо $a_n, \varepsilon_n > 0$, які задовольняють умову попередньої леми, і виберемо зростаючу послідовність індексів m_n так, щоб $\mu\left(|f_{m_n} - f|_{>a_n}\right) < \varepsilon_n$. За лемою 2, $f_{m_n} - f \xrightarrow{\text{м.с.}} 0$ і $f_{m_n} \xrightarrow{\text{м.с.}} f$. □

Теорема 3 (критерій збіжності за мірою). *Послідовність вимірних функцій* (f_n) *збігається за мірою до функції* f *тоді і тільки тоді, коли будь-яка підпослідовність послідовності* (f_n)*, у свою чергу, містить підпослідовність, збіжну до* f *майже скрізь.*

Доведення. Нехай $f_n \xrightarrow{\mu} f$. Тоді кожна підпослідовність послідовності (f_n) також збігається за мірою і, згідно з попередньою теоремою, містить підпослідовність, збіжну до f майже скрізь. Навпаки, нехай f_n не збігається за мірою до f. Тоді існують такі $a, \varepsilon > 0$ і така підпослідовність (g_n) послідовності (f_n), що жодна з функцій g_n не лежить в околі $U_{a,\varepsilon}(f)$. Тоді підпослідовність (g_n) не містить збіжних за мірою до f підпослідовностей, а отже, за теоремою 1, не містить і збіжних майже скрізь до f підпослідовностей. □

Наслідок 1. *Якщо $G\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — неперервна функція, $f_n \xrightarrow{\mu} f$, $g_n \xrightarrow{\mu} g$, то $G(f_n, g_n) \xrightarrow{\mu} G(f, g)$. Звідси випливає, зокрема, що $f_n + g_n \xrightarrow{\mu} f + g$; $f_n g_n \xrightarrow{\mu} fg$.*

Доведення. Потрібно скористатись попереднім критерієм і відповідною властивістю збіжності майже скрізь. □

Наслідок 2 (теорема п. 3.2.1). *Нехай X, Y і Z — множини вимірних функцій на Ω; X м.с.-щільна в Y, Y м.с.-щільна в Z, тоді X м.с.-щільна в Z.*

Доведення. Згідно з теоремою 1, X щільна в Y і Y щільна в Z в топології збіжності за мірою. Отже, (вправа 4 п. 1.2.1) X щільна в Z в топології збіжності за мірою. Тому, за теоремою 2 п. 3.2.2, X буде і *секвенційно щільною* в Z в сенсі збіжності за мірою, тобто для будь-якого $f \in Z$ існує така послідовність (f_n) елементів множини X, що $f_n \xrightarrow{\mu} f$. Залишається скористатись теоремою 2. □

Вправи

1. Розв'яжіть вправу 4 п. 3.2.2, спираючись на результати цього параграфа.
2. Нехай (f_n) — це послідовність Коші в сенсі збіжності за мірою (див. вправу 9 п. 3.2.2). Тоді вона містить підпослідовність, збіжну майже скрізь.
3. Якщо послідовність вимірних функцій — це послідовність Коші в розумінні збіжності за мірою, то вона має границю в тому ж сенсі.
4. Нехай в деякому просторі X вимірних функцій на деякому просторі з мірою збіжність майже скрізь збігається зі збіжністю в якійсь топології τ на X. Тоді в X збіжність майже скрізь збігається зі збіжністю за мірою.
5. Збіжність майже скрізь у просторі всіх вимірних функцій на відрізку не можна задати жодною топологією.
6. Підмножина всіх неперервних функцій м.с.-щільна в просторі всіх вимірних функцій на відрізку.
7. Нехай (A_n) — спадна послідовність множин. Тоді $\overline{\lim} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ і $\mu\left(\overline{\lim} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$.
8. Для зростаючого ланцюжка множин A_n також $\mu\left(\overline{\lim} A_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n)$, адже в цьому випадку $\overline{\lim} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.
9. Наведіть приклад, де $\mu\left(\overline{\lim} A_n\right) \neq \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \mu(A_n)$.

3.2.4. Теорема Єгорова

Функції $g_n(x) = x^n$ на відрізку $[0, 1]$ є типовим прикладом послідовності, збіжної в кожній точці, але не збіжної рівномірно. Водночас збіжність можна покращити, усунувши як завгодно малий окіл точки 1: на відрізку $[0, 1 - \varepsilon]$, що залишився, збіжність вже буде рівномірною. Аналогічна ситуація виникає в теорії степеневих рядів: ряд збігається до своєї суми рівномірно не у всьому крузі збіжності, але в будь-якому крузі меншого радіуса. Ці ефекти є частковими випадками загального результату.

Теорема Єгорова. *Нехай $f_n \to f$ майже скрізь на Ω. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує множина $A = A_\varepsilon \in \Sigma$ з $\mu(A) < \varepsilon$, на доповненні до якої послідовність (f_n) рівномірно збігається до f.*

Доведення. Зафіксуємо $a_n, \varepsilon_n > 0$, $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$, $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \varepsilon$. Розглянемо множини $A_{m,n} = |f_m - f|_{>a_n}$ і $B_{m,n} = \bigcup_{k=m}^{\infty} A_{k,n}$. При фіксованому n множини $B_{m,n}$ утворюють спадний за m ланцюжок множин, і $\mu\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} B_{m,n}\right) = 0$ (оскільки $\bigcap_{m=1}^{\infty} B_{m,n}$ міститься в нехтуваній множині — множині D всіх точок, де f_n не прямує до f). Отже, $\mu\left(B_{m,n}\right) \to 0$ $(m \to \infty)$. Для кожного n виберемо такий індекс m_n, що $\mu\left(B_{m_n,n}\right) < \varepsilon_n$. Доведемо, що $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_{m_n,n}$ є потрібною множиною. Справді,

$$\mu(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \varepsilon.$$

Далі, $\Omega \backslash A \subset \Omega \backslash B_{m_n,n}$, тобто для будь-якого $k > m_n$ множина $A_{k,n} = |f_k - f|_{>a_n}$ не містить точок множини $\Omega \backslash A$. Отже, $\sup\limits_{t \in \Omega \backslash A} |f_k(t) - f(t)| \leqslant a_n$ при $k > m_n$. Це і означає потрібну рівномірну збіжність на $\Omega \backslash A$. □

Вправи

1. Із вправи 6 попереднього пункту і теореми Єгорова виведіть таку **теорему Лузіна**: *для будь-якої вимірної за Лебегом функції f на відрізку $[a, b]$ і будь-якого $\varepsilon > 0$ існує така вимірна множина A з $\mu(A) < \varepsilon$, що обмеження функції f на $[a, b] \backslash A$ неперервне.*

2. У формулюванні теореми Лузіна множину A можна вибрати відкритою.

3. Чи можна у формулюванні теореми Єгорова умову $\mu(A) < \varepsilon$ замінити умовою $\mu(A) = 0$? Аналогічне запитання для теореми Лузіна.

4. Чи можна у формулюванні теореми Єгорова послідовність f_n, збіжну майже скрізь, замінити послідовністю, збіжною за мірою?

5. Де в доведенні теореми Єгорова використовувалась вимірність функцій, які беруть участь у формулюванні?

Коментарі до вправ

3.1.1

Вправа 2. Позначимо супремум значень функції f на $[a, b]$ через a. Тоді множина точок максимуму функції f збігається з $f_{=a}$.

Вправа 3. Випишемо всі інтервали з раціональними кінцями в послідовність (a_n, b_n), $n \in \mathbb{N}$, а множину точок «справжнього» максимуму функції f на (a_n, b_n) позначимо M_n. Шукана множина точок локального максимуму функції f збігається з $\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$.

Вправа 12. Взяти за (Ω_1, Σ_1) відрізок $[0, 1]$, наділений σ-алгеброю вимірних за Лебегом множин, за (Ω_2, Σ_2) — той самий відрізок з σ-алгеброю борелевих множин, а за f — тотожне відображення.

Вправа 13. а) Не повинно (навіть для функції $g(x) = x$).

б) Не повинно. Нехай g — це канторова драбина (п. 2.3.6), продовжена на $(-\infty, 0)$ нулем, а на $(1, +\infty)$ — одиницею. Нехай $B \subset [0, 1]$ — довільна невимірна за Лебегом множина. Не порушуючи загальності, можна вважати, що B складається тільки з ірраціональних чисел (інакше замінимо B на $B \backslash \mathbb{Q}$). За шукану A візьмемо $g^{-1}(B)$. A — підмножина канторової множини, отже, $\lambda(A) = 0$, тобто A вимірна за Лебегом. При цьому $f(A) = B$ — невимірна.

в) Може. Для побудови прикладу потрібно придумати неперервну строго монотонну функцію, яка переводить деяку множину додатної міри у множину міри 0.

Вправа 14. Треба зобразити A у вигляді об'єднання послідовності компактів, а образ компакту при неперервному відображенні — знову компакт.

Вправа 15. Може. Простого прикладу автор не знає. Множина, яка є образом борелевої при неперервному відображенні, називається аналітичною множиною або проективною множиною класу 1. Існування аналітичної множини, яка не є борелевою, — це частковий випадок теореми VI § 38 розд. 3 монографії [Kur, т. 1].

3.2.3

Вправа 6. Неперервними функціями можна наблизити характеристичні функції відрізків; лінійними комбінаціями характеристичних функцій відрізків — характеристичні функції відкритих множин; характеристичними функціями відкритих множин — характеристичні функції будь-яких вимірних за Лебегом множин, лінійними комбінаціями характеристичних функцій вимірних множин (тобто скінченнозначними функціями) — прості функції, а простими — будь-які вимірні. У значно загальнішій ситуації аналогічне твердження буде доведено в п. 8.3.3.

3.2.4

Вправа 1. У загальнішій ситуації теорему Лузіна буде доведено в п. 8.3.3.