Розділ 2. Теорія міри

2.1. Системи множин і міри

2.1.1. Алгебри множин

Нехай $\mathcal{A}$ — деяка сім'я підмножин фіксованої множини Ω. Сім'я $\mathcal{A}$ називається *алгеброю множин* на Ω, якщо вона задовольняє такі аксіоми:

1. $\Omega \in \mathcal{A}$.
2. Якщо $A \in \mathcal{A}$, то й $\Omega \backslash A \in \mathcal{A}$.
3. Якщо $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$, то й $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{A}$.

Читач легко переконається, що якщо $\mathcal{A}$ — це алгебра множин, то:

— $\varnothing \in \mathcal{A}$;

— перетин будь-якого скінченного числа множин з $\mathcal{A}$ знову лежить в $\mathcal{A}$;

— об'єднання двох множин з $\mathcal{A}$ знову лежить в $\mathcal{A}$ (тут допоможе той факт, що доповнення до об'єднання — це перетин доповнень);

— об'єднання будь-якого скінченного числа множин з $\mathcal{A}$ знову лежить в $\mathcal{A}$;

— різниця і симетрична різниця множин з $\mathcal{A}$ знову належить до $\mathcal{A}$.

Введемо одне корисне позначення. Нехай множини $A_1, A_2, \ldots$ диз'юнктні (тобто попарно не перетинаються). Тоді їх об'єднання позначатимемо значком *диз'юнктного об'єднання*: $\coprod_{k=1}^{\infty} A_k$. При цьому, якщо ми вживаємо де-небудь знак $\coprod$ диз'юнктного об'єднання, це означає, що ми вимагаємо диз'юнктність множин, які входять в об'єднання. Наприклад, запис $C = A \coprod B$ потрібно розуміти так: A і B диз'юнктні й $A \cup B = C$.

Твердження 1. *Для будь-якої послідовності $A_1, A_2, \ldots$ елементів алгебри $\mathcal{A}$ існують такі $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \ldots \in \mathcal{A}$, що $\tilde{A}_k \subset A_k$ при всіх k, і $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k = \coprod\limits_{k=1}^{\infty} \tilde{A}_k$.*

Наведений учбовий текст є витягом з підручнику

Кадець В.М. Курс функціонального аналізу та теорії міри. – Львів: Видавець І.Е. Чижиков, 2012. – 590 с. – (Серія "Університетська бібліотека") ISBN 978-966-2645-03-3

Усі посилання на теореми, вправи, означення, такі що не увійшли до цього тексту – це посилання на підручник.

Доведення. Шукані попарно неперетинні множини $\tilde{A}_k$ можна будувати різними способами. Найпростіший — видалити з кожної множини точки, які належать до попередніх множин, тобто прийняти $\tilde{A}_1 = A_1$ і $\tilde{A}_k = A_k \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{k-1} A_j\right)$ при $k > 1$. □

Зрозуміло, що останнє твердження справджується як для зліченних, так і для скінченних послідовностей множин.

Найпростішим прикладом алгебри є сім'я 2^Ω всіх підмножин множини Ω. Інші, менш тривіальні приклади наведено у вправах.

Теорема 1. *Нехай Φ — деяка сім'я підмножин множини Ω. Тоді серед усіх алгебр множин, які містять Φ як підсім'ю, існує найменша за включенням.*

Доведення. Означимо $\mathcal{A}$ як перетин всіх алгебр на Ω, які містять Φ. Іншими словами, множина A належить до $\mathcal{A}$ тоді і тільки тоді, коли A належить до всіх алгебр множин, що містять Φ як підсім'ю. Очевидно, будь-яка алгебра множин, яка містить Φ, містить і $\mathcal{A}$. Водночас для сім'ї множин $\mathcal{A}$ легко перевіряються аксіоми алгебри множин:

1. Ω належить до всіх алгебр множин, які містять Φ, отже, $\Omega \in \mathcal{A}$.

2. Якщо $A \in \mathcal{A}$, то A належить до всіх алгебр множин, які містять Φ. Отже, $\Omega \setminus A$ належить до всіх алгебр множин, що містять Φ, і $\Omega \setminus A \in \mathcal{A}$.

3. Якщо $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$, то обидві множини лежать у всіх алгебрах множин, які містять Φ. Отже, $A_1 \cap A_2$ належить до всіх алгебр множин, які містять Φ, і $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{A}$. □

Найменша алгебра $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\Phi)$, яка містить Φ, називається *алгеброю, породженою сім'єю* Φ. У цьому випадку говорять також, що Φ породжує алгебру $\mathcal{A}$. Конструктивний опис алгебри, породженої цією сім'єю, наведено у вправі 6.

Вправи

1. Які з аксіом алгебри множин не задовольняє сім'я всіх скінченних підмножин відрізка $[0,1]$? сім'я всіх нескінченних підмножин відрізка?

2. Опишіть найменшу алгебру множин на $[0,1]$, яка містить усі одноточкові підмножини.

3. Перевірте, що така сім'я множин є алгеброю на $[0,1]$: $\{\varnothing, [0, \frac{1}{2}],]\frac{1}{2}, 1], [0,1]\}$.

4. Підвідрізками відрізка $[0,1]$ називатимемо будь-які відкриті, замкнені або напіввідкриті проміжки, які лежить в $[0,1]$. Перевірте, що множини, складені зі скінченних об'єднань підвідрізків, утворюють алгебру на $[0,1]$. Чи буде ця алгебра породжуватись системою всіх відкритих підвідрізків? системою всіх напіввідкритих підвідрізків?

5. Перевірте, що перетин будь-якого набору алгебр на множині Ω — знову алгебра.

6. Нехай Φ — деяка сім'я підмножин множини Ω, яка містить Ω як елемент. Покажіть, що множини, утворені з елементів сім'ї Φ скінченним числом операцій перетину і переходу до доповнення, разом утворюють алгебру. Ця алгебра буде збігатись з алгеброю, породженою сім'єю Φ.

7. Нехай $\mathcal{A}$ — сім'я підмножин множини Ω, яка задовольняє аксіоми 1 і 2 алгебри і стійка відносно операції об'єднання пари множин. Тоді $\mathcal{A}$ — алгебра.

2.1.2. σ-алгебри множин. Борелеві множини

Сім'я Σ підмножин множини Ω називається *σ-алгеброю*, якщо вона є алгеброю множин і стійка щодо операції зліченного об'єднання: для будь-якої послідовності A_n елементів алгебри Σ їх об'єднання — також елемент алгебри Σ. Переходом до доповнень відразу отримуємо, що σ-алгебра стійка і щодо операції зліченного перетину (формули де Моргана: п. 1.1, вправа 9). Із твердження 1 попереднього пункту випливає, що якщо сім'я Σ утворює алгебру множин, то перевірку того, що Σ — це σ-алгебра, достатньо здійснити не для всіх зліченних об'єднань, а лише для зліченних об'єднань попарно неперетинних множин. Перевірка коректності наступного означення здійснюється у такий самий спосіб, як доведення теореми 1 п. 2.1.1.

Означення 1. Нехай Φ — сім'я підмножин множини Ω. Найменша σ-алгебра Σ, яка містить Φ, називається *σ-алгеброю, породженою сім'єю* Φ. Σ збігається з перетином усіх σ-алгебр на Ω, які містять Φ.

Перефразуємо означення у вигляді такого твердження:

Твердження 1. *Якщо деяка σ-алгебра Σ_0 містить сім'ю Φ, то Σ_0 містить і всю σ-алгебру, породжену сім'єю Φ.*

Нехай Ω — топологічний простір. σ-Алгебра $\mathfrak{B}$, породжена сім'єю всіх відкритих підмножин Ω, називається *σ-алгеброю борелевих множин на* Ω. Елементи σ-алгебри $\mathfrak{B}$ називаються *борелевими множинами.* На жаль, у загальному випадку для σ-алгебри, породженої сім'єю множин, і, зокрема, для системи борелевих підмножин топологічного простору, нема доброго конструктивного опису, аналогічного вправі 6 попереднього пункту. Тим не менше, певне уявлення про борелеві множини можна скласти, виходячи з таких міркувань. Сім'я $\mathfrak{B}$ містить усі відкриті підмножини простору Ω. Оскільки $\mathfrak{B}$ — алгебра, $\mathfrak{B}$ містить і доповнення до всіх відкритих множин, тобто всі замкнені множини. Як σ-алгебра, $\mathfrak{B}$ містить усі зліченні об'єднання замкнених множин (такі множини називаються *множинами класу F_σ*). Також $\mathfrak{B}$ містить усі зліченні перетини відкритих множин — *множини класу G_δ*. Зліченні об'єднання множин класу G_δ називаються множинами класу $G_{\delta\sigma}$; зліченні перетини множин класу F_σ називаються множинами класу $F_{\sigma\delta}$; зліченні об'єднання множин класу $F_{\sigma\delta}$ утворюють клас $F_{\sigma\delta\sigma}$; аналогічно вводяться борелеві класи $G_{\delta\sigma\delta}$, $F_{\sigma\delta\sigma\delta}$ і так далі до нескінченності. Всі ці класи множин містяться в σ-алгебрі борелевих множин, але навіть борелеві множини на відрізку не вичерпуються множинами перелічених вище борелевих класів[1]. Детально про борелеві класи можна прочитати у підручнику К. Куратовського [Kur, розд. 2, §30]. Важливість вивчення борелевих множин обумовлена тим, що множини, які природно виникають у задачах аналізу, — множини точок неперервності, точок гладкості, точок збіжності і т. д., — як правило, є борелевими множинами, причому не дуже далеких борелевих класів. Наступне корисне твердження показує, що одна і та сама σ-алгебра може породжуватись різними системами множин.

Твердження 2. *Сукупність множин вигляду $(a, +\infty)$, $a \in \mathbb{R}$ породжує σ-алгебру $\mathfrak{B}$ борелевих множин на осі.*

Доведення. Позначимо σ-алгебру, породжену сім'єю множин $(a, +\infty)$, $a \in \mathbb{R}$, через B_1. Нам потрібно довести, що $\mathrm{B}_1 = \mathfrak{B}$. Оскільки $\mathfrak{B}$ містить всі відкриті множини, $\mathfrak{B}$, зокрема, містить і множини вигляду $(a, +\infty)$. За твердженням 1 це

[1] Щоб отримати всі борелеві множини, треба означити класи $G_{\delta\sigma\delta\ldots}$ і $F_{\sigma\delta\sigma\ldots}$ не тільки для випадку, коли індекс $\sigma\delta\sigma\ldots$ — скінченна послідовність, але і для будь-яких зліченних ординалів. Тут ми торкаємося одного питання теорії міри, де потрібне знання порядкових чисел і трансфінітної індукції.

означає, що $B_1 \subset \mathfrak{B}$. Згідно із твердженням 1, для доведення оберненого включення достатньо показати, що всі відкриті множини лежать у B_1. Нехай $b \in \mathbb{R}$ — довільне число. Замкнена піввісь $[b, +\infty)$ зображається у вигляді зліченного перетину множин вигляду $(a, +\infty)$: $[b, +\infty) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (b - \frac{1}{n}, +\infty)$. Отже, $[b, +\infty) \in B_1$. Також у B_1 лежать усі відкриті відрізки: $(a, b) = (a, +\infty) \setminus [b, +\infty)$. Оскільки кожна відкрита множина на осі є об'єднанням не більш ніж зліченного числа відкритих відрізків, усі відкриті множини є елементами σ-алгебри B_1. Твердження доведено. □

Означення 2. *Обмеженням* сім'ї підмножин Φ на підмножину $A \subset \Omega$ називається сукупність Φ_A всіх перетинів елементів сім'ї Φ із множиною A: $\Phi_A = \{A \cap B : B \in \Phi\}$.

Вправи

1. Означимо сім'ю підмножин Σ відрізка $[0, 1]$: множина належить до сім'ї Σ, якщо або вона сама, або її доповнення не більш ніж зліченне. Чи є сім'я Σ σ-алгеброю?

2. Чи є сім'я зліченних об'єднань підвідрізків відрізка $[0, 1]$ σ-алгеброю?

3. Нехай Ω — множина, Σ — σ-алгебра на Ω, $A \subset \Omega$. Тоді Σ_A є σ-алгеброю на A.

4. Нехай X — топологічний простір, A — борелева підмножина в X. Розглянемо A як підпростір в X. Доведіть, що кожна підмножина $B \subset A$, борелева в підпросторі A, є борелевою множиною й у вихідному просторі X.

5. Чи утворюють множини першої категорії на відрізку $[0, 1]$ σ-алгебру?

6. Опишіть найменшу σ-алгебру множин на відрізку $[0, 1]$, яка містить всі підмножини першої категорії.

7. Опишіть найменшу σ-алгебру множин на відрізку $[0, 1]$, яка містить всі підмножини другої категорії.

8. Нехай A — щільна підмножина класу G_δ у повному метричному просторі X. Тоді $X \setminus A$ — множина першої категорії в X. Перетин скінченного або зліченного числа щільних множин класу G_δ в повному метричному просторі — знову щільна множина класу G_δ.

9. Нехай A — множина класу G_δ в повному метричному просторі X. $\overline{A}$ — замикання множини A. Тоді $\overline{A} \setminus A$ — множина першої категорії в X.

10. Наведіть приклад спадного ланцюжка зліченних щільних підмножин відрізка з порожнім перетином.

11. Зліченна щільна підмножина відрізка не може належати до класу G_δ.

12. Нехай f — дійснозначна функція на відрізку. Доведіть, що множина $dc(f)$ усіх точок розриву функції f — множина класу F_σ.

13. Випишемо всі відкриті відрізки з раціональними кінцями у послідовність (a_n, b_n), $n = 1, 2, \ldots$, і розглянемо $A_n = (-\infty, a_n] \cup [b_n, +\infty)$. У цих позначеннях

$$dc(f) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\overline{f^{-1}(A_n)} \setminus f^{-1}(A_n) \right).$$

Означення. Функція $f \colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ називається *функцією першого класу*, якщо f можна зобразити у вигляді поточкової границі послідовності неперервних функцій $f_n \in C[0, 1]$. Детально про функції першого класу див. [Kur, розд. 2, § 31].

14. Нехай $f \colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ — функція першого класу. Тоді $f^{-1}([a, b]) \in G_\delta$ для будь-якого замкненого відрізка $[a, b]$.

15. Для функції f першого класу множина $dc(f)$ — множина першої категорії, відтак, у f є точки неперервності.

16. Доведіть, що множина всіх точок диференційовності неперервної функції на відрізку — борелева множина. До якого борелевого класу вона належить?

17. Нехай (f_n) — послідовність неперервних дійсних функцій на відрізку. Перевірте, що множина всіх точок збіжності послідовності (f_n) — борелева множина. До якого борелевого класу вона належить?

18. Доведіть, що будь-яка відкрита підмножина метричного простору належить до класу F_σ і, отже, будь-яка замкнена — класу G_δ. У загальних топологічних просторах це твердження, взагалі кажучи, неправильне.

19. Доведіть, що класи F_σ і G_δ на відрізку не збігаються.

20. Доведіть, що в сепарабельному метричному просторі σ-алгебра, породжена сім'єю всіх відкритих куль, збігається з σ-алгеброю борелевих множин.

21. Чи буде правильним попереднє твердження, якщо відмовитись від умови сепарабельності?

22. Доведіть, що σ-алгебра борелевих множин на осі породжується деяким зліченним набором множин (такі σ-алгебри називаються *зліченно-породженими*).

23. Доведіть, що потужність будь-якої зліченно-породженої σ-алгебри не перевищує потужності континуума. Доведіть, що, зокрема, існує точно континуум борелевих множин на осі.

2.1.3. Добуток σ-алгебр

Нехай (Ω_1, Σ_1), (Ω_2, Σ_2) — множини із заданими на них σ-алгебрами. «*Прямокутниками*» в $\Omega_1 \times \Omega_2$ назвемо множини вигляду $A_1 \times A_2$, де $A_1 \in \Sigma_1$, $A_2 \in \Sigma_2$. Означимо σ-алгебру $\Sigma_1 \otimes \Sigma_2$ на декартовому добутку $\Omega_1 \times \Omega_2$ як найменшу σ-алгебру, що містить усі «прямокутники».

Вправи

1. Нехай $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2$ — борелеві σ-алгебри на топологічних просторах X_1 і X_2 відповідно, $\mathfrak{B}$ — σ-алгебра борелевих множин на $X_1 \times X_2$. Тоді $\mathfrak{B}_1 \otimes \mathfrak{B}_2 \subset \mathfrak{B}$.

2. Добуток σ-алгебр борелевих множин на двох сепарабельних метричних просторах X_1 і X_2 збігається з σ-алгеброю борелевих множин на $X_1 \times X_2$. Зокрема, добуток σ-алгебр борелевих множин на осі збігається з σ-алгеброю борелевих множин на площині.

3. Чи буде твердження попередньої вправи правильним, якщо відмовитися від умови сепарабельності?

4. $2^{\mathbb{N}} \otimes 2^{\mathbb{N}} = 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$.

5. Чи правильно, що $2^{[0,1]} \otimes 2^{[0,1]} = 2^{[0,1]\times[0,1]}$?

6. Нехай $A \in \Sigma_1 \otimes \Sigma_2$, $t_1 \in \Omega_1$. Приймемо $A_{t_1} = \{t_2 \in \Omega_2 : (t_1, t_2) \in A\}$. Доведіть, що $A_{t_1} \in \Sigma_2$.

2.1.4. Міри: скінченна і зліченна адитивність

Читач уже знайомий із поняттям міри, хоча, можливо, без вживання цього терміна. Наприклад, число елементів множини — це міра на сім'ї N_f всіх скінченних підмножин натурального ряду; площа — це міра на сім'ї плоских фігур, які мають площу; довжина спрямної кривої, об'єм, маса — все це приклади мір. У п. 2.3.1 буде побудовано центральний у межах теорії міри приклад — міра Лебега на відрізку.

Означення 1. Нехай Ω — множина із заданою на ній сім'єю підмножин Φ. *Функція множини* $\mu\colon \Phi \to \mathbb{R}$ називається *скінченно-адитивною мірою*, якщо вона задовольняє такі вимоги:

1. $\mu(A) \geqslant 0$ для будь-якого $A \in \Phi$;

2. Якщо $A_1, A_2, ..., A_n \in \Phi$, множини A_k попарно не перетинаються, й $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k \in \Phi$, то $\mu\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mu\left(A_k\right)$.

Нехай $\varnothing \in \Phi$. Тоді за другою умовою $\mu(\varnothing)+\mu(\varnothing) = \mu(\varnothing\cup\varnothing) = \mu(\varnothing)$, тобто $\mu(\varnothing) = 0$. При цьому можуть бути і непорожні множини нульової міри. Якщо областю визначення скінченно-адитивної міри є певна алгебра множин, то умову 2 можна переформулювати простіше:

2′. Для будь-якої пари неперетинних множин $A_1, A_2 \in \Phi$ міра їх об'єднання дорівнює сумі мір: $\mu(A_1 \coprod A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2)$.

Відзначимо деякі властивості скінченно-адитивних мір:

Твердження 1. *Нехай μ — скінченно-адитивна міра на деякій алгебрі $\mathcal{A}$ підмножин множини Ω. Тоді:*

a) *Якщо $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$, то $\mu(A_1 \backslash A_2) = \mu(A_1) - \mu(A_1 \cap A_2)$. Якщо при цьому $A_2 \subset A_1$, то $\mu(A_1 \backslash A_2) = \mu(A_1) - \mu(A_2)$.*

b) *Якщо $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$, і $A_2 \subset A_1$, то $\mu(A_2) \leqslant \mu(A_1)$. Зокрема, якщо $\mu(A_1) = 0$, то і $\mu(A_2) = 0$.*

c) *Якщо $\mu(A_2) = 0$, то $\mu(A_1 \backslash A_2) = \mu(A_1)$.*

d) $\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2) - \mu(A_1 \cap A_2) \leqslant \mu(A_1) + \mu(A_2)$.

e) $\mu\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k\right) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \mu\left(A_k\right)$ *для будь-яких $A_1, A_2, \ \dots \ , A_n \in \mathcal{A}$.*

Доведення. a) $A_1 = (A_1 \backslash A_2) \coprod (A_1 \cap A_2)$. Отже,

$$\mu(A_1) = \mu(A_1 \backslash A_2) + \mu(A_1 \cap A_2).$$

b) Це прямий наслідок з пункту a): $\mu(A_1) - \mu(A_2) = \mu(A_1 \backslash A_2) \geqslant 0$.
c) Якщо $\mu(A_2) = 0$, то і $\mu(A_2 \cap A_1) = 0$. Залишається застосувати пункт a).
d) Запишемо $A_1 \cup A_2$ як об'єднання трьох неперетинних множин:

$$A_1 \cup A_2 = (A_1 \backslash A_2) \coprod (A_2 \backslash A_1) \coprod (A_2 \cap A_1).$$

Маємо:

$$\begin{gathered}\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1 \backslash A_2) + \mu(A_2 \backslash A_1) + \mu(A_1 \cap A_2) = \\ = (\mu(A_1 \backslash A_2) + \mu(A_1 \cap A_2)) + (\mu(A_2 \backslash A_1) + \mu(A_1 \cap A_2)) - \mu(A_1 \cap A_2) = \\ = \mu(A_1) + \mu(A_2) - \mu(A_1 \cap A_2).\end{gathered}$$

e) Виводиться індукцією за n з d). □

Найбільш вивченими і корисними в застосуваннях скінченно-адитивними мірами є зліченно-адитивні міри, тобто міри, які підпорядковуються, разом з аксіомами 1 і 2 з означення 1, такій *аксіомі зліченної адитивності*:
якщо $A_n \in \Phi$, $n = 1, 2, \dots$ і $\coprod\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in \Phi$, то $\mu\left(\coprod\limits_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu\left(A_k\right)$.

Зліченно-адитивні міри називають ще *σ-адитивними.*

Для міри, заданої на σ-алгебрі, перевірка зліченної адитивності дещо спрощується: якщо $A_n \in \Sigma$, $n = 1, 2, \ldots$, то автоматично і $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \Sigma$.

Зліченно-адитивна міра μ, яку задано на σ-алгебрі Σ підмножин множини Ω, називається *ймовірнісною мірою*, якщо $\mu(\Omega) = 1$.

Твердження 2. *Нехай μ — зліченно-адитивна міра, задана на σ-алгебрі Σ підмножин множини Ω. Тоді:*

1. *Якщо $A_n \in \Sigma$, $n = 1, 2, \ldots$, — зростаючий ланцюжок множин (тобто $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots$), то $\mu\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim\limits_{k\to\infty} \mu(A_k)$;*

2. *Якщо $A_n \in \Sigma$, $n = 1, 2, \ldots$, — спадний ланцюжок множин (тобто $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$), то $\mu\left(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim\limits_{k\to\infty} \mu(A_k)$.*

Доведення. Обидві частини твердження доводяться аналогічно, більше того, одну частину можна вивести з іншої переходом до доповнень. Доведемо, наприклад, перше з тверджень. Отож нехай A_n утворюють зростаючий ланцюжок множин. Приймемо $A_\infty := \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Розглянемо множини $B_n = A_{n+1} \backslash A_n$. Послідовність множин $A_1, B_1, B_2, B_3, \ldots$ диз'юнктна (тобто множини попарно не перетинаються),

$$A_1 \sqcup \left(\bigsqcup_{k=1}^{n} B_k\right) = A_{n+1}, \quad A_1 \sqcup \left(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = A_\infty.$$

Скористаємося умовою зліченної адитивності й означенням суми ряду:

$$\mu(A_\infty) = \mu(A_1) + \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) = \lim_{k\to\infty} \left(\mu(A_1) + \sum_{j=1}^{k} \mu(B_j)\right) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k).$$

Твердження доведено. □

Ще пара надзвичайно простих, проте не менш корисних зауважень.

Твердження 3. *Нехай μ — зліченно-адитивна міра, визначена на σ-алгебрі Σ підмножин множини Ω, $A_n \in \Sigma$, $n = 1, 2, \ldots$. Тоді:*

1. *$\mu\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$. Зокрема, якщо всі $\mu(A_k)$ дорівнюють 0, то і $\mu\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k\right) = 0$.*

2. *Якщо $\mu(A_i \cap A_j) = 0$ для будь-яких $i, j \in \mathbb{N}$, $i \neq j$, то $\mu\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$.*

Доведення. 1. Оскільки множини $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ утворюють зростаючий за n ланцюжок множин, згідно з п. 1 твердження 2, ми маємо право в нерівності $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$, доведеній у твердженні 1, перейти до границі при $n \to +\infty$.

2. Розглянемо множини $D = \bigcup\limits_{i,j\in\mathbb{N}} (A_i \cap A_j)$ і $A'_k = A_k \backslash D$. Допоміжні множини A'_k вже не перетинаються між собою. Оскільки $\mu(D) = 0$, то $\mu(A'_k) = \mu(A_k)$ і $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A'_k\right)$. Залишається скористатись зліченною адитивністю. □

Вправи

1. Доведіть другу частину твердження 2.

2. Якщо зліченно-адитивна міра μ задана на σ-алгебрі, то $\mu(A_n) \to 0$ $(n \to \infty)$ для будь-якої диз'юнктної послідовності множин $A_n \in \Sigma$, $n = 1, 2, \ldots$

3. Нехай μ — скінченно-адитивна міра, задана на σ-алгебрі Σ підмножин множини Ω і для будь-якого зростаючого ланцюжка множин виконується співвідношення $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mu\left(A_k\right)$. Тоді міра μ зліченно-адитивна.

4. Зліченна адитивність міри, заданої на σ-алгебрі, еквівалентна такій умові: для будь-яких $A_n \in \Sigma$, $n = 1, 2, \ldots$, які утворюють спадну послідовність множин із порожнім перетином, $\lim\limits_{k\to\infty} \mu\left(A_k\right) = 0$.

5. Нехай (b_m) — послідовність додатних чисел, $\sum_{m=1}^{\infty} b_m < \infty$. На множині $\mathbb{N}$ всіх натуральних чисел розглянемо σ-алгебру $2^{\mathbb{N}}$ усіх підмножин. Означимо для будь-якого $A \in 2^{\mathbb{N}}$ міру $\mu\left(A\right)$ рівністю $\mu\left(A\right) = \sum_{m\in A} b_m$. Перевірте, що μ — це зліченно-адитивна міра.

6. Доведіть, що в попередній вправі описано загальний вигляд зліченно-адитивної міри на $2^{\mathbb{N}}$.

7. Наведіть приклад скінченно-адитивної, але не зліченно-адитивної міри на деякій алгебрі підмножин натурального ряду.

8. Наведіть приклад скінченно-адитивної, але не зліченно-адитивної міри на σ-алгебрі $2^{\mathbb{N}}$ усіх підмножин натурального ряду.

9. Доведіть пункт е) твердження 1 і твердження 3, спираючись на твердження 1 п. 2.1.1.

10. Нехай на деякій алгебрі Σ підмножин множини Ω задано скінченно-адитивну міру μ; $A, A_j \in \Sigma$, $A \subset \bigcup_{j=1}^{n} A_j$. Тоді $\mu\left(A\right) \leqslant \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j)$. Чи залишиться твердження правильним при заміні n на $+\infty$?

11. Нехай в умовах попереднього твердження для деякого $k \in \mathbb{N}$ кожна точка множини A належить принаймні до k різних множин A_j, $1 \leqslant j \leqslant n$ (так зване k-кратне покриття). Тоді $\mu\left(A\right) \leqslant \frac{1}{k} \sum\limits_{j=1}^{n} \mu(A_j)$.

2.1.5. Простори з мірою. Повнота. Поповнення σ-алгебри за мірою

Трійка (Ω, Σ, μ), де Ω — множина із заданою на ній σ-алгеброю Σ, а μ — зліченно-адитивна міра на Σ, називається *простором з мірою.* Якщо до того ж μ — ймовірнісна міра ($\mu(\Omega) = 1$), то (Ω, Σ, μ) називається *ймовірнісним простором.* У теорії ймовірностей множина Ω називається простором елементарних подій, елементи σ-алгебри Σ — подіями, а $\mu(A)$ — ймовірністю настання події A. Вимірні функції, що розглядаються в наступному розділі, в теорії ймовірностей називаються випадковими величинами, інтеграл випадкової величини — математичним сподіванням. Хоча ми не будемо користуватися ймовірнісною термінологією, багато питань, що вивчаються в наступних розділах мають важливе значення і в теорії ймовірностей.

Означення. Простір з мірою (Ω, Σ, μ) називається *повним* (інший термін — Σ повна щодо міри μ) за такої умови: для будь-якого $A \in \Sigma$ з $\mu(A) = 0$, якщо $B \subset A$, то $B \in \Sigma$. Якщо σ-алгебра Σ не є повною щодо міри μ, то μ можна природним способом доозначити на ширшу σ-алгебру Σ', яка буде повною щодо μ. Ця описана нижче процедура доозначення називається поповненням σ-алгебри Σ за мірою μ.[2]

Отже, нехай (Ω, Σ, μ) — неповний простір з мірою. Підмножину $B \subset \Omega$ назвемо *нехтуваною*, якщо існує таке $A \in \Sigma$, що $\mu(A) = 0$ і $B \subset A$. Зазначимо такі очевидні властивості нехтуваних множин:

— якщо множина B нехтувана і $B \in \Sigma$, то $\mu(B) = 0$;

— якщо множина B нехтувана, то й усі її підмножини нехтувані;

— об'єднання скінченної або зліченної сім'ї нехтуваних множин нехтувано (випливає з твердження 3 п.2.1.4).

Дві множини $A_1, A_2 \subset \Omega$ назвемо *еквівалентними* ($A_1 \sim A_2$), якщо їхня симетрична різниця $A_1 \triangle A_2$ нехтувана. Відношення $\sim$ рефлексивне і симетричне (очевидно), а також транзитивне: якщо $A_1 \sim A_2$, $A_2 \sim A_3$, то симетрична різниця $A_1 \triangle A_3 \subset (A_1 \triangle A_2) \cup (A_2 \triangle A_3)$ нехтувана, тобто $A_1 \sim A_3$. Зазначимо ще декілька властивостей.

Лема.

1. *Якщо $A \sim B$, то $(\Omega \backslash A) \sim (\Omega \backslash B)$.*

2. *Якщо $A_n \sim B_n$, $n \in M$, де M — скінченний або зліченний набір індексів, то $\bigcup\limits_{n \in M} A_n \sim \bigcup\limits_{n \in M} B_n$ і $\bigcap\limits_{n \in M} A_n \sim \bigcap\limits_{n \in M} B_n$.*

3. *Якщо $B_1 \sim B_2$, $B_1, B_2 \in \Sigma$, то $\mu(B_1) = \mu(B_2)$.*

Доведення. Перший пункт випливає з рівності $(\Omega \backslash A) \triangle (\Omega \backslash B) = A \triangle B$, другий — із включень

$$\left(\bigcap_{n \in M} A_n\right) \triangle \left(\bigcap_{n \in M} B_n\right) \subset \bigcup_{n \in M} (A_n \Delta B_n)$$

і

$$\left(\bigcup_{n \in M} A_n\right) \triangle \left(\bigcup_{n \in M} B_n\right) \subset \bigcup_{n \in M} (A_n \triangle B_n).$$

Доведемо третій пункт. Оскільки $\mu(B_1 \triangle B_2) = 0$, множини $B_1 \backslash B_2$ і $B_2 \backslash B_1$ мають нульову міру. Маємо

$$\mu(B_1) = \mu(B_1 \cap B_2) + \mu(B_1 \backslash B_2) =$$
$$= \mu(B_1 \cap B_2) = \mu(B_1 \cap B_2) + \mu(B_2 \backslash B_1) = \mu(B_2). \qquad \square$$

Означимо сім'ю множин Σ' у такий спосіб: $A \in \Sigma'$, якщо існує така $B \in \Sigma$, що $A \sim B$.

Теорема 1. *Сім'я множин Σ' містить σ-алгебру Σ і сама є σ-алгеброю на Ω.*

Доведення. Якщо $A \in \Sigma$, то $A \in \Sigma'$: досить в означенні взяти $B = A$. Перевіримо тепер для Σ' виконання аксіом σ-алгебри. 1. $\Omega \in \Sigma'$. 2. Якщо $A \in \Sigma'$, то й $\Omega \backslash A \in \Sigma'$. Справді, за означенням, існує така $B \in \Sigma$, що $A \sim B$. Але тоді $\Omega \backslash B \in \Sigma$ і $(\Omega \backslash A) \sim (\Omega \backslash B)$. 3. Нехай множини A_n належать до сім'ї Σ', $B_n \in \Sigma$, $A_n \sim B_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Тоді $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n \in \Sigma$ і $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \sim \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$. Отже, $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \Sigma'$. $\square$

[2] Радимо читачеві розглянути як вправи твердження, які доводяться в цьому підрозділі, і спробувати знайти доведення самостійно.

Доозначимо міру μ до міри μ', заданої вже на Σ'. Нехай $A \in \Sigma'$, $B \in \Sigma$ і $A \sim B$. Приймемо $\mu'(A) = \mu(B)$. Це означення коректне з огляду на п. 3 леми, тобто $\mu'(A)$ залежить лише від A і не залежить від вибору B.

Теорема 2. *Міра μ' зліченно-адитивна.*

Доведення. Нехай $A_n \in \Sigma'$ — диз'юнктна послідовність множин, $B_n \in \Sigma$ і $A_n \sim B_n$. Оскільки для будь-яких $i, j \in \mathbb{N}$, $i \neq j$, перетин $A_i \cap A_j$ порожній, а $B_i \cap B_j \sim A_i \cap A_j$, то $\mu\left(B_i \cap B_j\right) = 0$.

Скористаємось пунктом 2 твердження 3 попереднього пункту і співвідношеннями $A_n \sim B_n$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \sim \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$:

$$\mu'\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu\left(B_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu'\left(A_k\right). \qquad \square$$

Побудований простір з мірою (Ω, Σ', μ') називається *поповненням* простору з мірою (Ω, Σ, μ). Часто міру μ' позначають тією самою літерою, що й μ. Це не призводить до непорозумінь, оскільки за побудовою $\mu' = \mu$ на Σ.

Вправи

1. Поповнення простору з мірою — це повний простір.
2. Простір з мірою повний тоді і тільки тоді, коли він збігається зі своїм поповненням.
3. Нехай (Ω, Σ', μ') — поповнення простору з мірою (Ω, Σ, μ), $A \subset \Omega$. Доведіть, що:

— $A \in \Sigma'$ тоді і тільки тоді, коли існують такі $B, C \in \Sigma$, що $B \subset A \subset C$ і $\mu(B) = \mu(C)$;
— $A \in \Sigma'$ тоді і тільки тоді, коли існують такі $B \in \Sigma$ і така нехтувана множина C, що $A = B \cup C$.

4. Нехай (Ω, Σ, μ) — простір з мірою. Покажіть, що вираз $\rho(A, B) = \mu(A \triangle B)$ задає псевдометрику на Σ.
5. Нехай $A_n \in \Sigma$ і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \rho(A_n, A_{n+1})$ збігається. Тоді у псевдометриці ρ послідовність (A_n) збігається до множини $A_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right)$.
6. (Σ, ρ) — повний псевдометричний простір.

2.1.6. Операції над мірами. δ-міра. Атоми, суто атомарні і безатомні міри

Нехай Ω — множина із заданою на ній σ-алгеброю Σ. Для мір на Σ дано природне означення операцій додавання і множення на додатний скаляр: $\left(\mu_1 + \mu_2\right)(A) = \mu_1(A) + \mu_2(A)$; $(a\mu)(A) = a\mu(A)$. Пропонуємо читачеві самостійно перевірити, що описані операції зі зліченно-адитивними мірами не виводять за межі класу зліченно-адитивних мір.

Означення. *Атомом* міри μ називається така підмножина $A \in \Sigma$, що $\mu(A) > 0$ і для будь-якого $B \in \Sigma_A$ або $\mu(B) = 0$, або $\mu(A \backslash B) = 0$.

Якщо у міри є атоми, міра називається *атомарною*, якщо ж атомів немає, то *безатомною*. Міра називається *суто атомарною*, якщо Ω можна зобразити у вигляді об'єднання скінченного або зліченного числа неперетинних атомів.

Типовим прикладом суто атомарної міри є *δ-міра*. Нехай x — довільна точка множини Ω. δ-Мірою, зосередженою в точці x, називається міра δ_x, означена правилом: $\delta_x(A) = 1$, якщо $x \in A$, і $\delta_x(A) = 0$, якщо $x \notin A$.

Нагадаємо, що множини $A_1, A_2 \in \Sigma$ називаються еквівалентними ($A_1 \sim A_2$), якщо $\mu(A_1 \triangle A_2) = 0$. Наприклад, для міри δ_x її атом Ω еквівалентний одноточковій множині $\{x\}$.

Розв'язавши наведені нижче вправи, читач отримає, зокрема, доведення таких теорем:

Теорема 1. *Будь-яка зліченно-адитивна міра на σ-алгебрі може бути зображена у вигляді суми суто атомарної і безатомної мір, причому таке зображення єдине.*

Теорема 2. *Нехай Ω — сепарабельний метричний простір, σ-алгебра Σ містить всі борелеві множини, μ — зліченно-адитивна міра на Σ. Тоді кожен атом міри μ еквівалентний деякій одноточковій множині.*

Вправи

1. Якщо множина еквівалентна атому, то вона сама є атомом.

2. Якщо атоми A_1, A_2 міри μ не еквівалентні, то $\mu(A_1 \cap A_2) = 0$.

3. Нехай $A_n \in \Sigma$, $n = 1, 2, \dots,$ — скінченна або зліченна послідовність попарно не еквівалентних атомів міри μ. Тоді існує така диз'юнктна послідовність $A'_n \in \Sigma$, $n = 1, 2, \dots,$ атомів міри μ, що $A'_k \sim A_k,\ k = 1, 2, \dots$ (скористатись твердженням 1 п. 2.1.1).

4. Міри всіх представників одного класу еквівалентності множин збігаються. У зв'язку з цим мірою класу еквівалентності називатимемо міру представника цього класу.

5. Клас еквівалентності атома називатимемо атомарним класом. Сума мір будь-якого скінченного числа попарно різних атомарних класів не перевищує $\mu(\Omega)$.

6. Існує не більш ніж зліченне число різних атомарних класів.

7. Існує така скінченна або зліченна диз'юнктна послідовність $A_1, A_2, \dots$ атомів міри μ, що будь-який атом міри μ еквівалентний одному з A_n.

8. В умовах попередньої вправи приймемо $A_\infty := \bigcup_{k=1}^\infty A_k$ й означимо міри μ_1 і μ_2 на Σ таким способом: $\mu_1(A) = \mu(A \cap A_\infty)$, $\mu_2(A) = \mu(A \setminus A_\infty)$. Перевірте, що μ_1 і μ_2 — зліченно-адитивні міри, $\mu = \mu_1 + \mu_2$, міра μ_1 суто атомарна і μ_2 безатомна. Цим буде доведено існування розкладу в теоремі 1.

9. Нехай $\mu = \mu'_1 + \mu'_2$ — деякий розклад на суто атомарну та безатомну міри, B — атом міри μ. Тоді B — атом для μ'_1 і $\mu(B) = \mu'_1(B)$. Навпаки, кожен атом міри μ'_1 еквівалентний деякому атому міри μ.

10. В умовах попередньої вправи міра μ'_1 збігається з мірою μ_1 із вправи 8. Цим буде доведено єдиність розкладу в теоремі 1.

11. Нехай Ω і Σ — з формулювання теореми 2, $A \in \Sigma$. Тоді множину A можна розбити на не більш ніж зліченне число попарно неперетинних множин Σ, діаметри яких не перевищують ε.

12. В умовах теореми 2 для кожного атома A міри μ і для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує атом $A_1 \subset A$ (автоматично еквівалентний атому A) з $\operatorname{diam}(A_1) < \varepsilon$.

13. В умовах теореми 2 нехай A — атом міри μ. Скориставшись попередньою вправою, побудуємо ланцюжок $A \supset A_1 \supset A_2 \supset \ \dots\ \supset A_n \supset \ \dots$ атомів з $\operatorname{diam}(A_n) < 1/n$. Доведіть, що перетин цього ланцюжка множин складається з однієї точки і що отримана одноточкова множина буде атомом. Цим буде доведено теорему 2.

14. Нехай Σ — Ф-алгебра на $[0; 1]$ з вправи 1 п. 2.1.2. Приймемо $\mu(A) = 0$, якщо A не більш ніж зліченна, та $\mu(A) = 1$, якщо доповнення до A не більш ніж зліченне. Перевірте, що відрізок $[0, 1]$ є атомом цієї міри, але не еквівалентний жодній одноточковій множині.

15. Нехай μ — зліченно-адитивна безатомна міра на σ-алгебрі Σ. Тоді для будь-якого $A \in \Sigma$ і будь-якого $\alpha \in (0, 1)$ існує підмножина $B \in \Sigma_A$ з $\mu(B) = \alpha\mu(A)$.

2.2. Продовження мір

Часто міри спочатку є означеними природним чином на деякому відносно вузькому класі множин, і, перед тим як почати ними користуватись, їх потрібно доозначити на множинах з ширшого класу. Така ситуація трапляється навіть у шкільному курсі математики: площа означається спочатку для прямокутників, потім для трикутників, потім — через розбиття на менші частини — для довільних багатокутників. Через наближення круга багатокутниками означається площа круга. Подібний шлях треба пройти для означення об'єму. У цьому підрозділі ми вивчимо загальну схему продовження мір і застосуємо її для побудови найважливішого для нас прикладу — міри Лебега на відрізку.

2.2.1. Продовження міри з півкільця множин на породжену ним алгебру

Означення 1. Сім'я Φ підмножин множини Ω називається *півкільцем з одиницею*, якщо:

1. $\Omega \in \Phi$.

2. Якщо $A, B \in \Phi$, то й $A \cap B \in \Phi$.

3. Для будь-якої множини $A \in \Phi$ її доповнення $\Omega \setminus A$ може бути зображено як об'єднання скінченного числа попарно неперетинних елементів сім'ї Φ.

Для множини $A \subset \Omega$ *базовим зображенням* назвемо зображення у вигляді $A = \coprod_{k=1}^{n} A_k$, де $A_k \in \Phi$. Зрозуміло, що можуть знайтися множини, які не мають базового зображення.

Теорема 1. *Нехай Φ — півкільце з одиницею. Тоді сім'я $\mathcal{A}$ всіх множин, які мають базові зображення, утворює найменшу алгебру $\mathcal{A}(\Phi)$, що містить Φ.*

Доведення. Доведемо, що $\mathcal{A}$ — алгебра множин. Нехай $A, B \in \mathcal{A}$; $A = \coprod_{k=1}^{n} A_k$, $B = \coprod_{j=1}^{m} B_k$ — відповідні базові зображення. Тоді $A \cap B = \coprod_{k=1}^{n} \coprod_{j=1}^{m} A_k \cap B_j$ — базове зображення для $A \cap B$. Тобто сім'я $\mathcal{A}$ стійка щодо операції перетину скінченного числа множин.

Тепер доведемо, що сім'я $\mathcal{A}$ стійка щодо операції доповнення. Отож, нехай $A = \coprod_{k=1}^{n} A_k$ — довільний елемент з $\mathcal{A}$, $\{A_k\}_{k=1}^{n} \subset \Phi$. За аксіомою 3 півкільця з одиницею всі множини $\Omega \setminus A_k$ належать до $\mathcal{A}$. Отже, за вже доведеним, $\Omega \setminus A = \bigcap_{k=1}^{n} (\Omega \setminus A_k)$ також належить до $\mathcal{A}$. Відтак, $\mathcal{A}$ — алгебра. Залишилось зауважити, що будь-яка алгебра множин, яка містить всі елементи півкільця Φ, повинна містити і всі їх скінченні об'єднання, тобто всі елементи сім'ї $\mathcal{A}$. Цим доведено, що $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\Phi)$. $\square$

Теорема 2. *Будь-яка скінченно-адитивна міра μ, задана на півкільці з одиницею Φ, єдиним способом продовжується до скінченно-адитивної міри, заданої на алгебрі $\mathcal{A}(\Phi)$, яка породжена сім'єю Φ.*

Доведення. Почнемо з єдиності. Нехай μ' — деяке продовження на $\mathcal{A}(\Phi)$ міри μ, $A = \coprod_{k=1}^{n} A_k$ — базове зображення довільного елемента алгебри $\mathcal{A}(\Phi)$. Тоді

$$\mu'(A) = \sum_{k=1}^{n} \mu'(A_k) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k).$$

Отже, $\mu'(A)$ однозначно визначається мірою μ.

Перевіримо тепер, що отриманий вище вираз $\mu'(A) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$ справді задає скінченно-адитивну міру на $\mathcal{A}(\Phi)$. Почнемо з перевірки коректності такого означення, тобто з того, що $\mu'(A)$ визначається множиною A, а не вибором його базового зображення. Нехай $A = \coprod_{k=1}^{n} A_k$ і $A = \coprod_{j=1}^{m} B_k$ — два різних базових зображення множини $A \in \mathcal{A}(\Phi)$. Введемо у розгляд множини $C_{i,j} = A_i \cap B_j$. Ці множини попарно не перетинаються, $A_i = \bigcup\limits_{j=1}^{m} C_{ij}$; $B_j = \bigcup\limits_{i=1}^{n} C_{ij}$. Маємо

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} \mu(C_{ij}) \right) = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \mu(C_{ij}) \right) = \sum_{j=1}^{m} \mu(B_j).$$

Коректність означення обґрунтовано. Скінченна ж адитивність міри μ' перевіряється просто. Нехай $A, B \in \mathcal{A}(\Phi)$ — диз'юнктні множини, $A = \coprod_{j=1}^{m} A_j$, $B = \coprod_{j=1}^{m} B_j$ — їхні базові зображення. Множини A_k і B_j, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$ в сукупності утворюють базове зображення для $A \cup B$. Отже,

$$\mu'(A \cup B) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) + \sum_{j=1}^{m} \mu(B_j) = \mu'(A) + \mu'(B). \qquad \square$$

Теорема 3. *Нехай μ — зліченно-адитивна міра на півкільці з одиницею Φ, μ' — її продовження на алгебру $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\Phi)$, побудоване в теоремі 2. Тоді μ' також є зліченно-адитивною мірою.*

Доведення. Нехай $A_n \in \mathcal{A}$, $n = 1, 2, \ldots,$ — диз'юнктна послідовність множин та їх об'єднання $B = \coprod_{n=1}^{\infty} A_n$ також належить до алгебри $\mathcal{A}$. Далі, нехай $B = \coprod_{j=1}^{m} B_j$ — базове зображення для B, $A_k = \coprod_{i=1}^{m_k} A_{ki}$ — базові зображення для A_k. Тоді

$$B_j = \coprod_{k=1}^{\infty} (A_k \cap B_j) = \coprod_{k=1}^{\infty} \coprod_{i=1}^{m_k} (A_{ki} \cap B_j)$$

і всі множини, що входять в останнє зображення, належать до півкільця Φ. З огляду на зліченну адитивність міри μ на Φ,

$$\mu(B_j) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{m_k} \mu(A_{ki} \cap B_j).$$

Отже,

$$\mu'(B) = \sum_{j=1}^{m} \mu(B_j) = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{m_k} \mu(A_{ki} \cap B_j) \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{m_k} \mu(A_{ki} \cap B_j) \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu' \left(\bigcup_{i=1}^{m_k} \bigcup_{j=1}^{m} A_{ki} \cap B_j \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu' (A_k). \qquad \square$$

Означення 2. Нехай Φ — сім'я множин, $\mu\colon \Phi \to \mathbb{R}^+$. Функція множини μ називається *зліченно-напівадитивною*, якщо для будь-яких $A, B_k \in \Phi$ із включення $A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k$ випливає, що $\mu(A) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(B_k)$.

Теорема 4 (критерій зліченної адитивності). *Нехай μ — скінченно-адитивна міра на півкільці з одиницею Φ, яка задовольняє умови зліченної напівадитивності. Тоді μ зліченно-адитивна.*

Доведення. Нехай $A, B_k \in \Phi$, $A = \coprod_{k=1}^{\infty} B_k$. Потрібно довести, що $\mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k)$, а для цього, з огляду на дану за умовою зліченну напівадитивність достатньо довести нерівність $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) \leqslant \mu(A)$. Нехай μ' — продовження міри μ на алгебру $\mathcal{A}(\Phi)$, побудоване в теоремі 2. З включення $A \supset \bigcup_{k=1}^{n} B_k$ і вже доведеної скінченної адитивності міри μ' виводимо, що

$$\mu(A) = \mu'(A) \geqslant \mu'\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu'(B_k) = \sum_{k=1}^{n} \mu(B_k).$$

Залишається спрямувати n до нескінченності. □

Вправи

1. Обґрунтуйте перегрупування доданків у нескінченній сумі в доведенні теореми 3. (Нагадаємо, що, взагалі кажучи, нескінченна сума може змінюватись при перегрупуванні доданків.)

2. Наведіть приклад такої сім'ї множин Φ на відрізку і такої скінченно-адитивної міри μ на Φ, що будь-яке продовження міри μ на алгебру, породжену Φ, не буде скінченно-адитивною мірою.

3. Нехай Φ — сім'я множин, μ — скінченно-адитивна міра μ на Φ. Чи може існувати більше ніж одне продовження міри μ на алгебру, породжену Φ, із збереженням скінченної адитивності?

4. Обґрунтуйте рівність $A_i = \bigcup_{j=1}^{m} C_{ij}$ із доведення теореми 2. Де аналогічне співвідношення використовувалось у доведенні теореми 3?

5. Нехай Φ — півкільце з одиницею. Доведіть, що $\varnothing \in \Phi$.

6. Нехай Φ — сім'я всіх трикутників на площині (трикутники розглядаються разом із внутрішністю). Для кожного $A \in \Phi$ через $r(A)$ позначимо радіус вписаного у трикутник A кола. Перевірте, що функція множини r — зліченно-напівадитивна на Φ. Чи буде r скінченно-адитивною мірою на Φ?

2.2.2. Зовнішня міра

Нехай Ω — множина із заданою на ній алгеброю підмножин $\mathcal{A}$ і зліченно-адитивною мірою μ. Як ми вже згадували, найбільш вживаною областю визначення для зліченно-адитивної міри є не алгебра, а σ-алгебра множин. Тому потрібно вміти продовжувати зліченно-адитивну міру на σ-алгебру, породжену алгеброю $\mathcal{A}$. Перша ідея такого продовження, яка спадає на думку, — діяти за аналогією з теоремою 2 попереднього пункту. А саме, розглянути диз'юнктні зліченні об'єднання множин з $\mathcal{A}$. Якщо всі такі множини знову лежать в $\mathcal{A}$, то ми від самого початку маємо справу з σ-алгеброю. У протилежному випадку міру таких об'єднань означимо як суму мір складових частин. Можна обґрунтувати коректність такого означення, але на відміну від згаданої теореми 2 клас множин, на які ми продовжимо у такий спосіб міру, ще не буде σ-алгеброю. Більше того, він буде нестійким щодо операції переходу до доповнення, тобто навіть вже не буде алгеброю! Отже, далі потрібно якось означити міру на доповненнях отриманих множин. Як же вчинити з об'єднаннями цих доповнень? Хоча цю ідею і можна реалізувати (деякі зауваження на цю тему див. нижче в п. 2.2.4), багатьох технічних труднощів дозволяє уникати інший підхід, який базується на понятті зовнішньої міри. Винаходом цього підходу ми завдячуємо Лебегу (H. Lebesgue).

Означення. Нехай $A \subset \Omega$ — довільна множина. *Зовнішньою мірою* множини A називається величина

$$\mu^*(A) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) : \ A_k \in \mathcal{A}, A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right\}.$$

Зовнішня міра означена вже на всіх підмножинах множини Ω, але на такому широкому класі множин вона не має навіть скінченної адитивності. У наступному параграфі буде побудовано σ-алгебру множин $\Sigma \supset \mathcal{A}$, на якій μ^* буде зліченно-адитивною мірою, чим буде розв'язано задачу продовження міри μ. У цьому ж параграфі ми проведемо деяку підготовчу роботу.

Властивості зовнішньої міри:

1. *Монотонність*: якщо $A \subset B$, то $\mu^*(A) \leqslant \mu^*(B)$.
2. *Напівадитивність*: для будь-яких $A, B \subset \Omega$ справджується нерівність $\mu^*(A \cup B) \leqslant \mu^*(A) + \mu^*(B)$.
3. *Зліченна напівадитивність*: якщо $A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k$, то $\mu^*(A) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu^*(B_k)$.
4. $\mu^*(A) = \inf\left\{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) : \ B_k \in \mathcal{A}, A \subset \coprod\limits_{k=1}^{\infty} B_k\right\}$.
5. Якщо $A \in \mathcal{A}$, то $\mu^*(A) = \mu(A)$, тобто μ^* — це продовження міри μ.

Доведення. 1. Для $\mu^*(A)$ інфімум в означенні береться за ширшою сім'єю наборів $\{A_k\}_1^\infty$, ніж для $\mu^*(B)$: якщо $B \subset \bigcup_{k=1}^\infty A_k$, то й $A \subset \bigcup_{k=1}^\infty A_k$. А інфімум за ширшою сім'єю не перевищує інфімума за вужчою.

2. Знову замість інфімума за всіма покриттями розглянемо інфімум за вужчим класом

$$\mu^*(A \cup B) \leqslant \\ \leqslant \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) : A_k, B_k \in \mathcal{A}, A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, B \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right\} = \\ = \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

3. Аргументація та сама, що для п. 2.

4. Нехай $A \subset \Omega$ — довільна множина. Позначимо

$$\nu(A) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) : \ B_k \in \mathcal{A}, A \subset \coprod_{n=1}^{\infty} B_k\right\}.$$

Згідно із твердженням 1 п. 2.1.1, для будь-якого набору $A_k \in \mathcal{A}$, $A \subset \bigcup_{k=1}^\infty A_k$, існує диз'юнктний набір $B_k \in \mathcal{A}$, $A \subset \coprod_{k=1}^\infty B_k$, який задовольняє умову $B_k \subset A_k$. Для цього набору $\mu(B_k) \leqslant \mu(A_k)$ і, відповідно, $\sum_{k=1}^\infty \mu(B_k) \leqslant \sum_{k=1}^\infty \mu(A_k)$. Отже, $\nu(A) \leqslant \mu^*(A)$. Обернена нерівність випливає з того, що інфімум в означенні $\nu(A)$ береться за вужчим класом множин, ніж в означенні зовнішньої міри.

5. Нехай $A \in \mathcal{A}$, $A_k \in \mathcal{A}$ і $A \subset \coprod_{k=1}^{\infty} A_k$. Приймемо $B_k = A \cap A_k$. Тоді $B_k \in \mathcal{A}$, $A = \coprod_{k=1}^{\infty} B_k$ і $\mu(B_k) \leqslant \mu(A_k)$. Скористаємось зліченною адитивністю міри μ:

$$\mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Перейшовши до інфімума по всіх таких наборах $\{A_k\}_1^{\infty}$, одержуємо нерівність $\mu(A) \leqslant \mu^*(A)$. Обернену нерівність отримаємо, якщо в означенні зовнішньої міри підставимо такий конкретний набір $\{A_k\}_1^{\infty}$: $A_1 = A$, $A_k = \varnothing$ $(k \geqslant 2)$. □

За аналогією із вправами 4–6 п. 2.1.5 введемо на сім'ї всіх підмножин множини Ω *псевдометрику ρ, породжену зовнішньою мірою:* $\rho(A, B) = \mu^*(A \triangle B)$.

Властивості псевдометрики ρ:

1. Для будь-яких множин $A, B, C \subset \Omega$ правильна *нерівність трикутника*: $\rho(A, C) \leqslant \rho(A, B) + \rho(B, C)$ (цим обґрунтовується законність вживання терміну «псевдометрика» щодо ρ).

2. $|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leqslant \rho(A, B)$ для будь-яких $A, B \subset \Omega$. Зокрема, зовнішня міра неперервна щодо ρ.

3. $\rho(A, B) = \rho(\Omega \backslash A, \Omega \backslash B)$, тобто перехід до доповнення — це ізометрія.

4. $\rho(A_1 \cap A_2, B_1 \cap B_2) \leqslant \rho(A_1, B_1) + \rho(A_2, B_2)$.

5. $\rho(\bigcup\limits_{n \in M} A_n, \bigcup\limits_{n \in M} B_n) \leqslant \sum\limits_{n \in M} \rho(A_n, B_n)$ для будь-яких скінченних або зліченних наборів множин $A_n, B_n \subset \Omega$.

Доведення. Для кожної з перелічених властивостей випишемо співвідношення, з яких воно випливає:

1. $A \triangle C \subset (A \triangle B) \cup (B \triangle C)$;
2. $A \subset B \cup (A \triangle B)$, $B \subset A \cup (A \triangle B)$;
3. $(\Omega \backslash A) \triangle (\Omega \backslash B) = A \triangle B$;
4. $\left(\bigcap\limits_{n \in M} A_n\right) \triangle \left(\bigcap\limits_{n \in M} B_n\right) \subset \bigcup\limits_{n \in M} (A_n \triangle B_n)$;
5. $\left(\bigcup\limits_{n \in M} A_n\right) \triangle \left(\bigcup\limits_{n \in M} B_n\right) \subset \bigcup\limits_{n \in M} (A_n \triangle B_n)$. □

Вправи

1. Відновіть детальне доведення зліченної напівадитивності зовнішньої міри.

2. $\rho(\bigcap_{n \in M} A_n, \bigcap_{n \in M} B_n) \leqslant \sum_{n \in M} \rho(A_n, B_n)$ для будь-яких скінченних або зліченних наборів множин $A_n, B_n \subset \Omega$.

3. Функція $(A, B) \mapsto A \cap B$ неперервна як функція двох змінних відносно псевдометрики ρ.

Множина A називається *ρ-нехтуваною*, якщо $\rho(A, \varnothing) = 0$.

Виведіть такі властивості нехтуваних множин:

4. A є ρ-нехтуваною тоді і тільки тоді, коли $\mu^*(A) = 0$.

5. Якщо $A \subset B$ і B ρ-нехтувана, то A також ρ-нехтувана.

6. Скінченне або зліченне об'єднання ρ-нехтуваних множин ρ-нехтуване.

2.2.3. Продовження міри з алгебри на σ-алгебру

Нехай, як і в попередньому пункті, Ω — множина із заданою на ній алгеброю підмножин $\mathcal{A}$ і зліченно-адитивною мірою μ. Множину $A \subset \Omega$ назвемо *вимірною*, якщо вона належить до замикання за ρ сім'ї $\mathcal{A}$. Сім'ю всіх вимірних підмножин множини Ω позначимо через Σ. Детальніше: $A \in \Sigma$ тоді і тільки тоді, коли для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $B \in \mathcal{A}$, що $\rho(A, B) < \varepsilon$. Очевидно, $\mathcal{A} \subset \Sigma$. Зазначимо, що клас вимірних множин залежить не лише від вихідної алгебри $\mathcal{A}$, але й від міри μ. Якщо треба підкреслити, що вимірні множини, які розглядаються, породжені саме мірою μ, їх називають не просто вимірними, а *μ-вимірними*.

Приклад. Якщо множина A ρ-нехтувана (тобто $\rho(A, \varnothing) = 0$ або, еквівалентно, $\mu^*(A) = 0$), то A вимірна.

Лема 1. *Нехай $A \subset \Omega$ і для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $B \in \Sigma$, що $\rho(A, B) < \varepsilon$. Тоді $A \in \Sigma$.*

Доведення. Можна просто обмежитись тим, що замикання множини — це замкнена множина. Розпишемо детальніше. Виберемо $B \in \Sigma$ таку, що $\rho(A, B) < \frac{\varepsilon}{2}$. За означенням вимірної множини для цього B існує $C \in \mathcal{A}$ з $\rho(B, C) < \frac{\varepsilon}{2}$. За нерівністю трикутника $\rho(A, C) < \varepsilon$. □

Лема 2. *Об'єднання зліченного числа елементів алгебри $\mathcal{A}$ вимірне.*

Доведення. Нехай $A_n \in \mathcal{A}$ — диз'юнктна послідовність, $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Оскільки $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leqslant \mu(\Omega)$, то ряд збігається, і для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує такий номер n, що $\sum_{k=n+1}^{\infty} \mu(A_k) < \varepsilon$. Позначимо $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ через B. Маємо: $B \in \mathcal{A}$ і

$$\rho(A, B) = \mu^* \left(\bigcup_{k=n+1}^{\infty} A_k \right) \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \mu(A_k) < \varepsilon.$$

Щоб звести випадок довільної послідовності множин $A_n \in \mathcal{A}$ до вже розглянутого, достатньо застосувати твердження 1 п. 2.1.1. □

Теорема 1. *Сім'я Σ всіх вимірних підмножин множини Ω утворює σ-алгебру.*

Доведення. По-перше, $\Omega \in \Sigma$, адже $\Omega \in \mathcal{A}$. Далі, нехай $A \in \Sigma$, а $A_n \in \mathcal{A}$ — послідовність, що апроксимує A: $\rho(A, A_n) \to 0$ при $n \to \infty$. Тоді $\Omega \backslash A_n \in \mathcal{A}$ і

$$\rho(\Omega \backslash A, \Omega \backslash A_n) = \rho(A, A_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

Тобто $\Omega \backslash A \in \Sigma$. Залишилось перевірити стійкість щодо операції зліченного об'єднання. Нехай $A_n \in \Sigma$, $n = 1, 2, \ldots$. Виберемо множини $B_n \in \mathcal{A}$ у такий спосіб, щоб була правильною оцінка $\rho(A_n, B_n) \leqslant \varepsilon 2^{-n}$. Тоді $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ — це вимірна множина, яка апроксимує $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ з точністю до ε:

$$\rho\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \Big) \leqslant \sum_{n \in \mathbb{N}} \rho(A_n, B_n) = \varepsilon. \qquad \square$$

Теорема 2. *Обмеження зовнішньої міри μ^* на σ-алгебру Σ зліченно-адитивне.*

Доведення. Доведемо спочатку скінченну адитивність зовнішньої міри на Σ. Нехай $A_1, A_2 \in \Sigma$ — диз'юнктна пара, $\varepsilon > 0$. За означенням вимірної множини існують $B_1, B_2 \in \mathcal{A}$, для яких $\rho(A_1, B_1) + \rho(A_2, B_2) < \varepsilon$. Множини B_j можуть перетинатися між собою, але цей перетин не може бути великим. Справді, за властивістю 4 псевдометрики ρ

$$\mu(B_1 \cap B_2) = \mu^*(B_1 \cap B_2) = \rho(\varnothing, B_1 \cap B_2) = \rho(A_1 \cap A_2, B_1 \cap B_2) \leqslant$$
$$\leqslant \rho(A_1, B_1) + \rho(A_2, B_2) \leqslant \varepsilon.$$

Скористаємось тепер властивостями 2 і 5 функції ρ:

$$|\mu^*(A_1 \cup A_2) - (\mu^*(A_1) + \mu^*(A_2))| \leqslant |\mu(B_1 \cup B_2) - (\mu(B_1) + \mu(B_2))| + 2\varepsilon =$$
$$= \mu(B_1 \cap B_2) + 2\varepsilon \leqslant 3\varepsilon.$$

З огляду на довільність ε, рівність $\mu^*(A_1 \cup A_2) = \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2)$, а з нею і скінченна адитивність доведені.

Для завершення доведення скористаємось теоремою 4 п. 2.2.1: скінченно-адитивна міра на півкільці з одиницею (а отже, і на σ-алгебрі, адже σ-алгебра — теж півкільце), яка задовольняє умову зліченної напівадитивності, автоматично зліченно-адитивна[3]. □

Отже, ми побудували продовження міри μ до зліченно-адитивної міри, заданої на σ-алгебрі $\Sigma \supset \mathcal{A}$. Отож одночасно доведено існування такого продовження на σ-алгебру, породжену алгеброю $\mathcal{A}$. З'єднавши це з результатами попереднього параграфа, отримуємо таке твердження.

Теорема 3. *Будь-яка зліченно-адитивна міра, задана на півкільці з одиницею, продовжується до зліченно-адитивної міри, заданої на σ-алгебрі, породженої цим півкільцем.*

Одержане продовження міри на σ-алгебру μ-вимірних множин позначатимемо тією самою літерою, що й вихідну міру. Тобто, за означенням, $\mu(A) = \mu^*(A)$ для $A \in \Sigma$. Єдиність продовження й інші корисні властивості описаної конструкції читач знайде в нижченаведених вправах.

Вправи

1. Нехай Ω — множина із заданою на ній алгеброю підмножин $\mathcal{A}$ і зліченно-адитивною мірою μ; Σ_1 — σ-алгебра, породжена алгеброю $\mathcal{A}$, μ_1 — деяке зліченно-адитивне продовження міри μ на Σ_1. Тоді $\mu_1(A) \leqslant \mu^*(A)$ для будь-якого $A \in \Sigma_1$.

2. Нехай на деякій алгебрі множин $\tilde{\Sigma}$ задані дві скінченно-адитивні міри μ_1 і μ_2, $\mu_1(\Omega) = \mu_2(\Omega)$ і $\mu_1(A) \leqslant \mu_2(A)$ для будь-якого $A \in \tilde{\Sigma}$. Тоді міри μ_1 і μ_2 збігаються.

3. З попередніх двох вправ виведіть єдиність зліченно-адитивного продовження з алгебри на породжену нею σ-алгебру. Звідси виведіть єдиність продовження в теоремі 3.

4. Доведіть єдиність продовження на будь-яку σ-алгебру, яка лежить між Σ_1 і Σ.

5. Поповнення простору з мірою $(\Omega, \Sigma_1, \mu^*)$ збігається із простором (Ω, Σ, μ^*).

6. Нехай $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ — повний простір з мірою. Показати, що сім'я Σ вимірних підмножин, побудована для $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ за описаною в цьому параграфі схемою, буде збігатися з $\mathcal{A}$.

---

[3] Якщо математик у понеділок знайшов порожній чайник, набрав води, закип'ятив її і заварив чай, то у вівторок для приготування чаю він спочатку виллє всю воду з чайника, щоб звести задачу до попередньої. Ми міркували за подібною схемою. Міра вже задана на σ-алгебрі. Щоб отримати зліченну адитивність, ми зводимо до критерію, де міра задана на півкільці і в доведенні потрібно продовжувати міру з півкільця на алгебру.

2.2.4. Теорема про монотонний клас множин

У цьому параграфі ми поглибимо наші уявлення про будову вимірних множин і доведемо теорему, яка буде потрібною нам у п. 4.4.4.

Нехай (Ω, Σ, μ) — простір зі скінченною мірою, отриманий, як описано вище, продовженням міри μ з деякого півкільця з одиницею $\Phi \subset \Sigma$. Тобто за півкільцем побудовано породжену ним алгебру $\mathcal{A}(\Phi)$, за алгеброю — зовнішню міру μ^*, за зовнішньою мірою — клас вимірних множин (це і є наша Σ) і міра на Σ означена рівністю $\mu(A) = \mu^*(A)$. Позначимо через Φ_1 сім'ю всіх множин, зображуваних у вигляді об'єднання скінченного або зліченного диз'юнктного набору елементів півкільця Φ. Через Φ_2 позначимо сім'ю всіх множин, зображуваних у вигляді перетину спадної послідовності множин сім'ї Φ_1. Оскільки сім'я вимірних множин Σ — це σ-алгебра, Φ_1 і Φ_2 складаються з вимірних множин.

Твердження 1. *Клас множин Φ_1 стійкий щодо операції перетину скінченного числа множин і операції об'єднання скінченного або зліченного диз'юнктного набору множин.*

Доведення. Нехай $A = \coprod_{k=1}^{\infty} A_k$ і $B = \coprod_{k=1}^{\infty} B_k$ — два довільних елементи сім'ї Φ_1, записані як відповідні зліченні об'єднання диз'юнктних наборів елементів півкільця Φ (щоб уникнути окремого розгляду скінченних зображень, нагадаємо, що деякі з множин A_k, B_k можуть бути порожніми). Тоді перетин множин A і B також записується як зліченне диз'юнктне об'єднання елементів півкільця Φ: $A \cap B = \coprod\limits_{k,j=1}^{\infty} (A_k \cap B_j) \in \Phi_1$.

Далі, нехай

$$A_n = \coprod_{k=1}^{\infty} A_{n,k} \in \Phi_1,$$

записані як відповідні диз'юнктні об'єднання, є диз'юнктними. Тоді

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \coprod_{n,k=1}^{\infty} A_{n,k} \in \Phi_1. \qquad \square$$

Твердження 2. *Для будь-якої множини $A \subset \Omega$*

$$\mu^*(A) = \inf \{\mu(B) : \ B \in \Phi_1 \ \ B \supset A\}.$$

Доведення. Кожний елемент алгебри $\mathcal{A}$ як скінченне диз'юнктне об'єднання елементів півкільця Φ — це елемент сім'ї Φ_1. Отже, і зліченне диз'юнктне об'єднання елементів алгебри $\mathcal{A}$ лежить в Φ_1. Залишається скористатись властивістю 4 зовнішньої міри (п. 2.2.2), із заміною $\coprod\limits_{k=1}^{\infty} B_k$ на B. $\square$

Твердження 3. *Для будь-якої множини $A \subset \Omega$ існує така множина $B \in \Phi_2$, що $A \subset B$ і $\mu^*(A) = \mu(B)$.*

Доведення. За попереднім твердженням для будь-якого натурального n існує $B_n \in \Phi_1$, $B_n \supset A$ з $\mu(B_n) < \mu^*(A) + 1/n$. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що B_n утворюють спадний ланцюжок множин (інакше замінимо B_n на $B'_n = \bigcap_{k=1}^{n} B_k$).

Перетин цього спадного ланцюжка і буде потрібною множиною. $\square$

Означення. Нехай (Ω, Σ, μ) — простір з мірою. Сім'я $\mathcal{M} \subset \Sigma$ називається *монотонним класом* множин, якщо вона задовольняє такі аксіоми:

A. Якщо $A, B \in \mathcal{M}$, $A \cap B = \varnothing$, то $A \cup B \in \mathcal{M}$.

B. Якщо $A, B \in \mathcal{M}$, $A \subset B$, то $B \backslash A \in \mathcal{M}$.

C. Якщо $A, B \in \mathcal{M}$, $A \subset B$ і $\mu(B) = 0$, то $A \in \mathcal{M}$.

D. Якщо $A_n \in \mathcal{M}$, $n = 1, 2, \ldots$, — зростаючий ланцюжок множин, то $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$.

Зазначимо, що з аксіоми A випливає, що монотонний клас стійкий щодо операції об'єднання скінченного числа попарно неперетинних множин. Звідси, застосувавши D, виводимо, що монотонний клас стійкий щодо об'єднання зліченного диз'юнктного набору множин.

Теорема (теорема про монотонний клас множин). *Нехай (Ω, Σ, μ) — простір з мірою, одержаний, як описано в розділі 2.2, продовженням міри μ з деякого півкільця з одиницею $\Phi \subset \Sigma$. Нехай, далі, $\mathcal{M} \subset \Sigma$ — монотонний клас множин, який містить всі елементи півкільця Φ. Тоді $\mathcal{M} = \Sigma$.*

Доведення. Оскільки $\Omega \in \mathcal{M} \subset \Sigma$, то за аксіомою B монотонного класу разом з кожним своїм елементом A клас $\mathcal{M}$ містить і доповнення $\Omega \backslash A$. Перейшовши в аксіомі D до доповнень, отримуємо стійкість класу $\mathcal{M}$ щодо операції перетину спадної послідовності множин.

Введені на початку параграфа сім'ї Φ_1 і Φ_2 лежать в $\mathcal{M}$. Згідно із твердженням 3, для будь-якої множини $A \in \Sigma$ міри 0 існує така множина $B \in \Phi_2 \subset \mathcal{M}$, що $A \subset B$ і $\mu(B) = 0$. Отже, за аксіомою C, будь-яка множина A міри 0 — це елемент класу $\mathcal{M}$. Нарешті, розглянемо довільну $A \in \Sigma$. Знову скористаємось твердженням 3 і виберемо таке $B \in \mathcal{M}$, що $A \subset B$ і $\mu(A) = \mu(B)$. Тоді $C = B \backslash A$ — це множина міри 0; отже, $C \in \mathcal{M}$. Залишилось застосувати аксіому B і отримати, що $A = B \backslash C \in \mathcal{M}$. $\square$

Вправи

1. Клас Φ_1 — це сім'я всіх множин, зображуваних у вигляді об'єднання скінченного або зліченного (не обов'язково диз'юнктного) набору елементів алгебри $\mathcal{A}$.

2. Клас Φ_1 — це сім'я всіх множин, зображуваних у вигляді об'єднання скінченного або зліченного (не обов'язково диз'юнктного) набору елементів півкільця Φ.

3. Клас множин Φ_1 стійкий щодо операції об'єднання скінченного або зліченного числа множин (які, можливо, перетинаються).

4. Клас множин Φ_2 стійкий щодо операції перетину скінченного або зліченного числа множин.

5. Обґрунтуйте включення $\Phi_2 \subset \mathcal{M}$ в доведенні останньої теореми.

6. Де при завершенні доведення теореми використовувалась умова $A \in \Sigma$ (тобто вимірність)? Чи не можна у такий спосіб довести, що будь-яка підмножина $A \subset \Omega$ належить до $\mathcal{M}$?

7. На відрізку $[0, 1]$ розглянемо півкільце (точніше, навіть алгебру) Φ множин, яка складається зі скінченних множин і їхніх доповнень. Доведіть, що клас Φ_1 у цьому випадку не буде алгеброю множин.

8. В умовах попередньої вправи опишіть клас Φ_2. Доведіть, що в цьому випадку Φ_2 буде σ-алгеброю множин.

9. Нехай Ω — множина, що складається з чотирьох точок, $\Sigma = 2^\Omega$, міра множини означається як кількість елементів цієї множини («лічильна міра»). Доведіть, що сім'я $\mathcal{M}$ усіх підмножин, які складаються з парної кількості елементів, — це монотонний клас, який не збігається з Σ. Чи не суперечить цей приклад останній теоремі?

10. Доведіть такий варіант теореми про монотонний клас множин: нехай (Ω, Σ, μ) — простір з мірою, $\Phi \subset \Sigma$ — півкільце з одиницею, що породжує σ-алгебру Σ. Нехай, далі, $\mathcal{M} \subset 2^\Omega$ — монотонний клас множин, який містить всі елементи півкільця Φ. Тоді $\mathcal{M} \supset \Sigma$.

2.3. Міри на відрізку і на осі

2.3.1. Міра Лебега на відрізку

Як уже згадано, довжина — це міра на сім'ї відрізків. У цьому параграфі ми застосуємо загальну теорії продовження міри до цього історично першого і базового для всієї теорії міри прикладу.

Нехай $\Omega = (\omega_1, \omega_2)$ — це відкритий невироджений відрізок скінченної довжини. *Підвідрізком* відрізка Ω називатимемо будь-який відкритий, замкнений або напіввідкритий відрізок, який лежить в Ω, тобто будь-яку підмножину вигляду $[a, b]$, $[a, b)$, (a, b) або $(a, b]$, що міститься в Ω. Зокрема, порожня множина, так само, як і всі одноточкові множини, — це підвідрізки.

Сім'я всіх підвідрізків відрізка Ω утворює півкільце множин, яке ми позначаємо літерою Φ. Для будь-якого підвідрізка $\Delta \in \Phi$ через $\lambda(\Delta)$ позначимо його довжину. Тобто $\lambda(\Delta) = b - a$, де a і b — відповідно лівий і правий кінці відрізка Δ.

Теорема 1. *λ — це зліченно-адитивна міра на півкільці Φ.*

Доведення. Згідно з критерієм зліченної адитивності (теорема 4 п. 2.2.1), нам потрібно перевірити скінченну адитивність і зліченну напівадитивність міри λ.

Скінченна адитивність. Нехай Δ_k, $k = 1, 2, ..., n$ — неперетинні підвідрізки, виписані в порядку зростання лівих кінців, a_k, b_k — кінці відповідних Δ_k і нехай $\bigcup_{k=1}^n \Delta_k = \Delta \in \Phi$. Тоді a_1 і b_n збігаються з кінцями відрізка Δ і $a_{k+1} = b_k$, $k = 1, 2, ..., n-1$. Маємо

$$\sum_{k=1}^n \lambda(\Delta_k) = \sum_{k=1}^n (b_k - a_k) = b_n - a_1 = \lambda(\Delta).$$

Зліченна напівадитивність. Нехай $\Delta \subset \bigcup_{k=1}^\infty \Delta_k$; $\Delta_k, \Delta \in \Phi$, a і b — кінці відрізка Δ, а a_k, b_k — кінці відповідних Δ_k. Задамо довільне $\varepsilon > 0$ і, трохи відступивши від кінців вихідних відрізків, введемо допоміжні відрізки $\Delta' \subset \Delta$ і $\Delta'_k \supset \Delta_k$ так, щоб Δ' був замкненим, а Δ'_k були відкритими підмножинами відрізка Ω, і

$$\lambda(\Delta) - \lambda(\Delta') + \sum_{k=1}^\infty (\lambda(\Delta'_k) - \lambda(\Delta_k)) < \varepsilon, \tag{1}$$

тобто, щоб кінці були зсунуті не дуже сильно. Для нових відрізків як і раніше правильне включення $\Delta' \subset \bigcup_{k=1}^\infty \Delta'_k$, але тепер воно несе інше змістовне навантаження: добре відоме нам відкрите покриття компакту! Виберемо скінченне підпокриття, тобто візьмемо таку скінченну множину індексів $N \subset \mathbb{N}$, що $\Delta' \subset \bigcup_{k \in N} \Delta'_k$. З огляду на скінченну адитивність

$$\lambda(\Delta') \leqslant \sum_{k \in N} \lambda(\Delta'_k) \leqslant \sum_{k=1}^\infty \lambda(\Delta'_k).$$

Скориставшись умовою (1), отримаємо, що $\lambda(\Delta) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(\Delta_k) + \varepsilon$. З огляду на довільність ε, зліченну напівадитивність доведено. □

Застосувавши до міри λ схему продовження мір, викладену в підрозділі 2.2, ми одержимо таку зліченно-адитивну міру (позначатимемо її теж літерою λ), задану на σ-алгебрі $\Sigma \supset \Phi$, що $\lambda((a,b)) = b - a$ для будь-якого відрізка (a,b). Елементи σ-алгебри Σ називаються множинами, *вимірними за Лебегом*, а побудована міра λ на Σ називається *мірою Лебега.*

Поки означення міри Лебега подано в дещо зашифрованому вигляді з посиланням на загальну схему продовження мір. Нижче подані зауваження мають на меті розписати це означення детальніше.

Зауваження

1. Нехай $A = \coprod_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k) \subset \Omega$ (нагадаємо, що це — загальний вигляд відкритої підмножини відрізка Ω). Тоді A вимірна за Лебегом, і $\lambda(A) = \sum_{k=1}^{\infty} |b_k - a_k|$.

2. Множина, що складається з однієї точки, вимірна і має нульову міру Лебега. Отже, міра Лебега будь-якої скінченної або зліченної множини також дорівнює нулю.

3. Зовнішню міру будь-якої множини $A \subset \Omega$ можна обчислити за правилом $\lambda^*(A) = \inf\left\{\sum\limits_{k=1}^{\infty} |b_k - a_k| : \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} [a_k, b_k] \supset A\right\}$.

4. Якщо $\bigcup_{k=1}^{\infty} [a_k, b_k] \supset A$, то кожний відрізок $[a_k, b_k]$ можна замінити дещо більшим відкритим відрізком так, щоб сума довжин змінилася як завгодно мало. Тобто у наведеній вище формулі можуть так само використовуватись замість замкнених — відкриті відрізки:

$$\lambda^*(A) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} |c_k - d_k| : \bigcup_{k=1}^{\infty} (c_k, d_k) \supset A\right\} =$$
$$= \inf\{\lambda(B) : B \text{ — відкрита множина, } B \supset A\} =$$
$$= \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} |b_k - a_k| : \coprod_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k) \supset A\right\}. \tag{2}$$

5. За означенням, підмножина A відрізка Ω *вимірна за Лебегом*, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує така множина B, яка має вигляд скінченного об'єднання відрізків, що $\lambda^*(A \triangle B) < \varepsilon$.

6. Для будь-якої вимірної за Лебегом множини A, за означенням продовження міри, $\lambda(A) = \lambda^*(A)$.

7. Зовнішня міра і, відтак, міра Лебега множини A не залежать від відрізка $\Omega \supset A$, з якого починалась побудова. Тому надалі ми можемо не уточнювати, на якому саме відрізку розглядаються всі множини.

8. Міра Лебега множини зберігається при паралельному перенесенні множини.

9. Якщо $\lambda^*(A) = 0$, то A вимірна за Лебегом, і $\lambda(A) = 0$ (приклад на початку п. 2.2.3). Такі множини називають *нехтуваними*, або *множинами міри нуль.*

10. Оскільки будь-яка відкрита множина на відрізку вимірна за Лебегом, то і будь-яка борелева підмножина відрізка вимірна за Лебегом (Σ — це σ-алгебра, що містить всі відкриті множини, а $\mathfrak{B}$, за означенням, — **найменша** σ-алгебра, яка містить усі відкриті множини). Зокрема, всі замкнені множини, множини класів G_δ, F_σ і т. д. вимірні за Лебегом.

Теорема 2. *Множина $A \subset \Omega$ вимірна за Лебегом тоді і тільки тоді, коли вона зображується у вигляді різниці $B \setminus C$ множини B класу G_δ і множини $C \subset B$ з $\lambda^*(C) = 0$.*

Доведення. Оскільки множини класу G_δ, так само як і нехтувані множини, вимірні, різниці таких множин також вимірні. Тому доведення потребує тільки обернене твердження. Отже, нехай підмножина $A \subset \Omega$ вимірна за Лебегом. За означенням, $\lambda(A) = \lambda^*(A)$. За формулою (2) для зовнішньої міри, для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ існує відкрита множина $B_n \supset A$ з $\lambda(B_n) < \lambda(A) + 1/n$. Покладемо $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$. Множина B, як і потрібно, належить до класу G_δ і містить множину A. Далі, для будь-якого $n \in \mathbb{N}$,

$$\lambda(A) \leqslant \lambda(B) \leqslant \lambda(B_n) < \lambda(A) + 1/n.$$

Отже, $\lambda(A) = \lambda(B)$. Залишається покласти $C = B \backslash A$. □

Переходом до доповнень отримуємо:

Наслідок. *Множина $A \subset \Omega$ вимірна за Лебегом тоді і тільки тоді, коли вона зображується у вигляді диз'юнктного об'єднання множини класу F_σ і нехтуваної множини.*

Оскільки борелеві множини на відрізку вимірні за Лебегом, до них також можна застосовувати попередню теорему та наслідок з неї. Одержуємо, що, хоча борелеві підмножини відрізка і не вичерпуються множинами класів F_σ і G_δ, вони мало відрізняються від множин цих класів. Більше того, самі множини класів F_σ і G_δ можуть бути отримані одна з одної додаванням або відніманням нехтуваних множин.

Зазначені зображення вимірних множин через борелеві класи і нехтувані множини дають корисну інформацію про будову міри Лебега і множин, вимірних за Лебегом. Проте не варто покладатися на видиму простоту одержаної картини: нехтуваними множинами можна нехтувати з точки зору міри, але в багатьох інших значеннях вони можуть бути влаштовані досить непросто.

Приклад. Множина нульової міри, яка має потужність континуума. Нагадаємо, що канторова множина — це замкнена підмножина $\mathcal{K}$ відрізка $[0, 1]$, яка складається з чисел, розвинення яких у трійковий дріб або взагалі не містять цифри 1, або містять її тільки як останню цифру розвинення. Побудувати канторову множину можна за допомогою такого способу поетапного викидання з відрізка $[0, 1]$ зайвих частин. На першому кроці викидається множина $\Delta_1^1 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Позначимо $K_1 = [0, 1] \backslash \Delta_1^1$. Множина K_1 складається з двох відрізків довжини $1/3$. На кожному з цих відрізків відступимо від кінців на одну третину їх довжини і викинемо підвідрізки, які утворилися в середині $\Delta_1^2 = (\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ і $\Delta_2^2 = (\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$. Позначимо $K_2 = K_1 \backslash (\Delta_1^2 \cup \Delta_2^2)$. На n-му кроці множина K_n буде складатися з 2^n відрізків довжини $1/3^n$, і для отримання K_{n+1} з середини кожної такої складової видаляється його третина. Канторова множина збігається з $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$. Міра множини K_n — це сума мір відрізків, які її утворюють, тобто $\lambda(K_n) = 2^n/3^n$, що прямує до нуля при $n \to \infty$. Оскільки $\lambda(\mathcal{K}) \leqslant \lambda(K_n)$ при всіх n, то $\lambda(\mathcal{K}) = 0$.

Континуальність канторової множини можна доводити по-різному. Ось один із найпростіших способів. $\mathcal{K}$ — підмножина відрізка, отже, $\operatorname{card} \mathcal{K}$ не перевищує потужності континуума. Для доведення оберненої нерівності побудуємо ін'єктивне відображення множини континуальної потужності в $\mathcal{K}$. Кожному двійковому дробу $x \in (0, 1)$ поставимо у відповідність трійковий дріб $f(x)$, залишивши нулі дробу x без змін, а одиниці замінивши на двійки. Функція f і буде потрібним ін'єктивним відображенням. Іншим доведенням континуальності K є вправа 12 п. 1.3.3.

Вправи

1. Обчисліть міри Лебега таких множин:

A. $[1, 3] \cup [5, 6]$;

B. $(2,4)\setminus([1,3]\cup[5,6])$;

C. $((2,4)\setminus[1,3])\cup[5,6]$;

D. $[1,4]\triangle[2,6]$;

E. $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2^n},\frac{1}{2^{n+1}}\right]$;

F. $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n},\frac{1}{2n}\right]$;

G. Множини раціональних чисел на відрізку $[0,1]$;

H. Множини ірраціональних чисел на відрізку $[0,1]$.

2. Нехай $A\subset[0,1]$ і доповнення до A має нульову міру. Тоді A щільна в $[0,1]$.

3. Для будь-якого $A\subset[0,1]$ розглянемо на відрізку функцію $f(x)=\lambda^*(A\cap[0,x])$. Доведіть неперервність функції f.

4. Побудуйте на відрізку $[0,1]$ ніде не щільну множину, яка має додатну міру Лебега.

5. Побудуйте множину другої категорії на відрізку, яка має нульову міру.

6. Міра Лебега атомарна чи безатомна?

Доведіть, що:

7. Якщо вимірна множина має ненульову міру Лебега, то її потужність дорівнює потужності континуума.

8. Потужність сім'ї нехтуваних множин на відрізку дорівнює потужності сім'ї всіх підмножин відрізка. Отже (див. вправу 23 п. 2.1.2), існують не борелеві нехтувані множини.

9. Кожна нехтувана множина міститься в нехтуваній множині класу G_δ.

Внутрішньою мірою множини $A\subset\Omega$ називається величина

$$\lambda_*(A)=\sup\{\lambda(B): B\subset A \text{ і } B \text{ замкнена}\}.$$

Доведіть, що:

10. $\lambda_*\leqslant\lambda^*$.

11. Множина $A\subset\Omega$ вимірна за Лебегом тоді і тільки тоді, коли $\lambda_*(A)=\lambda^*(A)$.

2.3.2. Ще трохи термінології. Зміст терміна «майже скрізь»

Нехай (Ω,Σ,μ) — простір з мірою. Елементи σ-алгебри Σ називатимемо вимірними множинами. Якщо ж на Ω розглядаються одночасно декілька σ-алгебр, і потрібно уточнити, про яку саме σ-алгебру йде мова, то елементи σ-алгебри Σ називатимемо Σ-вимірними множинами. Скажімо, на відрізку поряд із вимірними за Лебегом множинами є ще σ-алгебра борелевих множин. Відповідно до введеної термінології, борелеві множини можна називати ще $\mathfrak{B}$-вимірними або вимірними за Борелем.

Нагадаємо, що множина $A\subset\Omega$ називається нехтуваною (див. п. 2.1.5), якщо A міститься у вимірній множині нульової міри. Якщо (Ω,Σ,μ) — повний простір з мірою (як, наприклад, відрізок з мірою Лебега), то означення спрощується: терміни «нехтувана множина» і «множина міри 0» стають синонімами. Множина називається *множиною повної міри*, якщо її доповнення нехтуване.

Твердження P, що стосується точок множини Ω, називається виконаним *для майже всіх* $t\in\Omega$ або виконаним *майже скрізь*, якщо множина тих t, де твердження P не виконується, нехтувана. Наприклад, функція $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ дорівнює нулю майже скрізь (скорочений запис — $f \overset{\text{м.с.}}{=} 0$), якщо множина тих t, де $f(t) \neq 0$, нехтувана. $f \overset{\text{м.с.}}{\geqslant} g$, якщо множина тих t, де $f(t) < g(t)$, нехтувана, і т. д. Міркування й оцінки, які проводяться майже скрізь, істотно зручніші від звичайних поточкових міркувань. Так, на відрізку (а відрізок за замовчуванням ми вважаємо наділеним мірою Лебега), якщо у функції скінченне або зліченне число точок розриву, то в цих точках ми часто можемо не означати функцію або означати у найзручніший для нас спосіб, бо для майже всіх значень аргументу це ніяк не відіб'ється на властивостях функції.

Зазначимо дві важливі властивості, які випливають безпосередньо з властивостей нехтуваних множин (п. 2.1.5).

— Нехай твердження P_1 спричиняє твердження P_2, тобто $P_1 \Rightarrow P_2$, і P_1 виконується майже скрізь. Тоді і P_2 виконується майже скрізь.

— Нехай P_j, $j \in M$ — скінченний або зліченний набір тверджень, а P — твердження, яке полягає в одночасному виконанні всіх тверджень P_j. Тоді, якщо всі P_j виконані майже скрізь, то твердження P виконується майже скрізь.

Вправи

1. Доведіть два останні твердження.

2. Розпишіть, у чому полягає заперечення твердження $f \overset{\text{м.с.}}{\geqslant} g$. Чи буде це заперечення збігатися із твердженням $f \overset{\text{м.с.}}{<} g$?

3. Чи можуть одночасно виконуватись твердження $f \overset{\text{м.с.}}{\geqslant} g$ і $f \overset{\text{м.с.}}{<} g$?

4. Якщо $f \overset{\text{м.с.}}{\geqslant} g$ і $g \overset{\text{м.с.}}{\geqslant} h$, то $f \overset{\text{м.с.}}{\geqslant} h$.

5. Якщо $f \overset{\text{м.с.}}{\geqslant} g$ і $f \overset{\text{м.с.}}{\leqslant} g$, то $f \overset{\text{м.с.}}{=} g$.

6. Нехай дві неперервні функції на відрізку збігаються майже скрізь за мірою Лебега. Тоді ці функції збігаються в усіх точках.

7. Чи залишиться правильним попереднє твердження при заміні міри Лебега на довільну зліченно-адитивну міру, задану на борелевих підмножинах відрізка?

2.3.3. Теорема Лебега про диференційовність монотонної функції

Для доведення теорем існування часто використовується така ідея: замість того, щоб конструювати потрібний об'єкт явно, доводять, що таких об'єктів у тому чи іншому сенсі «багато». А якщо їх багато, то вони, вочевидь, існують. Так, найпростіше доведення існування трансцендентних чисел одержується з міркувань потужності: алгебраїчних чисел є зліченна кількість, отже, трансцендентні не просто існують, а складають «основну частину» всіх чисел. У вправі 15 п. 2.1.2 показано, як у такий самий спосіб для доведення теорем існування (в цьому випадку — для доведення існування точок неперервності у поточкової границі послідовності неперервних функцій) можна використовувати множини першої та другої категорій. У кожному такому міркуванні головне — це правильно вибрати, яке поняття «малості» використовувати. У цьому параграфі першим неочевидним застосуванням теорії міри стане доведення існування точок диференційовності у будь-якої монотонної функції. Точніше, доведено таке загальніше твердження.

Теорема. *Кожна монотонна на відрізку функція диференційовна майже скрізь, тобто множина точок, де функція не диференційовна, — це множина лебегової міри 0.*

Щоб читач міг гідно оцінити глибину і витонченість цього результату, ми наполегливо радимо відкласти на деякий час книжку і поміркувати над цим твердженням хоча б кілька днів. Зізнаюся, що, хоча свого часу мене ця задача міцно «зачепила», розв'язати її самостійно мені не вдалося. Натомість потім у мене був добрий стимул для вивчення теорії міри, і викладачеві не потрібно було мене переконувати у важливості цієї науки.

Означення. Нехай g — дійсна функція, задана на відрізку $\Omega = [\omega_1, \omega_2]$. Внутрішня точка x відрізка Ω називається *невидимою справа для функції* g, якщо існує таке $t > x$, $t \in \Omega$, що $g(x) < g(t)$.

Лема 1 (лема Ф. Ріса про світлотінь). *Нехай g — напівнеперервна зверху функція на Ω. Тоді множина A всіх точок, невидимих справа для функції g, відкрита. Більше того, якщо A записати канонічним способом як диз'юнктне об'єднання підвідрізків $\Delta_k = (a_k, b_k)$, то $g(a_k + 0) \leqslant g(b_k)$. (Під $g(a_k + 0)$ розуміємо верхню границю функції $g(t)$ при $t \to a_k + 0$.)*

Доведення. Якщо x_0 — точка, невидима справа, $t_0 > x_0$ і $g(x_0) < g(t_0)$, то з напівнеперервності у точці x_0 є цілий окіл, де $g(x) < g(t_0)$. Увесь цей окіл буде складатись із точок, невидимих справа. Отже, A — відкрита множина. Нехай тепер $\Delta = (a, b)$ — один із відрізків, який є компонентою A, тобто $(a, b) \subset A$, $a, b \notin A$. Припустимо, що твердження неправильне. Тоді існує точка $x_0 \in \Delta$, для якої $g(x_0) > g(b)$. Розглянемо множину D тих $x \in [x_0, b)$, для яких $g(x) \geqslant g(x_0)$. D — це непорожня замкнена обмежена множина. Нехай x_1 — крайня права точка множини D. Оскільки x_1 невидима справа, в Ω знайдеться точка $t_0 > x_1$ з $g(t_0) > g(x_1)$. Зрозуміло, що t_0 не може лежати праворуч від точки b, інакше b була б також невидимою справа:

$$g(t_0) > g(x_1) \geqslant g(x_0) > g(b).$$

Отже, $t_0 \in (x_1, b)$. Але тоді $t_0 \in D$, тобто x_1 — це не крайня права точка множини D. Суперечність. □

Зазначимо, що за симетрією аналогічне твердження правильне для точок, невидимих зліва (точка x невидима зліва, якщо існує $t < x$, $t \in \Omega$, для якого $g(x) < g(t)$), тільки в кінцях інтервалів, що утворюють множину точок, невидимих зліва, буде правильною протилежна нерівність $g(a_k) \geqslant g(b_k - 0)$.

Лема 2 (критерій нехтування). *Нехай множина $A \subset \Omega$ має таку властивість: існує таке $\theta \in (0, 1)$, що $\lambda^* (A \cap (a, b)) \leqslant \theta(b - a)$ для будь-якого підвідрізка $(a, b) \subset \Omega$. Тоді A нехтувана.*

Доведення. Нехай $B = \coprod_{k \in M} \Delta_k$ — довільна відкрита множина, яка містить A, Δ_k — відкриті підвідрізки, з яких складається ця множина (скінченна або зліченна кількість). Згідно з умовою,

$$\lambda^* (A) = \sum_{k \in M} \lambda^* (A \cap \Delta_k) \leqslant \theta \sum_{k \in M} \lambda (\Delta_k) = \theta \lambda(B).$$

Переходячи до інфімума по всіх таких B, одержуємо нерівність $\lambda^* (A) \leqslant \theta \lambda^* (A)$, яка може виконуватись тільки при $\lambda^*(A) = 0$. □

Перед початком доведення основної теореми ще кілька вступних зауважень. Термін «зростаюча функція» використовуватимемо в тому ж значенні, що й «неспадна функція», тобто не вимагатимемо строгого зростання. Теорему достатньо довести для зростаючих функцій: спадні одержуються множенням на мінус одиницю. Нехай $\Omega = [\omega_1, \omega_2]$, $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ — зростаюча функція. Для будь-якої внутрішньої точки x відрізка Ω означимо чотири величини, скінченні або $+\infty$:

— праве верхнє похідне число $R(x) = \overline{\lim\limits_{t\to x+0}} \dfrac{f(t)-f(x)}{t-x}$;

— праве нижнє похідне число $r(x) = \underline{\lim\limits_{t\to x+0}} \dfrac{f(t)-f(x)}{t-x}$;

— ліве верхнє похідне число $L(x) = \overline{\lim\limits_{t\to x-0}} \dfrac{f(x)-f(t)}{x-t}$;

— ліве нижнє похідне число $l(x) = \underline{\lim\limits_{t\to x-0}} \dfrac{f(x)-f(t)}{x-t}$.

Для доведення теореми треба показати, що всі перелічені похідні числа майже скрізь дорівнюють одне одному і скінченні. Для цього достатньо довести, що для будь-якої зростаючої функції f на відрізку правильні співвідношення:

$$R(x) \overset{\text{м.с.}}{<} \infty; \tag{1}$$

$$R(x) \overset{\text{м.с.}}{\leqslant} l(x). \tag{2}$$

Справді, застосувавши (2) до допоміжної функції $g(x) = -f(-x)$ і повернувшись до початкової функції, отримуємо умову $L(x) \overset{\text{м.с.}}{\leqslant} r(x)$. Зіставивши ці умови з очевидними нерівностями $r(x) \overset{\text{м.с.}}{\leqslant} R(x)$ і $l(x) \overset{\text{м.с.}}{\leqslant} L(x)$, одержуємо, що

$$R(x) \overset{\text{м.с.}}{\leqslant} l(x) \overset{\text{м.с.}}{\leqslant} L(x) \overset{\text{м.с.}}{\leqslant} r(x) \overset{\text{м.с.}}{\leqslant} R(x),$$

тобто всі нерівності в цьому ланцюжку насправді є м.с.-рівностями.

Доведення теореми Лебега. Нехай $f\colon [\omega_1, \omega_2] \to \mathbb{R}$ — зростаюча функція. Оскільки у монотонної функції розриви лише першого роду, ми для зручності можемо вважати функцію напівнеперервною зверху. Для цього достатньо переозначити функцію в точках розриву, поклавши $f(t) = \overline{\lim\limits_{x\to t}} f(x)$. Перевірте самі, що при такому переозначенні множина точок диференційовності не зміниться, а похідні числа зміняться не більш ніж в зліченній кількості точок (в точках розриву f), тобто майже скрізь залишаться тими самими.

Для будь-якого $C > 0$ розглянемо множину

$$R_{>C} = \{x \in (\omega_1, \omega_2) : R(x) > C\}.$$

Співвідношення $R(x) \overset{\text{м.с.}}{<} \infty$ буде доведене, якщо показати, що зовнішня міра множини R_∞ тих точок інтервала (ω_1, ω_2), де $R(x) = \infty$, дорівнює нулеві. Оскільки $R_\infty \subset R_{>C}$, достатньо встановити, що $\lambda^*(R_{>C}) \to 0$ при $C \to \infty$.

Нехай $x \in R_{>C}$. Тоді існує точка $t > x$, для якої $\frac{f(t)-f(x)}{t-x} > C$, або $f(t) - Ct > f(x) - Cx$. Отже, множина $R_{>C}$ складається з точок, невидимих справа для функції $g(x) = f(x) - Cx$. За лемою про світлотінь $R_{>C}$ міститься у відкритій множині $B = \coprod_{k\in M} (a_k, b_k)$ з $g(a_k + 0) \leqslant g(b_k)$. Тобто,

$$b_k - a_k \leqslant \frac{1}{C}(f(b_k) - f(a_k + 0)) \leqslant \frac{1}{C}(f(b_k) - f(a_k)).$$

Проміжки $(f(a_k), f(b_k))$ — це інтервали відрізка $(f(\omega_1), f(\omega_2 - 0))$, які попарно не перетинаються. Отже,

$$\lambda^*(R_{>C}) \leqslant \sum_{k\in M}(b_k - a_k) \leqslant \frac{1}{C}\sum_{k\in M}(f(b_k) - f(a_k)) \leqslant \frac{1}{C}(f(\omega_2 - 0) - f(\omega_1)). \tag{3}$$

Останній вираз прямує до 0 при $C \to \infty$.

Перейдемо до доведення співвідношення $R(x) \overset{\text{м.с.}}{\leqslant} l(x)$. Позначимо через D множину тих $x \in (\omega_1, \omega_2)$, де $R(x) > l(x)$. Далі, для будь-якої пари раціональних чисел (C, c) з $0 < c < C$ через $D(C, c)$ позначимо множину тих $x \in (\omega_1, \omega_2)$, для яких $l(x) < c$ і $R(x) > C$. Оскільки пар раціональних чисел — злічення кількість, то й виділених множин $D(C, c)$ — злічення кількість. Множина D — це об'єднання вказаних множин $D(C, c)$. Для доведення того факту, що множина D нехтувана, достатньо перевірити, що всі $D(C, c)$ мають нульову міру. При цій перевірці ми спиратимося на критерій нехтування, доведений у лемі 2, з $\theta = \frac{c}{C}$.

Отже, нехай $(a, b) \subset \Omega$ — довільний інтервал, $x \in D(C, c) \cap (a, b)$. Оскільки $l(x) < c$, існує $t \in (a, x)$, для якого $\frac{f(x)-f(t)}{x-t} < c$. Тоді $f(x) - cx < f(t) - ct$, тобто x — точка, невидима зліва для функції $g(y) = f(y) - cy$ на відрізку (a, b). Застосувавши ще раз лему про світлотінь, отримуємо, що множина $D(C, c) \cap (a, b)$ міститься у скінченному або зліченному диз'юнктному об'єднанні відрізків $(\alpha_k, \beta_k) \subset (a, b)$, $k \in N$, і на кінцях цих відрізків правильна нерівність $f(\beta_k - 0) - f(\alpha_k) \leqslant c(\beta_k - \alpha_k)$.

Нерівність (3) доведено для зростаючої функції на будь-якому відрізку. Згадаємо, що $D(C, c) \subset R_{>C}$, і застосувавши умову (3) до функції f на відрізку (α_k, β_k) :

$$\lambda^*\left(D(C, c) \cap (\alpha_k, \beta_k)\right) \leqslant \lambda^*\left(R_{>C} \cap (\alpha_k, \beta_k)\right) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{C}\left(f(\beta_k - 0) - f(\alpha_k)\right) \leqslant \frac{c}{C}(\beta_k - \alpha_k).$$

Залишається скористатись тим, що за побудовою

$$D(C, c) \cap (a, b) = \bigcup_{k\in N}\left(D(C, c) \cap (\alpha_k, \beta_k)\right),$$

а за зліченною напівадитивністю зовнішньої міри:

$$\lambda^*\left(D(C, c) \cap (a, b)\right) \leqslant \sum_{k\in N}\lambda^*\left(D(C, c) \cap (\alpha_k, \beta_k)\right) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{c}{C}\sum_{k\in N}(\alpha_k - \beta_k) \leqslant \frac{c}{C}(b - a).$$

Ми потрапили в умови критерію нехтування, отож $\lambda^*\left(D(C, c)\right) = 0$. □

Вправи

1. Наведіть приклад неперервної монотонної функції зі щільною множиною точок недиференційовності.

2. Доведіть вимірність за Борелем усіх множин, які наявні в доведенні теореми про диференційовність монотонної функції (множини $R_{>C}$, множини D тих $x \in (\alpha, \beta)$, де $R(x) > l(x)$, і т. д.)

3. Доведіть **теорему Фубіні про диференційовність ряду**: *якщо ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ *зростаючих функцій на відрізку збігається в кожній точці до функції* f, *то ряд з похідних* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ *збігається майже скрізь до* f'.

4. Нехай A — вимірна за Лебегом підмножина відрізка $[a,b]$. *Щільністю множини A в точці $x \in [a,b]$* називається границя (якщо вона існує) при $\alpha, \beta \to +0$ виразу $\frac{\lambda([x-\alpha,x+\beta]\cap A)}{\alpha+\beta}$. Доведіть, що для майже всіх точок множини A щільність існує і дорівнює 1. (**Теорема Лебега про точки щільності.**)

2.3.4. Тонка задача теорії міри. Існування невимірних за Лебегом множин

Тонка задача теорії міри полягає в побудові σ-адитивної міри μ з $\mu([0,1]) = 1$, визначеної на сім'ї всіх підмножин відрізка $[0,1]$ та інваріантної щодо зсувів: якщо як множина A, так і її зсув $A+t$ лежать на відрізку, то $\mu(A) = \mu(A+t)$. У цьому підрозділі буде доведено нерозв'язність цієї задачі, тобто, що не існує міри з такими властивостями. Конструкція, яку ми наводимо, належить Віталі (G. Vitali).

Міркування будуть природними. Припустимо існування такої міри μ, вивчимо її властивості і прийдемо в результаті до протиріччя. Спочатку зазначимо, що міра будь-якої одноточкової множини дорівнює 0. Справді, точки отримуються одна з одної зсувами, отже, їх міри однакові і дорівнюють деякому числу α. Якщо б α було строго більшим за нуль, то міра всього відрізка була б нескінченною, адже на відрізку нескінченно багато точок. Отже, $\alpha = 0$. Тому ми можемо ототожнити точки 0 і 1: на мірах множин це не відіб'ється. Отож відрізок можна уявляти собі згорнутим у коло. Введемо на відрізку операцію $+_1$ суми за модулем 1: $a +_1 b$ дорівнює дробовій частині числа $a+b$. На колі цій операції відповідає поворот точки $2\pi a$ проти годинникової стрілки на кут $2\pi b$. Якщо $A \subset [0,1]$, $t \in [0,1]$, то замість звичайного зсуву $A+t$ зручніше розглядати зсув $A +_1 t$, який відповідає повороту на колі, оскільки тут не потрібно стежити, чи не випала частина множини за межі відрізка. Вочевидь, $\mu(A) = \mu(A +_1 t)$, оскільки $A +_1 t = (A \cap [0, 1-t) + t) \coprod (A \cap [1-t, 1] + t - 1)$, тобто множина A розбивається на дві частини, одна з яких переноситься ліворуч, а інша праворуч по відрізку $[0,1]$.

Введемо на $[0,1]$ таке відношення еквівалентності: $a \sim b$, якщо $a - b \in \mathbb{Q}$ (через $\mathbb{Q}$, як звичайно, позначається множина раціональних чисел). У кожному класі еквівалентності виберемо по одному елементу. Одержану множину вибраних елементів позначимо літерою E. Зазначимо, що всі множини $E +_1 t$, $t \in \mathbb{Q} \cap [0,1)$ попарно не перетинаються. Справді, якщо $E +_1 t$ перетинається з $E +_1 \tau$ в точці x, $t, \tau \in \mathbb{Q} \cap [0,1)$, то елементи $x -_1 t$ і $x -_1 \tau$, які лежать в одному класі еквівалентності, обидва належать до E, що неможливо за побудовою. Множин вигляду $E +_1 t$ нескінченно багато, вони отримуються одна з одної зсувами і диз'юнктні, отже, їхні міри однакові і дорівнюють нулю. Але $[0,1] = \bigcup_{t\in\mathbb{Q}\cap[0,1)} (E +_1 t)$, тому, $\mu([0,1]) = 0$. Суперечність.

Теорема. *Існують невимірні за Лебегом підмножини відрізка* $[0,1]$.

Доведення. Якщо б всі підмножини відрізка були вимірні за Лебегом, то міра Лебега була б інваріантною щодо зсувів σ-адитивною ймовірнісною мірою, визначеною на сім'ї всіх підмножин відрізка $[0,1]$. Ми щойно довели, що міри з такими властивостями не існує. □

Вправи

1. Знайдіть місце в доведенні нерозв'язності тонкої задачі теорії міри, де використовувалась аксіома вибору.

2. Наведіть приклад зліченно-адитивної ймовірнісної міри, визначеної на всіх підмножинах відрізка. (Зрозуміло, вона не буде інваріантною щодо зсувів.)

3. Доведіть, що відрізок $[0, 1]$ можна зобразити у вигляді об'єднання двох неперетинних множин A, B з $\lambda^*(A) = \lambda^*(B) = 1$. Покажіть, що обидві ці множини повинні бути невимірними. Цим буде дано інше доведення існування невимірних множин.

4. В умовах попередньої вправи $\lambda^*(A \cap C) = \lambda^*(B \cap C) = \lambda(C)$ для будь-якої вимірної за Лебегом множини C.

5. За умови виконання континуум гіпотези відрізок $[0, 1]$ можна зобразити у вигляді об'єднання континуального числа неперетинних множин, які мають одиничну зовнішню міру.

2.3.5. Функція розподілу і загальний вигляд борелевої міри на відрізку

Борелевою мірою на топологічному просторі X називається зліченно-адитивна міра, задана на σ-алгебрі всіх борелевих підмножин простору X. Скажімо, обмеження міри Лебега на систему борелевих підмножин відрізка $\Omega = [\omega_1, \omega_2]$ є борелевою мірою на відрізку. У цьому параграфі ми встановимо взаємно-однозначну відповідність між борелевими мірами на відрізку і зростаючими неперервними справа функціями на цьому відрізку.

Означення. Нехай μ — борелева міра на відрізку $\Omega = [\omega_1, \omega_2]$. *Функцією розподілу міри* μ називається функція $F : \Omega \to \mathbb{R}^+$, яка визначається рівністю $F(t) = \mu([\omega_1, t])$.

Теорема 1. *Функція розподілу борелевої міри на відрізку — це (нестрого) зростаюча неперервна справа функція.*

Доведення. Якщо $\omega_1 \leqslant a < b \leqslant \omega_2$, то $[\omega_1, a] \subset [\omega_1, b]$, і, відповідно,

$$F(a) = \mu([\omega_1, a]) \leqslant \mu([\omega_1, b]) = F(b).$$

Перейдемо до доведення неперервності справа. Нехай $t_n \in \Omega$ — спадна послідовність, яка прямує до t. Тоді $[\omega_1, t_n]$ — це спадна послідовність множин, і $[\omega_1, t] = \bigcap_{n=1}^{\infty} [\omega_1, t_n]$. Отже,

$$F(t) = \mu([\omega_1, t]) = \lim_{n\to\infty} \mu([\omega_1, t_n]) = \lim_{n\to\infty} F(t_n). \qquad \square$$

Теорема 2. *Нехай $F : \Omega \to \mathbb{R}^+$ — зростаюча неперервна справа функція на відрізку $\Omega = [\omega_1, \omega_2]$. Тоді існує єдина борелева міра μ на $[\alpha, \beta]$, для якої F є функцією розподілу.*

Доведення. Міркування проводимо за аналогією з побудовою міри Лебега. Нехай Φ — півкільце всіх підвідрізків відрізка Ω. Визначимо міру μ на Φ такими рівностями: $\mu([\omega_1, a]) = F(a)$, $\mu([a, b]) = F(b) - F(a - 0)$ при $a > \omega_1$ (ці дві формули об'єднуються в одну, якщо домовитись, що $F(\omega_1 - 0) = 0$); $\mu((a, b]) = F(b) - F(a)$, $\mu((a, b)) = F(b - 0) - F(a)$ і $\mu([a, b)) = F(b - 0) - F(a - 0)$.

Ці співвідношення вибрані не випадково: саме так повинні бути пов'язані борелева міра та її функція розподілу. Скінченна адитивність так побудованої міри перевіряється легко. Для перевірки зліченної напівадитивності (звідки випливатиме і зліченна адитивність) треба спочатку зауважити, що міра будь-якого підвідрізка збігається із супремумом мір замкнених підвідрізків, які містяться в ньому, і з інфімумом мір відкритих підвідрізків, які його містять. Далі потрібно використати лему про скінченне покриття у такий самий спосіб, як це робилося при доведенні теореми про зліченну напівадитивність міри Лебега на Φ (теорема 1 п. 2.3.1). Для завершення доведення залишається скористатись теоремою існування і єдиності продовження міри з півкільця з одиницею на породжену ним σ-алгебру (теорема 3 і вправи 1–3 п. 2.2.3). $\square$

Випишемо ланцюжок простих вправ, розв'язавши які, читач самостійно отримає важливу теорему про будову монотонних функцій: теорему про зображення у вигляді суми неперервної функції і функції стрибків.

Вправи

1. Відображення, яке ставить кожній борелевій мірі на відрізку у відповідність її функцію розподілу, адитивне, тобто переводить суму мір в суму відповідних функцій розподілу.

Нехай M — скінченна або злічення підмножина відрізка $[\alpha, \beta]$, $\delta\colon M \to \mathbb{R}^+$ — функція, $\sum_{x\in M} \delta(x) < \infty$. *Функція стрибків*, відповідна множині M і функції δ, визначається формулою $f_{M,\delta}(t) = \sum\limits_{x\in M\cap[\alpha,t]} \delta(x)$.

2. Щоб зрозуміти термін «функція стрибків», побудуйте графік функції $f_{M,\delta}$ на відрізку $[0, 3]$ для $M = \{1, 2\}$, $\delta(1) = \delta(2) = 1$.

3. Нехай μ — суто атомарна борелева міра на відрізку $[\alpha, \beta]$. Тоді її функція розподілу є функцією стрибків.

4. Нехай μ — борелева міра на відрізку $[\alpha, \beta]$, F — її функція розподілу, $\alpha < t \leqslant \beta$. Тоді $\mu(\{t\}) = F(t) - F(t - 0)$, $\mu(\{\alpha\}) = F(\alpha)$.

5. Борелева міра на відрізку $[\alpha, \beta]$ безатомна тоді і тільки тоді, коли її функція розподілу неперервна і в точці α дорівнює нулю.

6. Із зображення міри у вигляді суми безатомної і суто атомарної мір випливає, що будь-яку невід'ємну неперервну справа зростаючу функцію на відрізку $[\alpha, \beta]$ можна однозначно зобразити у вигляді суми неперервної зростаючої функції, яка дорівнює нулю в точці α, і деякої функції стрибків.

7. Будь-яка неперервна справа зростаюча функція на відрізку $[\alpha, \beta]$ зображується у вигляді суми неперервної зростаючої функції і деякої функції стрибків. Таке зображення єдине з точністю до сталого доданку. Тобто до одного доданку можна додати, а з іншого — відняти одне й те саме число, і сума не зміниться; а інших причин неєдиності немає.

8. Будь-яка зростаюча функція на відрізку $[\alpha, \beta]$ однозначно зображується у вигляді суми неперервної справа функції і функції, відмінної від нуля не більш ніж у зліченній множині точок.

9. Будь-яка зростаюча функція f на відрізку $[\alpha, \beta]$ однозначно з точністю до сталого доданку зображується у вигляді суми таких трьох доданків: f_1 — неперервної функції, f_2 — функції стрибків і f_3 — функції, відмінної від нуля у не більш ніж зліченній множині точок.

2.3.6. Канторова драбина і міра, рівномірно розподілена на канторовій множині

Поданий у попередньому пункті опис борелевих мір на відрізку може справити враження, що всі такі міри дуже схожі на міру Лебега (принаймні після видалення атомів). У певному сенсі це враження правильне, проте картина є не настільки простою, як це може виглядати на перший погляд. Нижче ми побудуємо безатомну ймовірнісну борелеву міру на відрізку $[0, 1]$, зосереджену на канторовій множині: доповнення до канторової множини буде нехтуваним з точки зору цієї міри. Тобто, з певної точки зору, ця міра буде протилежна за властивостями до міри Лебега, адже міра Лебега канторової множини дорівнює нулю, а доповнення до канторової множини — одиниці. Ця міра і її функція розподілу — канторова драбина — будуть надалі джерелом важливих прикладів.

Як звичайно, канторова множина позначатиметься через $\mathcal{K}$, а відрізки довжини $1/3^n$, які викидаються з $[0,1]$ на n-му кроці побудови канторової множини, — через Δ_j^n, $j = 1, 2, ..., 2^{n-1}$. При фіксованому n відрізки Δ_j^n нумеруватимемо в порядку зростання: $\Delta_1^1 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, $\Delta_1^2 = (\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$, $\Delta_2^2 = (\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$ і т. д.

Основна ідея побудови шуканої міри — визначити її функцію розподілу F так, щоб міри всіх відрізків Δ_j^n дорівнювали нулю, а міри симетричних частин множини $\mathcal{K}$ дорівнювали одна одній. Так, $\mathcal{K} = \left(K \cap [0, \frac{1}{3}]\right) \cup \left(\mathcal{K} \cap [\frac{2}{3}, 1]\right)$, причому частини $\mathcal{K} \cap [0, \frac{1}{3}]$ і $\mathcal{K} \cap [\frac{2}{3}, 1]$ симетричні між собою, тому їхні міри природно прийняти за $\frac{1}{2}$. З таких самих міркувань симетрії, міри множин $\mathcal{K} \cap [0, \frac{1}{9}]$, $\mathcal{K} \cap [\frac{2}{9}, \frac{3}{9}]$, $\mathcal{K} \cap [\frac{6}{9}, \frac{7}{9}]$ і $\mathcal{K} \cap [\frac{8}{9}, 1]$ повинні дорівнювати $\frac{1}{4}$ і т. д. Отже, функцію розподілу F означимо у такий спосіб: покладемо $F(t) = \frac{1}{2}$ на Δ_1^1, $F(t) = \frac{1}{4}$ на Δ_1^2, $F(t) = \frac{3}{4}$ на Δ_2^2, ... , на Δ_j^n задамо $F(t) = \frac{2j-1}{2^n}$, ... Ми вже означили функцію розподілу на щільній множині — доповненні до $\mathcal{K}$. Легко бачити, що ця функція рівномірно неперервна на $[0,1] \setminus \mathcal{K}$: якщо $|x - y| < \frac{1}{3^n}$, то $|F(x) - F(y)| \leqslant \frac{1}{2^n}$. Тому, F єдиним способом продовжується до неперервної функції на всьому відрізку. Отримана монотонна неперервна функція називається *канторовою драбиною* і позначається $F_{\mathcal{K}}$. Борелева міра $\mu_{\mathcal{K}}$ на $[0,1]$, для якої ця функція є функцією розподілу, називається *мірою, рівномірно розподіленою на канторовій множині.*

Вправи

1. Щоб зрозуміти походження терміна «канторова драбина», зробіть ескіз графіка цієї функції.

2. Запишіть явний вираз значення $F_{\mathcal{K}}(t)$ через трійкове розвинення числа t.

3. Доведіть, що образ канторової множини під дією функції F_K — це весь відрізок $[0,1]$.

4. Нехай Ω_1 — множина, (Ω, Σ, μ) — простір з мірою, $f\colon \Omega_1 \to \Omega$ — сюр'єктивне відображення. Тоді сім'я множин $\Sigma_1 = \{f^{-1}(A) : A \in \Sigma\}$ утворює σ-алгебру на Ω, а формула $\mu_1\left(f^{-1}(A)\right) = \mu(A)$ задає зліченно-адитивну міру μ_1 на Σ_1. Якщо (Ω, Σ, μ) — повний простір з мірою, чи обов'язково простір з мірою $(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$ буде повним?

5. Для функції $f\colon [0,1] \to [0,1]$ точку $x \in [0,1]$ назвемо *точкою злипання*, якщо $f^{-1}(x)$ складається більше ніж з однієї точки. Доведіть, що у монотонної функції може бути не більше ніж зліченна кількість точок злипання.

6. Нехай $f\colon [0,1] \to [0,1]$ — зростаюча функція. Тоді для будь-якого набору підмножин $A_n \subset [0,1]$, $n \in M$ симетрична різниця множин $\bigcup_{n \in M} f(A_n)$ і $f\left(\bigcup_{n \in M} A_n\right)$ не більше ніж зліченна.

7. Нехай $f\colon [0,1] \to [0,1]$ — зростаюча функція. Тоді сім'я тих підмножин $A \subset [0,1]$, для яких $f(A)$ — борелева множина, — це σ-алгебра, яка містить всі відрізки.

8. З попередньої вправи випливає, що образ борелевої множини під дією монотонної функції — борелева множина.

9. Нехай μ — безатомна борелева міра на $[0,1]$, F — її функція розподілу, λ — міра Лебега. Тоді $\mu(A) = \lambda\left(F(A)\right)$ для будь-якої борелевої множини $A \subset [0,1]$.

2.3.7. σ-скінченні міри і міра Лебега на осі

У багатьох задачах доцільно вважати, що міра приймає не тільки скінченні додатні значення, але й на певних множинах і значення $+\infty$. Одним із таких узагальнень є поняття σ-скінченної міри.

Означення. Нехай Σ — σ-алгебра підмножин множини Ω. Відображення $\mu\colon \Sigma \to [0, +\infty]$ називається *σ-скінченною мірою*, якщо воно задовольняє такі аксіоми:

1. Зліченна адитивність: $\mu\left(\coprod\limits_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$ для будь-яких $A_k \in \Sigma$.

2. σ-скінченність: уся Ω зображується у вигляді $\Omega = \coprod\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, де $A_k \in \Sigma$ і $\mu(A_k) < \infty$.

Типовий приклад σ-скінченної міри — це *міра Лебега на осі.*

Означення. Множина $A \subset \mathbb{R}$ називається вимірною за Лебегом, якщо її перетин з будь-яким скінченним відрізком вимірний за Лебегом як підмножина цього відрізка. Міра Лебега множини A визначається через міри його перетину зі скінченними відрізками: $\lambda(A) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \lambda(A \cap [n, n+1))$.

Трійка (Ω, Σ, μ), де Ω — множина із заданою на ній σ-алгеброю Σ, а μ — σ-скінченна міра на Σ, називається *простором зі σ-скінченною мірою.* Звичайний простір із мірою називають ще *простором зі скінченною мірою*, якщо потрібно підкреслити його скінченність.

Вправи

1. Вимірні за Лебегом підмножини дійсної осі утворюють σ-алгебру, а міра Лебега на осі — це σ-скінченна міра.

2. Кожна борелева множина на осі вимірна за Лебегом.

3. Для вимірної підмножини дійсної осі застосовні такі формули обчислення міри Лебега:
$$\lambda(A) = \lim_{n,m\to\infty} \lambda(A \cap [-n, m]) = \lim_{n\to\infty} \lambda(A \cap [-n, n]).$$

4. Міра Лебега відкритої множини на осі дорівнює сумі довжин відрізків, що утворюють її.

5. Міра Лебега вимірної за Лебегом множини A на осі збігається з її зовнішньою мірою $\lambda^*(A) = \inf\{\lambda(B) : \ B$ відкрита, $B \supset A\}$.

6. Кожна вимірна за Лебегом підмножина осі зображувана як об'єднання борелевої множини і множини міри нуль.

7. Нехай M — деяка індексна множина, $(\Omega_n, \Sigma_n, \mu_n)$, $n \in M$ — простори зі скінченною мірою і Ω_n попарно не перетинаються. Покладемо $\Omega = \bigcup_{n\in M} \Omega_n$, σ-алгебру Σ означимо як сім'ю всіх множин вигляду $A = \bigcup_{n\in M} A_n$, $A_n \in \Sigma_n$, і покладемо $\mu(A) = \sum_{n\in M} \mu(A_n)$. За якої умови (Ω, Σ, μ) буде простором зі σ-скінченною мірою? Простором зі скінченною мірою?

8. Нехай (Ω, Σ, μ) — простір зі σ-скінченною мірою. Тоді для будь-якої зростаючої послідовності A_n вимірних множин $\mu\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim\limits_{k\to\infty} \mu(A_k)$.

9. Для скінченних мір ми зазначали таку властивість (твердження 2 п. 2.1.4): якщо $A_n, \in \Sigma$, $n = 1, 2, \ldots,$ — спадний ланцюжок множин (тобто $A_1 \supset A_2 \supset \ \ldots \ \supset A_n \supset \ \ldots$), то $\mu\left(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim\limits_{k\to\infty} \mu(A_k)$. Покажіть на прикладі міри Лебега на осі, що для σ-скінченних мір це твердження неправильне: існує спадний ланцюжок вимірних множин A_n з $\lambda(A_n) = +\infty$ і $\lambda\left(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k\right) = 0$ (тобто $\neq \lim\limits_{k\to\infty} \mu(A_k)$). Проте за умови скінченності мір множин A_n твердження правильне і в просторах з σ-скінченною мірою.

Коментарі до вправ

2.1.2

Вправа 7. Зобразити A як $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, де A_n відкриті. Тоді $A_n \supset A$ і, отже, щільні. Відповідно $X \backslash A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (X \backslash A_n)$ і всі множини $X \backslash A_n$ замкнені і ніде не щільні (див. вправа 1 п. 1.3.6).

Вправа 8. Перейти до доповнень і скористатись попередньою вправою.

Вправа 9. Згідно з вправою 7, $\overline{A} \setminus A$ — множина першої категорії в $\overline{A}$.

Вправа 11. Зліченна підмножина відрізка — множина першої категорії, а щільна класу G_δ — другої.

Вправа 12. Нехай $\underline{f}$ і $\overline{f}$ — нижня і верхня обвідні функції f (вправа 4 п. 1.2.4). Тоді

$$dc(f) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ t : \overline{f}(t) - \underline{f}(t) \geqslant \frac{1}{n} \right\},$$

а кожна з множин $\left\{ t : \overline{f}(t) - \underline{f}(t) \geqslant \frac{1}{n} \right\}$ замкнена.

Вправа 14. Нехай f_n неперервні і в кожній точці збігаються до f при $n \to \infty$. Тоді

$$f^{-1}\left([a, +\infty)\right) = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} f_k^{-1} \left(\left(a - \frac{1}{m}, +\infty \right) \right) \in G_\delta.$$

Вправа 15. Скористатись вправами 13, 9 і 14.

Вправа 19. Скористатись вправою 11.

2.1.3

Вправа 1. Зафіксуємо відкриту множину $U \subset X_1$ і розглянемо сім'ю Σ тих підмножин $V \subset X_2$, що $U \times V \in \mathfrak{B}$. Σ — це σ-алгебра, яка містить всі відкриті множини, отже, $\Sigma \supset \mathfrak{B}_2$. Тобто борелевими будуть всі множини вигляду $U \times V$, де $U \subset X_1$ відкрита, а $V \in \mathfrak{B}_2$. Тепер зафіксуємо $V \in \mathfrak{B}_2$ і розглянемо сім'ю Ψ тих підмножин $U \subset X_1$, що $U \times V \in \mathfrak{B}$. Ψ — це σ-алгебра на X_1, яка містить всі відкриті множини, тому, $\Psi \supset \mathfrak{B}_1$. Отже, всі «прямокутники» $A_1 \times A_2$, де $A_1 \in \mathfrak{B}_1$, $A_2 \in \mathfrak{B}_2$ лежать в $\mathfrak{B}$. Відтак, $\mathfrak{B}_1 \otimes \mathfrak{B}_2 \subset \mathfrak{B}$.

Вправа 2. Для будь-якого $x = (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ добуток $\mathfrak{B}_1 \otimes \mathfrak{B}_2$ містить всі околи точки x вигляду $B(x_1, r_1) \times B(x_2, r_2)$, тобто базу околів точки. З огляду на сепарабельність, будь-яка відкрита множина в $X_1 \times X_2$ зображувана як зліченне об'єднання множин вигляду $B(x_1, r_1) \times B(x_2, r_2)$. Тому $\mathfrak{B}_1 \otimes \mathfrak{B}_2$ містить всі відкриті множини, отже, і всі борелеві множини на $X_1 \times X_2$.

Вправа 5. Відповідь залежить від аксіоматики теорії множин (скажімо, яка версія континуум-гіпотези вважається правильною). Як нам повідомив недавно Т. Банах, з результатів Д. Фремліна (1996 р.) випливає, що в одній з аксіоматик ці сім'ї множин не збігаються.

Вправа 6. Зафіксуємо $t_1 \in \Omega_1$ і розглянемо сім'ю Σ тих $A \subset \Omega_1 \times \Omega_2$, для яких $A_{t_1} \in \Sigma_2$, Σ — це σ-алгебра, яка містить всі «прямокутники». Тому $\Sigma \supset \Sigma_1 \otimes \Sigma_2$.

2.1.6

Вправа 2. Нехай $\mu(A_1 \cap A_2) \neq 0$. Оскільки A_1 — атом, то для будь-якої підмножини множини A_1 ненульової міри його доповнення в A_1 має міру 0. Отже, $\mu(A_1 \backslash (A_1 \cap A_2)) = 0$. Тому також $\mu(A_2 \backslash (A_1 \cap A_2)) = 0$. Отож, і $\mu(A_1 \triangle A_2) = 0$.

2.2.1

Вправа 6. Це твердження, згідно з теоремою автора [Kad3], зберігає силу й у загальнішій ситуації: для опуклих тіл у гільбертовому просторі і вписаних куль, замість трикутників на площині і кругів. Пізніше для двовимірного випадку незалежне доведення надав András Bezdek [Bez].

2.3.1

Вправа 4. Шукану множину A можна будувати аналогічно канторовій множині з тією відмінністю, що відрізки, які відкидаються потрібно вибирати «маленькими»: з сумарною довжиною меншою за 1. При цьому можна досягти, щоб $\lambda(A)$ було як завгодно близьке до 1.

Вправа 5. Взявши $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, де A_n — ніде не щільні множини з $\lambda(A_n) \geqslant 1 - 1/n$, отримаємо множину першої категорії з $\lambda(A) = 1$. Доповнення до A є потрібною множиною.

2.3.3

Вправа 3. Див. [R-Se, с. 21–22].

Вправа 4. Див. [R-Se, с. 22–23]. Інший, природніший розв'язок випливатиме з результатів п. 7.2.2.

2.3.4

Вправа 3. Для того, щоб $\lambda^*(A) = \lambda^*(B) = 1$, необхідно і достатньо, щоб і A, і B перетинались з усіма замкненими множинами ненульової міри. Оскільки існує тільки континуум замкнених підмножин відрізка, можна виписати замкнені підмножини додатньої міри в трансфінітну послідовність K_γ, $\gamma < c$, де c — найменший ординал континуальної потужності. Тепер для кожного $\gamma < c$ виберемо дві різні точки $a_\gamma, b_\gamma \in K_\gamma \setminus (\{a_\beta\}_{\beta<\gamma} \cup \{b_\beta\}_{\beta<\gamma})$. Можливість такого вибору обґрунтовується тим, що на кожному кроці множина K_γ континуальна, а множина $\{a_\beta\}_{\beta<\gamma} \cup \{b_\beta\}_{\beta<\gamma}$ вже вибраних точок має потужність меншу за континуум. Залишається покласти $A = \{a_\gamma\}_{\gamma<c}$, $B = [0,1] \setminus A \supset \{b_\gamma\}_{\gamma<c}$.

Вправа 5. Одна з можливих конструкцій наведена в зауваженні наприкінці доведення теореми 2.16 з праці [К-Т].